

俄罗斯数学教材选译

函数论与泛函分析初步

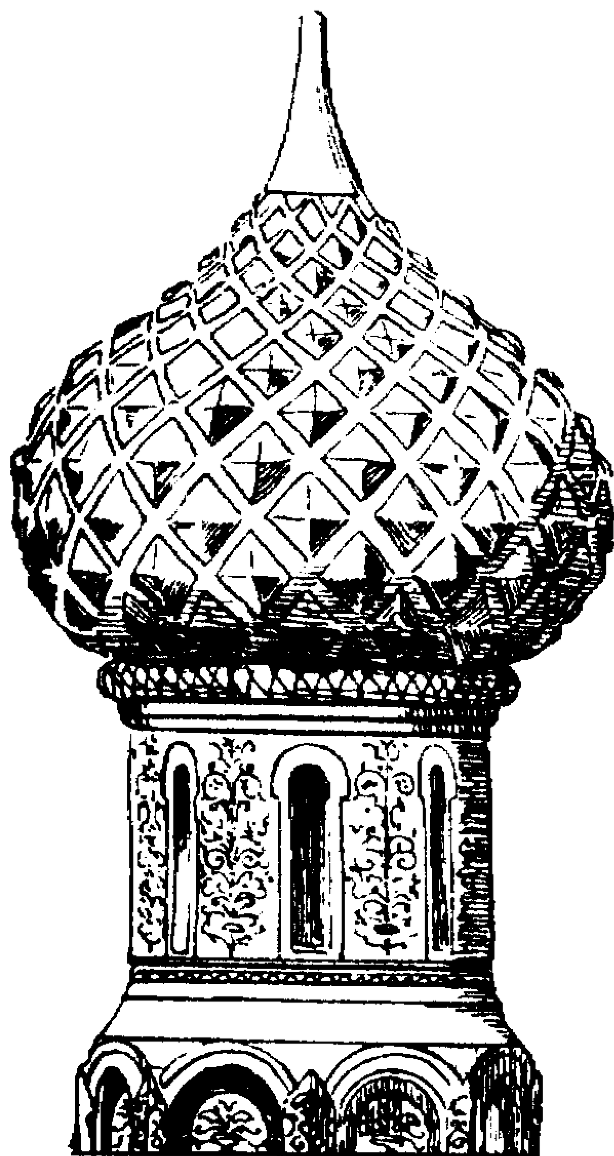
(第7版)

□ А. Н. 柯尔莫戈洛夫 С. В. 佛明 著

□ 段虎荣 郑洪深 郭思旭 译



高等教育出版社
Higher Education Press



俄罗斯数学教材选译

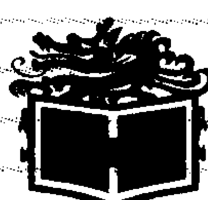
● 数学天元基金资助项目

函数论与泛函分析初步

(第7版)

□ A. H. 柯尔莫戈洛夫　C. B. 佛明　著

□ 段虞荣　郑洪深　郭思旭　译



高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01–2005–5736 号

Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Злементы теории функций и функционального анализа

ISBN 5–9221–0266–4

图书在版编目（CIP）数据

函数论与泛函分析初步:第 7 版 / (俄罗斯)柯尔莫戈洛夫,(俄罗斯)佛明著;段虞荣,郑洪深,郭思旭译.—2 版.—北京: 高等教育出版社,2006.1
ISBN 7–04–018407–9

I.函...　II.①柯...②佛...③段...④郑...⑤郭...
III.①函数论–教材②泛函分析–教材　IV.0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 141196 号

策划编辑　张小萍　**责任编辑**　郭　伟　**封面设计**　王凌波
责任印制　宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010–58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800–810–0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010–58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	1992 年 10 月第 1 版
开　　本	787×1092　1/16		2006 年 1 月第 2 版
印　　张	29.5	**印　　次**	2006 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	580 000	**定　　价**	56.00 元

物料号　18407–00

序

从20世纪50年代初起，在当时全面学习苏联的大背景下，国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材。这些教材体系严密，论证严谨，有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础，培养了一大批优秀的数学人才。到了60年代，国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材，但还在很大程度上保留着苏联教材的影响，同时，一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用。客观地说，从解放初一直到文化大革命前夕，苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用，起了不可忽略的影响，是功不可没的。

改革开放以来，通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材，大家眼界为之一新，并得到了很大的启发和教益。但在很长一段时间中，尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革，但引进基本中断，更没有及时地进行跟踪，能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少，事实上已造成了很大的隔膜，不能不说是一个很大的缺憾。

事情终于出现了一个转折的契机。今年初，在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上，有数学家提出，莫斯科大学为庆祝成立250周年计划推出一批优秀教材，建议将其中的一些数学教材组织翻译出版。这一建议在会上得到广泛支持，并得到高等教育出版社的高度重视。会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论，大家一致认为：在当前着力引进俄罗斯的数学教材，有助于扩大视野，开拓思路，对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要。《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下，经数学天元基金资助，由高等教育出版

社组织出版的。

经过认真选题并精心翻译校订，本系列中所列入的教材，以莫斯科大学的教材为主，也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材。有大学基础课程的教材，也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书。有些教材虽曾翻译出版，但经多次修订重版，面目已有较大变化，至今仍广泛采用、深受欢迎，反射出俄罗斯在出版经典教材方面所做的不懈努力，对我们也是一个有益的借鉴。这一教材系列的出版，将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来，对推动我国数学课程设置和教学内容的改革，对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才，可望发挥积极的作用，并起着深远的影响，无疑值得庆贺，特为之序。

李大潜

2005 年 10 月

第7版序

读者现在手中拿着的第7版的本书,在近半个世纪的时间内,不仅为我国,也为其他许多国家的数学教育服务过。

这里还想再说一下本书的两位卓越的、富有创造性的合作者。提出把曾经在国立莫斯科罗蒙诺索夫大学数学力学系分散于许多课程的内容综合成一个课的一般设想的是安德烈·尼可拉也维奇·柯尔戈洛夫。他制订了新的课程大纲(称为“分析Ⅲ”),其中包括集论初步、度量空间、赋范空间、测度论和勒贝格积分、巴拿赫空间与希尔伯特空间中的线性算子。A. H. 柯尔莫戈洛夫曾按照这个大纲讲过几次,并且打算照他的想法编写教科书。本书的第一个版本分两册分别于1954年和1960年于莫斯科大学出版社出版,系由A. H. 柯尔莫戈洛夫与谢尔盖·瓦西里也维奇·佛明卓越的密切合作而写成的,后者在那些年份里给物理系讲授泛函分析课。

C. B. 佛明视A. H. 柯尔莫戈洛夫为自己的老师之一;安德烈·尼可拉也维奇则对谢尔盖·瓦西里也维奇的学识、教学水平和人品给予高度评价。他们的合作是极为富有成果的。

在1954年写成的第一册的序言中,作者写道:“**在后续分册中应有测度论与勒贝格积分、希尔伯特空间、含对称核的积分方程理论与正交函数系(这部大纲已在第二册中实现)、非线性泛函分析初步及泛函分析方法在计算数学问题中的某些应用。**”

在第1版出版之后的十五年里,C. B. 佛明在完善此书方面做了许多工作;极大地扩充了包含在第1版中的内容;在度量空间理论部分加入了一般拓扑学初步,在赋范空间理论部分加入了线性拓扑空间初步,在积分理论部分加入了微分论,在正交函数系理论部分加入了三角级数论和傅里叶变换。按照他的请求,我写了《附录:

巴拿赫代数》。谢尔盖·瓦西里也维奇写了非线性分析一章,并在此之上继续工作,想把它大大扩充,但是他的辞世,却使这个打算没能进行到底。十分遗憾,把《泛函分析方法在计算数学问题中的某些应用》列入书中的想法未能实现。

在这一版中纠正了某些印刷错误,并把索引注明的出处由页码改为章、节、段(这样就可以在以后的版本中避免许多不确切性)。

今年是安德烈·尼可拉也维奇与谢尔盖·瓦西里也维奇·佛明合著的《函数论与泛函分析初步》第 1 版问世 50 周年。毋庸置疑,呈献给读者的本书第 7 版是具有 250 年历史的莫斯科大学的教授们所著的优秀教材之一。

B. M. 季霍米洛夫

莫斯科,2004 年

前几版的序

第 2 版 序

《函数论与泛函分析初步》的第 1 版分别在 1954 年和 1960 年以两卷本出版。这两卷本的出现是与 20 世纪 40 年代末在莫斯科大学数学力学系教学大纲内包含了“分析Ⅲ”教程有关的,分析Ⅲ包含了测度论与函数论初步、积分方程、泛函分析的内容,稍晚些又包括了变分法。本教程起先由 A. H. 柯尔莫戈洛夫,以后又有其他讲授者, 其中包括 C. B. 佛明,在莫斯科大学讲授过。后来其他大学的教学计划中也采用了这本书。

当时,在莫斯科大学用统一的教程“分析Ⅲ”代替实变函数论、积分方程及变分法的各门课程引起了较大的争论。本教程面临培养学生具备双重视野的任务:一方面,注意集合论,度量空间与拓扑空间连续映射的一般理论,线性空间以及在其上的泛函与算子,一般“测度空间”中的纯测度论与积分法等的发展的内部逻辑;另一方面,不忽略被这些更为抽象的数学领域所服务的古典分析学甚至应用分析学。

在解决这个问题的时候,我们在本书的编写计划中偏重于教程结构的抽象方面。从集的一般理论(第一章)可以转到度量空间、拓扑空间以及它们的连续映射(第二章),或直接转到测度(没有拓扑)的空间及该空间的积分法(第五章)。在第三与第四章中研究线性空间以及其中的线性泛函与线性算子。从这两章可以直接转到第十章(非线性微分算子与非线性泛函)。在第七章中研究可和函数线性空间。就实质上说,我们仅在第六章与第八章中把注意力集中在实变函数上。尽管本书把函数论与泛函分析的一般概念的研究放在首位,但读者可以观察到在几乎所有各章,我们都注意将上述概念与古典问题联系起来。在本版中增加了第六章(微分

论),第八章(三角级数及傅里叶积分)与第九章(线性积分方程),使得现在这本书(除变分法以外)包括了莫斯科大学中所用的“分析Ⅲ”教程的整个教学大纲。本书没有加入变分法这一部分内容,仅限于在第十章中叙述了非线性泛函分析的最重要概念。

如同旧版一样,在新版中,测度的一般理论占有相当的地位。近来不利用测度论工具而根据丹尼尔(Daniell)概型出现了相当多积分理论的叙述。但是,我们认为测度理论很重要,并且测度论本身不依赖于积分概念的引入,因而值得加到大学教程中去。

新增加的各章明显扩充了本书的内容。旧的各章也作了本质的修改并在其中加入新的节段(例如,序型与超限数,拓扑空间,广义函数等等)。

然而,在修改本书并增加新的篇幅时,我们努力保持了第一版中看来是比较成熟的初等叙述风格。我们期望本书与其他教程,特别是与Г. Е. 希洛夫的书“数学分析专门教程”一样,在大学教学中得到其应有的地位。在希洛夫的教程中更强调问题的解析方面,而对度量空间与拓扑空间、测度等内容的兴趣不大,以较少的篇幅作为独立的内容来介绍。

A. H. 柯尔莫戈洛夫
C. B. 佛明

第 3 版 序

在新版准备过程中,我们保留了本书总的计划并力求不增加内容。此外,本书全部内容都经过重新审阅与修订。在这个工作中Ф. В. 希罗柯夫给予我们莫大的帮助。据我们的意见,在第一章与第四章中作出一些简单的变动和修改,从比较简单的概念过渡到比较复杂的概念(例如,从巴拿赫空间过渡到第四章中更一般的空间)。测度论(第五章)的叙述作了十分重要的修改。

近年来,“分析Ⅲ”教程往往包含巴拿赫代数论与谱分析初步。因此,我们把B. M. 季霍米洛夫所写有关上述两个问题作为附录是适宜的。

A. H. 柯尔莫戈洛夫
C. B. 佛明

第 4 版 序

这一版问世以后C. B. 佛明已不在人间。但是,他还是赶上改进本书的所有主要工作,主要修改了第十章。在这一章中补了关于隐函数定理的一节并且修改了“极值问题”的一节。这些就使得有必要修改第四章(哈恩–巴拿赫定理及关于逆算子的巴拿赫定理的推论)。

本书全文经由B. M. 亚历克赛也夫与B. M. 季霍米洛夫审阅，在此我向他们表示衷心的感谢。

A. H. 柯尔莫戈洛夫

第 6 版 序

这一版是在安德烈·尼可拉也维奇·柯尔莫戈洛夫逝世后出版的。他是在大学教育课程框架内设置函数论与泛函分析课程（简称“分析Ⅲ”）的倡议者。安德烈·尼可拉也维奇详细订出教学大纲，并在莫斯科大学数学力学系首先讲授这个课程（1946—1947 学年），而后再次讲授时（1952—1953 学年），就想写成教科书。为此目的，A. H. 柯尔莫戈洛夫邀请谢尔盖·瓦西里也维奇·佛明（后者在物理系讲授类似的课程）一道编写，他对后者的学识、教学水平和人品有很高的评价。这样，一个创作优秀教科书的作者集体便形成了，在近 35 年的期间内，在许多大学中讲授“分析Ⅲ”时，都采用了这本书。

本书第 1 版是分册出版的——分别在 1954 年和 1960 年由莫斯科大学出版社出版。我认为应当在这里提一下 T. Д. 文策尔和 O. C. 库拉庚娜在本书出版过程中（1954 年）所起的重大作用。他们写出了安德烈·尼可拉也维奇讲授课程的详细纲要，此后作者委托他们（那时他们还是大学生）担任此书的编校工作，他们以高度的责任心完成了任务。

A. H. 柯尔莫戈洛夫的多方面的一般教育思想已反映在“分析Ⅲ”的设想中。首先是关于抽象数学与应用数学的统一性问题，（正如在第 2 版序言中所说的）关于**“培养学生具备双重视野：一方面，注意集合论、度量空间与拓扑空间连续映射的一般理论、线性空间以及在其上的泛函与算子、一般‘测度空间’中的纯测度论与积分法等的发展的内部逻辑；另一方面，不忽略被这些更为抽象的数学领域所服务的古典分析学甚至应用分析学”**的必要性问题。

其次，A. H. 柯尔莫戈洛夫总是宣传“综合”课程的必要性，宣传这样一种理念：教育就如同一种螺旋运动，学习者可以越来越高的层次来观察整个轨迹。在本书中对在教学的开始阶段学生在课程中已接触到的古典分析（“分析Ⅰ”）与代数、几何与微分方程（“分析Ⅱ”）的概念实行综合。“分析Ⅲ”课程本身把原先在数学力学系开的课程中的实变函数论、泛函分析、积分方程、变分法等等材料统一起来。安德烈·尼可拉也维奇认为：大学教科书应当简明、易懂，并加入大量例子，这些例子可作为发展抽象理论的论据。本书就是这样写成的。

最初本书非常简明（它符合 A. H. 柯尔莫戈洛夫最初的设想），但嗣后作者们决定大大扩充本书的内容，以使不同类型大学的教师可以从中选择更适合他们的材料。这个扩充基本上是由 C. B. 佛明在第 2、3、4 版完成的。那时，应作者的请求，我写了有关巴拿赫代数的《附录》。在这里还想提一下在出版过程中，本书的各位编辑

的巨大帮助:Д. П. 热洛本科(1960 年),Ф. В. 希洛科娃(1972 年,第 3 版)和 В. М. 阿列克谢也娃(1976 年,第 4 版)。С. В. 佛明的辞世中断了他对本书的许多设想的实现(主要是有关第十章的改写)。第 5 版没有实质性的修改,在这一版中对文献目录作了某些修改。

А. Н. 柯尔莫戈洛夫和 С. В. 佛明的书于 1968,1972,1976 和 1981 年在科学出版社(Наука)再版。此书被译成多种外国文字,出了英文和日文两种版本,在德意志民主共和国、捷克斯洛伐克社会主义共和国及匈牙利人民共和国出版,还被译成法文和西班牙文,1988 年在 Мир 出版社出版了达里语的版本。

深信在更长的时间内,А. Н. 柯尔莫戈洛夫和 С. В. 佛明的书对未来新的一代代的数学家们仍将是需要的。

В. М. 季霍米洛夫

基本符号表

$\mathscr{A}$

B_T

$B(x_0,r)$

$B(X^2,Y)$

$BC(X,Y)$

$\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$

$\mathbb{C}$

$C=C[0,1]$

$C[a,b]$

C_T

$C^1[a,b]$

$C^n[a,b]$

$C_2[a,b]$

$C_E^1[t_0,t_1]$

C^∞

$CBV[0,1]$

c

$DF(x,h)$

$D(\lambda),D(s,t;\lambda)$

$\mathrm{d}F,\mathrm{d}^2F,\mathrm{d}^nF$

$E^*,E^\#$

(E^*,b)

$(E^*,\|\cdot\|)$

$f:M\to N$

$f(A)$

$f^{-1}(b)$

$f^{-1}(\tau)$

F''

$\mathscr{GL}(E,E_1)$

Im

$J(E)$

$K[a,b]$

Ker

$L_1,L_1(X,\mu)$

$L_2,L_2(X,\mu)$

$L_p(X,\mu)$

$\mathscr{L}(E,E_1)$

L/L'

$L(\{x_\alpha\})$

l_1

l_2

l_p

$\mathscr{M}$

$N(X^n, Y)$

$\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$

S_∞

S_∞^*

T_{x_0}

V_a^b

$V^0[a,b]$

$\mathbb{W}$

Z

$\rho_1(x,y)$

$\rho_p(x,y)$

$\rho_\infty(x,y)$

$\tau(\mathfrak{B})$

$\aleph$

$\aleph_0$

$\aleph_1$

$\cup$

$\cap$

$\triangle$

$\setminus$

$\subset$

$\sim$

φ

目　录

第一章　集论初步

§1. 集的概念. 集上的运算

1. 基本定义　在数学中碰到各种各样的集(或集合). 我们可以谈论多面体的面的集,直线上的点集,自然数集等等. 集的概念是如此一般,以致很难给它下一个不归结为其同义语的定义,这些同义语无非是元素的总体,元素的全体等.

集的概念在近代数学中所起的作用,不仅取决于集论本身在目前已经成为一门非常广阔而内容丰富的学科,并且主要还取决于在十九世纪末出现的集论对整个数学已经产生而且还在产生全面的影响. 本书不准备较为完全地阐述这个理论,这里只引进基本符号以及后面要用到的集论的基本概念.

我们用大写字母 $A,B,\cdots$ 表示集,而它们的元素用小写字母 $a,b,\cdots$ 来表示. 我们把论断"元素 a 属于 A"用符号 $a\in A$(或 $A\ni a$)记之;记号 $a\notin A$(或 $A\not\ni a$)表示元素 a 不属于 A. 如果组成 A 的一切元素都属于 B(并且不排除 $A=B$ 的情形),这时我们就称 A 为集 B 的子集,并记作 $A\subset B$. 例如,整数在一切实数的集中构成一个子集.

有时我们预先并不知道某集(例如,给定方程的根的集)是否至少含有一个元素. 因此,引进空集,即一个元素也不包含的集的概念是合理的. 我们用符号 $\varnothing$ 表示这个集. 任何集都包含 $\varnothing$ 作为它的子集. 既异于某集本身又异于 $\varnothing$ 的子集称为真子集.

2. 集上的运算　设 A 与 B 为两个任意集. 由至少属于集 A 与 B 中之一的一切元素组成的集 $C=A\cup B$ 称为 A 与 B 的和或并(图 1).

类似地可定义任意(有限或无限)个集的和. 如果 A_α 是任意一组集,那么它们的和 $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ 就是由至少属于集 A_α 中之一的元素的全体组成的集.

由既属于 A 又属于 B 的一切元素组成的集 $C=A\cap B$ 叫做集 A 与 B 的交(图 2). 例如,一切偶数集与一切被 3 整除的整数集的交是由一切被 6 整除的整数组成的. 属于每一 A_α 的元素的全体 $\bigcap_\alpha A_\alpha$ 叫做任意(有限或无限)个集 A_α 的交.

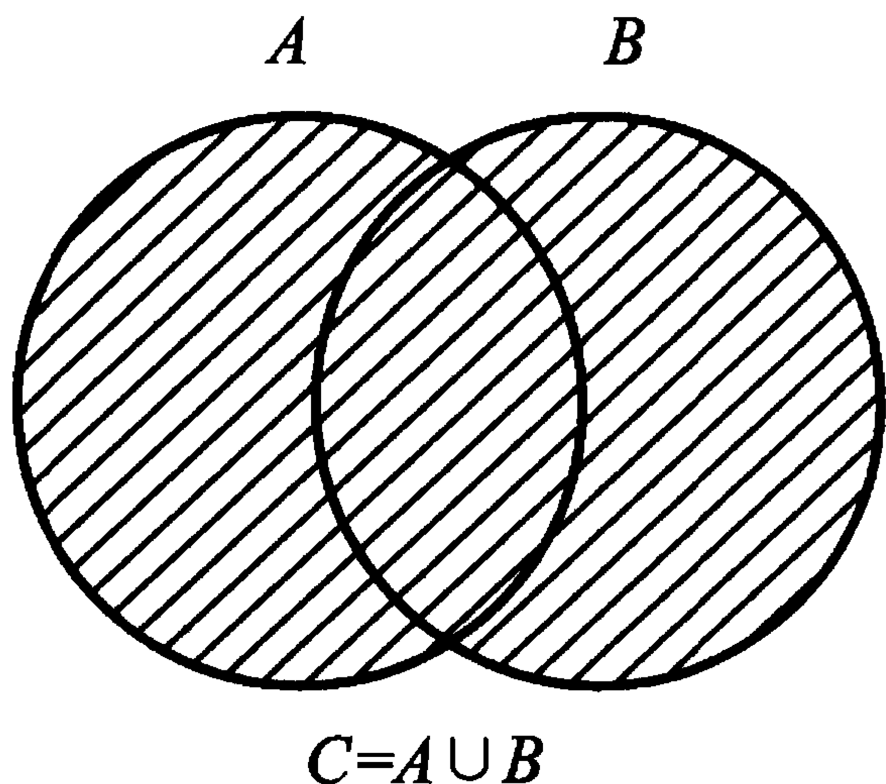


图 1

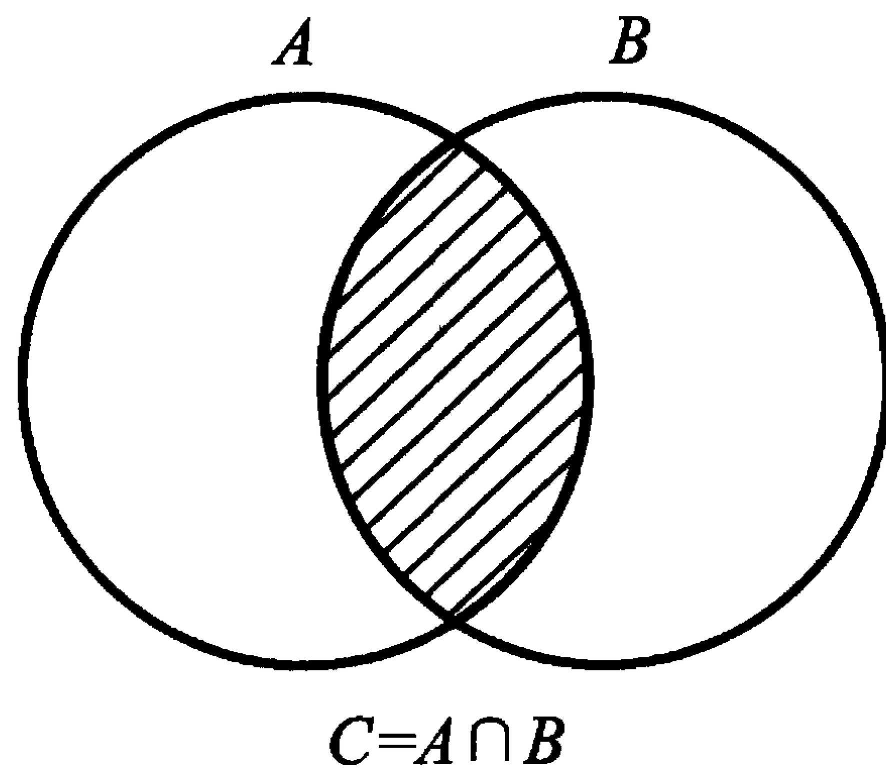


图 2

集的加法与乘法运算,按照集本身的定义是可交换且可结合的,即

$$A\cup B=B\cup A,\quad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$A\cap B=B\cap A,\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

此外,它们相互间还是可分配的:

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),\tag{1}$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C),\tag{2}$$

事实上,我们来验证,例如,上述等式中的第一个[①]. 设元素 x 属于等式(1)左端的集,即 $x\in(A\cup B)\cap C$,这意味着 $x\in C$,此外,x 还至少属于集 A 或 B 两者之一. 这时 x 至少属于集 $A\cap C$ 或 $B\cap C$ 中的一个,即 x 属于等式(1)右端的集. 反之,设 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$,这时 $x\in A\cap C$ 或 $x\in B\cap C$. 因而 $x\in C$,此外,x 属于 A 或 B,即 $x\in A\cup B$,这样,$x\in(A\cup B)\cap C$. 等式(1)证毕. 类似地可验证等式(2).

下面我们定义集的减法运算. 我们把不属于 B 的 A 中元素的全体 $C=A\backslash B$ 叫做集 A 与 B 的差(图 3). 同时,一般说来,并不假定 $A\supset B$. 有时也把 $A\backslash B$ 写作 $A-B$.

有时(例如,在测度论中)需要研究所谓两个集 A 与 B 的对称差,它是由差 $A\backslash B$ 与 $B\backslash A$ 的和来定义的(图 4). 我们将以符号 $A\triangle B$ 记集 A 与 B 的对称差 C. 于是,按定义,

$$A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A).$$

习题 证明 $A\triangle B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

我们常常需要研究这样或那样的一组集,这组集是某一基本集 S 的子集. 例如,数轴上的各种点集. 在这种情况下,差 $S\backslash A$ 叫做集 A 的余集,并记作 CA 或 A'.

在集合论及其应用中,基于以下两个关系的所谓对偶原理起着极重要的作用:

---

① 两个集的等式 $A=B$ 可理解为恒等式,即它表示集 A 的每一元素属于 B;反之,集 B 的每一个元素属于 A. 换句话说,等式 $A=B$ 等价于这样的两个包含式 $A\subset B$ 及 $B\subset A$ 同时成立.

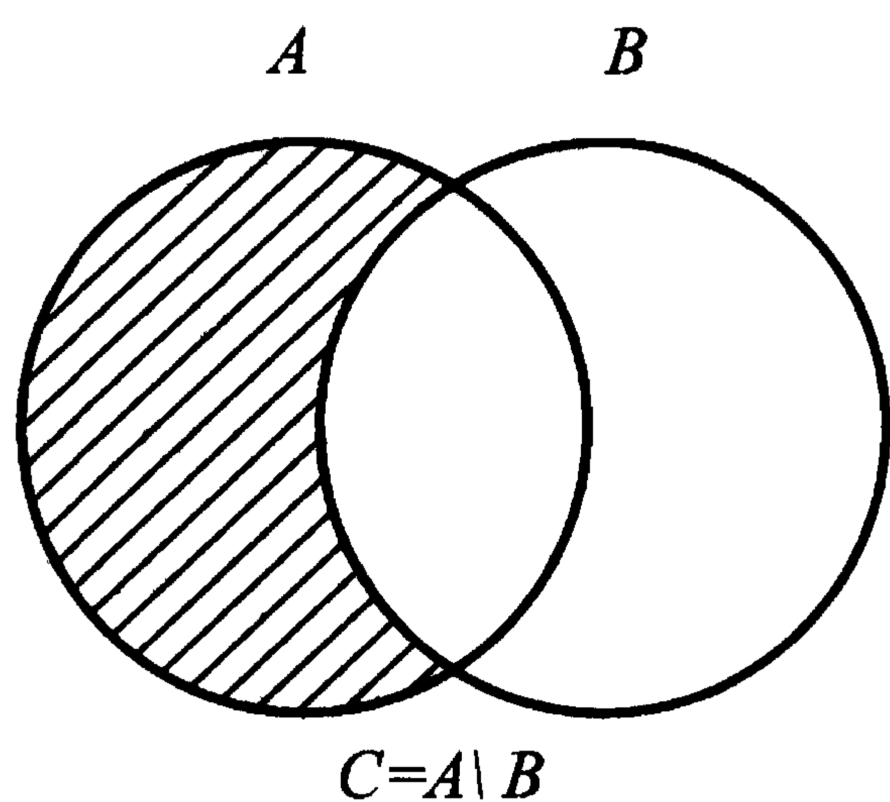


图 3

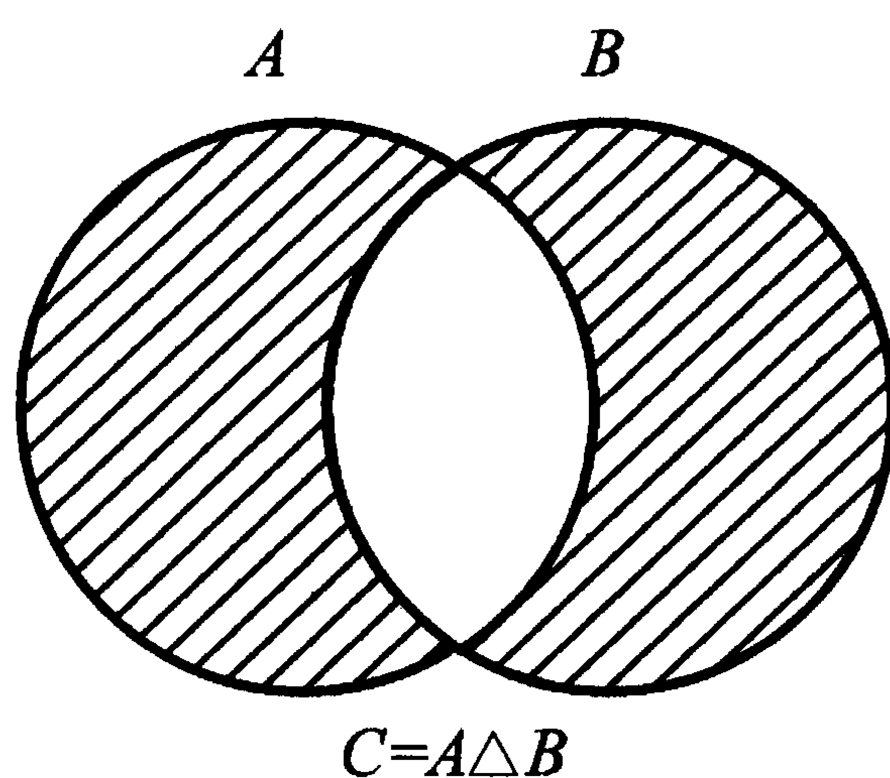


图 4

（1）和集的余集等于余集的交集

$$S\setminus\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}=\bigcap_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha}).\tag{3}$$

（2）交集的余集等于余集的和集

$$S\setminus\bigcap_{\alpha}A_{\alpha}=\bigcup_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha}).\tag{4}$$

对偶原理是从与某一固定集 S 的子集族有关的任一等式出发,用代换的方法,把所考察的一切集换成它的余集,和集换成交集,交集换成和集,这样就能够完全自动地得到另一个对偶的等式. 作为一个例子,从第二章 §2 定理 3 利用这个原理就可以推出定理 3′.

下面我们给出关系式(3)的证明.

设 $x\in S\setminus\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$,这意味着 x 不属于并集 $\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$,即不属于 A_{α} 中的任何一个集. 于是,x 属于余集 $S\setminus A_{\alpha}$ 中的每一个集,所以 $x\in\bigcap_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha})$. 反之,设 $x\in\bigcap_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha})$,即 x 属于每一个 $S\setminus A_{\alpha}$,这时 x 不属于 A_{α} 中的任何一个集,即不属于它们的和 $\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$. 于是 $x\in S\setminus\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$. 等式(3)证毕. 关系式(4)也可类似地证明(请读者自行证明).

对于运算 $A\triangle B$ 叫做“对称差”是不很合适的. 这种运算与取和集 $A\cup B$ 的运算有许多类似之处. 事实上,$A\cup B$ 意味着我们把以下两个论断“元素属于 A”及“元素属于 B”用非排斥的“或”联结起来;而 $A\triangle B$ 意味着把同样的两个论断用排斥的“或”联结起来:“元素 x 属于 $A\triangle B$,当且仅当 x 或仅属于 A,或仅属于 B”. 我们可以把集 $A\triangle B$ 叫做集 A 与 B“按模 2 的和”(亦即取这两个集的并,但同时把两个集相同的元素除掉).

§2. 映射. 分类

1. 集的映射. 函数的一般概念 在分析学中,函数的概念可以用以下的方式引进. 设 X 是数轴上的某一个集. 如果对于每一个数 $x\in X$,有一个确定的数 $y=f(x)$ 与之对应,则说在集 X 上定义了一个函数 f. 这时,X 叫做给定函数的定义域,而 Y 是

该函数取得一切值的总体，叫做函数的值域.

如果考虑以任何一个不管具有什么属性的集来代替数集，那么我们就得到最一般的函数概念. 设 M 与 N 是两个任意集. 如果对于每一个元素 $x \in M$，有 N 中一个且仅仅一个元素 y 与之对应，则说在 M 上定义了 N 中取值的函数 f. 对于具有任意属性的集合（其实，正如数集的情形一样），我们常常用术语"映射"来代替术语"函数"，并且说，一个集到另一个集内的映射. 对于具有特殊属性的集 M 与 N 就产生特殊类型的函数，这些函数都有特殊的名称，如"向量函数"，"测度"，"泛函"，"算子"等等. 下面我们将要见到这些函数.

为了表示从 M 到 N 内的函数（映射），我们常常使用记号

$$f: M \to N.$$

如果 a 是 M 中的元素，那么 N 中对应于它的元素 $b = f(a)$ 叫做（在映射 f 下）a 的象. 我们把 M 中其象为给定元 $b \in N$ 的一切元素 a 的总和叫做元素 b 的原象（或确切地说全原象），并记作 $f^{-1}(b)$.

设 A 是 M 中某一个集，形如 $f(a)$ $(a \in A)$ 的一切元素 $\{f(a): a \in A\}$ 叫做 A 的象，并记作 $f(A)$. 同样地，对于 N 中每一个集 B 可定义它的（全）原象 $f^{-1}(B)$，即 $f^{-1}(B)$ 是 M 中其象属于 B 的一切元素的总和. 可能出现下面的情况：B 中任一元素 b 都没有非空的原象，于是原象 $f^{-1}(B)$ 也是空集.

这里，我们仅研究映射最一般的性质.

下面引进某些术语. 如果 $f(M) = N$，则说 f 是集 M 到 N"上"的映射，这种映射亦称为满射. 在一般情况下，即当 $f(M) \subset N$ 时，则说 f 是 M 到 N"内"的映射.

如果对于 M 中任意两个互异的元素 x_1 与 x_2，它们的象 $y_1 = f(x_1)$ 与 $y_2 = f(x_2)$ 也各异，则 f 称为单射. 既是满射又是单射的映射 $f: M \to N$ 就叫做双射，或者称 M 与 N 之间的一一对应.

现在我们建立映射的基本性质.

定理 1　两个集的和的原象等于它们的原象的和：

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

证明　设元素 x 属于集 $f^{-1}(A \cup B)$. 这意味着 $f(x) \in A \cup B$，即 $f(x) \in A$ 或 $f(x) \in B$. 于是，x 至少属于集 $f^{-1}(A)$ 或 $f^{-1}(B)$ 之一，即 $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. 反之，如果 $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$，那么 x 至少属于集 $f^{-1}(A)$ 或 $f^{-1}(B)$ 中的一个，即 $f(x)$ 至少属于集 A 或 B 中之一. 因而 $f(x) \in A \cup B$. 于是 $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

定理 2　两个集的交的原象等于它们的原象的交：

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

证明　如果 $x \in f^{-1}(A \cap B)$，那么 $f(x) \in A \cap B$，即 $f(x) \in A$ 且 $f(x) \in B$. 因此，$x \in f^{-1}(A)$ 且 $x \in f^{-1}(B)$，即 $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

反之，如果 $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$，即 $x \in f^{-1}(A)$ 且 $x \in f^{-1}(B)$，那么 $f(x) \in A$ 且 $f(x) \in B$. 换句话说，$f(x) \in A \cap B$. 于是 $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

定理 3 两个集的和的象等于它们的象的和:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

证明 如果 $y \in f(A \cup B)$,那么这意味着 $y = f(x)$,而 x 至少属于集 A 或 B 中之一.于是 $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$.反之,如果 $y \in f(A) \cup f(B)$,那么 $y = f(x)$,而 x 至少属于集 A 或 B 中之一,即 $x \in A \cup B$.从而,$y = f(x) \in f(A \cup B)$.

定理 1、定理 2 与定理 3 对任意(有限或无限)个集的和与交仍然成立,对于下面的定理也是如此.

注意,两个集的交的象一般说来并不与它们的象的交重合.例如,假定所考虑的映射为平面在 x 轴上的射影.这时线段

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 0$$

与线段

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 1$$

不相交,但同时它们的象却重合在一起.

习题 证明:余集的原象等于原象的余集.对于余集的象,类似的命题是否也成立?

2. 分类.等价关系 在各种不同的问题中会碰到某些集被分成两两不相交的子集.例如,平面(看作点集)可以被分成平行于 x 轴的直线,三维空间可以被表为具有不同半径(从半径 $r = 0$ 开始)的同心球面之并,某城市的居民可以按他们出生的年份来分组,等等.

每当我们以某种方法把某集 M 表为两两不相交子集之和时,则说对集 M 作了分类.

通常我们看到的分类都是与某一准则为依据而作出的,按照这个准则把集 M 的元素归并到各个类中.例如,平面上一切三角形的集可以分成互相全等的三角形类或面积相等的三角形类;x 的一切函数可以这样分类:把在给定点处取得同一值的函数归入同一类,等等.

对集的元素进行分类的准则可以是多种多样的,但这一切准则并不是可以完全任意的.例如,假定我们要对一切实数进行如下的分类:当且仅当 $b > a$ 时,我们便把数 b 与数 a 都列入同一类.显然,用这种方法不可能得到实数的任何分类.因为如果 $b > a$,即如果把 b 列入 a 所在的同一类中,那么,$a < b$,即数 a 不能属于 b 所在的同一类中.此外,因为 a 不比 a 本身大,那么 a 就不应当列入本身所在的同一类中!再看另一个例子,我们试一试对平面上的点如此分类,即当且仅当两点之间的距离小于 1 时就把这两点归为一类.显然,这种分类也不行.因为如果从 a 到 b 的距离小于 1 且从 b 到 c 的距离小于 1,那么这并不完全意味着从 a 到 c 的距离就小于 1.由此可见,我们把 a 与 b 列为同一类,把 b 与 c 列为同一类,这样在同一类中可能出现这样的两点,它们之间的距离大于 1.

上面援引的例子说明,仅当某一准则具备一定的条件下,它才可以确实对某集的元素进行分类.

设 M 是某一个集,假定该集元素的一些偶(a,b)是有“标志的”[①]. 如果(a,b)是“标志的”的偶,那么我们就说元素 a 按关系 φ 与元素 b 联系起来,并用符号 $a \underset{\varphi}{\sim} b$ 记这个关系. 例如,如果所指的关系是对三角形按等面积进行分类,那么 $a \underset{\varphi}{\sim} b$ 意味着“三角形 a 与三角形 b 具有相等的面积”. 如果给定关系 φ 具有下列性质:

(1) 自反性:对任何元素 $a \in M$,均有 $a \underset{\varphi}{\sim} a$,

(2) 对称性:如果 $a \underset{\varphi}{\sim} b$,则 $b \underset{\varphi}{\sim} a$,

(3) 传递性:如果 $a \underset{\varphi}{\sim} b$ 且 $b \underset{\varphi}{\sim} c$,则 $a \underset{\varphi}{\sim} c$,

那么关系 φ 称为等价关系.

上述性质是使得关系 φ(准则!)可以对集 M 进行分类的充要条件. 实际上,对给定集的任一分类,它就确定了该集元素之间的某一等价关系. 事实上,如果 $a \underset{\varphi}{\sim} b$ 意味着“a 与 b 同属于一个类中”,那么不难验证关系 φ 是自反、对称以及传递的.

反之,设 φ 是集 M 元素之间的某一等价关系,K_a 是由 M 中元素 x 组成的类,这个元素 x 等价于给定的元素 a,即 $x \underset{\varphi}{\sim} a$. 根据自反性性质,元素 a 本身属于 K_a. 下面我们来证明,类 K_a 与 K_b 或者重合,或者不相交. 设某一元素 c 同时属于 K_a 与 K_b,即 $c \underset{\varphi}{\sim} a$ 且 $c \underset{\varphi}{\sim} b$. 这时根据对称性 $a \underset{\varphi}{\sim} c$,再根据传递性

$$a \underset{\varphi}{\sim} b. \tag{1}$$

现设 x 为 K_a 中的任一元素,即 $x \underset{\varphi}{\sim} a$,那么由(1)及传递性性质可得 $x \underset{\varphi}{\sim} b$,即 $x \in K_b$.

同样可证,任一元素 $y \in K_b$ 属于 K_a. 这样一来,至少有一公共元素的两个类 K_a 与 K_b 互相重合. 于是,我们得到集 M 按给定的等价关系的分类.

集的分类概念与上段所说的映射概念有着密切联系.

设 f 是集 A 到集 B 内的映射. 我们把 A 中在 B 有相同象的所有这样的元素组成一类. 显然,我们得到集 A 的某一分类. 反之,我们考察任一集 A 及其某一分类. 设 B 是 A 的某一分类的那些类组成的集合. 我们使每一个元素 $a \in A$ 与它所属的那一类(即 B 的元素)相对应,这样我们便得到集 A 到集 B 上的映射.

例 1 研究 xy 平面到 x 轴上的射影. x 轴上点的原象是铅垂线. 这时,把平面分成平行线就相当于平面到 x 轴上的映射.

例 2 考察三维空间所有点的分类. 我们把与坐标原点等距的点组成一类,这乃是某一半径的球面. 显见,所有这些类的总和可以跟位于射线$[0,\infty)$上的一切点的集对应起来. 于是,把三维空间分成同心球面就相当于这个空间到半直线上的映射.

例 3 把具有相同小数部分的一切实数组成一类,这个分类就相当于直线到单位圆上的映射.

---

① 这里的元素 a 与 b 是按确定的次序来取的,即(a,b)与(b,a)一般说来是不同的两个偶.

等价概念是二元关系这个更为一般的概念的特殊情形. 设 M 表示任一集,我们以 $M\times M$ 或 M^2 表示一切有序偶(a,b)的集合,其中,$a,b\in M$. 如果在 M^2 中可以选出任一子集 R_φ,则说在 M 中给出了一个二元关系 φ. 确切地说,元素 a 在关系 φ 下可以找到元素 b(记作 $a\varphi b$)的充要条件为偶(a,b)属于 R_φ. 恒等关系 ε 就可以作为二元关系的例子,即 $a\varepsilon b$ 的充要条件为 $a=b$. 换句话说,这是在 $M\times M$ 中由对角线 Δ 给出的关系,即由形如这样的偶(a,a)给出的子集. 显然,满足下述条件的某集 M 的任一等价关系 φ 都是二元关系:

1) 对角线 Δ 属于 R_φ(自反性);

2) 如果$(a,b)\in R_\varphi$,那么$(b,a)\in R_\varphi$(对称性);

3) 如果$(a,b)\in R_\varphi$ 与$(b,c)\in R_\varphi$,那么$(a,c)\in R_\varphi$(传递性).

于是,等价关系就是满足自反、对称与传递条件的二元关系. 在 §4 中我们还要研究二元关系的另一重要特殊情形——偏序性.

§3. 集的对等性. 集的势的概念

1. 有限集与无限集 在考察各种集的时候,我们发现,有时可能在给定集中,如果不能确实说出其中元素的个数,那么至少可以约略地指出它们的个数. 例如,某一多边形一切顶点的集,不超过指定数的一切素数的集,地球上一切水分子的集,等等. 上述每一个集都包含有限个元素,虽然可能不知道其元素的数目. 另一方面,存在由无限多个元素组成的集. 例如,一切自然数集,直线上的一切点的集,平面上一切圆的集,一切有理系数多项式的集,等等. 这时,我们说一个集是无限的,指的是从这个集里可以取出一个元素,两个元素,等等,并且在这样的每一步之后,集里总还剩有元素.

对于两个有限集,我们可以根据它们元素个数是相同的,或是其中一个集比另一个集的元素多来进行比较判断. 试问,对于无限集是否也能用类似的方法进行比较呢? 换句话说,下面所说的哪个集的元素多的问题是否有意义? 例如,平面上的圆多还是直线上的有理点多,在区间[0,1]上定义的函数多还是空间中的直线多,等等.

现在看如何比较两个有限集. 例如,我们可以数一数每一个集元素的个数. 这样,我们就对这两个集进行了比较. 但有时也可以这样比较,即在两集之间建立双射. 也就是说,在两集元素之间建立一一对应的关系. 换句话说,这种对应使得一个集的任一元素有另一集的一个且仅有一个元素对应;反之亦然. 显然,两有限集之间可以建立一一对应的充要条件为这两集的元素的个数相等. 例如,为了查对班上的大学生与教室里的椅子数两者是否一致,我们既可以不必去查点人数,也可以不必去数椅子数,只要让每一个学生坐在指定的椅子上就可以了. 如果所有的学生都有座位而任何一个椅子也不空缺,即如果这两集之间建立了双射,那么这就意味着两

集元素的个数是相等的.

现在看到,第一种方法(计算元素个数的方法)只适用于有限集的比较,那么第二种方法(建立一一对应的方法)对无限集也是适用的.

2. 可数集 在无限集当中,最简单的是自然数集. 如果任一集的元素可以与一切自然数建立双射,则这样的集叫做可数集. 换句话说,可数集是这样的集,其元素可以编号而排成无限序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$. 下面举一些可数集的例子.

例 1 整数集. 一切整数与一切自然数之间可按下面排列建立一一对应:

$$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \cdots, \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots. \end{matrix}$$

一般说来,非负数 $n \geqslant 0$ 与奇数 $2n+1$ 可建立一一对应;而负数 $n<0$ 与偶数 $2|n|$ 可建立一一对应,即

$$n \longleftrightarrow 2n+1 \quad 当 n \geqslant 0 时,$$
$$n \longleftrightarrow 2|n| \quad 当 n < 0 时.$$

例 2 正偶数集.

$$n \longleftrightarrow 2n$$

显然是一一对应的.

例 3 数 2 的幂集 $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$. 这里的一一对应也是很明显的,只要对每一数 n 与数 2^n 建立对应.

例 4 考察一个较复杂的例子,即证明有理数集是可数的. 每个有理数均可唯一地写成形如 $\alpha = p/q\,(q>0)$ 的既约分数,我们称和数 $|p|+q$ 为有理数 α 的高度. 显然,给定高度为 n 的分数的个数是有限的. 例如,高度为 1 的分数只有 0/1,高度为 2 的分数是 1/1 及 $-1/1$,高度为 3 的分数是 2/1, 1/2, $-2/1$ 及 $-1/2$,等等. 我们将一切有理数按递增的高度进行编号,即首先写出高度为 1 的分数,然后写出高度为 2 的分数,等等. 这时,对任一有理数都获得某一编号,即一切自然数与一切有理数之间建立了一一对应关系.

我们把不是可数的无限集称为不可数集.

下面证明可数集的某些一般性质.

性质 1 可数集的任一子集是有限的或可数的.

证明 设 A 是可数集,而 B 是它的子集. 现对集 A 的元素进行编号:$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$. 在这些元素中,假设 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots$ 是含于 B 的元素. 如果在数 $n_1, n_2, \cdots$ 中有最大的数,那么 B 是有限的. 如果在数 $n_1, n_2, \cdots$ 中没有最大的数,那么 B 是可数的,因为它的元素 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots$ 可以用数 $1, 2, \cdots$ 进行编号.

性质 2 任何有限个或可数个可数集的和仍是可数集.

证明 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是可数集. 我们可以认为,它们两两不相交. 因为不然的话,我们考虑用 $A_1, A_2 \backslash A_1, A_3 \backslash (A_1 \cup A_2), \cdots$(其中每一个集至多是可数的)来代替它们,而且这些集与集 $A_1, A_2, \cdots$ 具有相同的和. 下面我们可以把集 $A_1, A_2, \cdots$ 的一切元素写

成如下的无限表形式：

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\
\multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.}
\end{array}$$

这里，集 A_1 的元素位于第一行，集 A_2 的元素位于第二行，等等. 现在把所有这些元素"按对角线"编号，即取 a_{11} 为第一个元素，取 a_{12} 为第二个元素，取 a_{21} 为第三个元素，等等，如下表箭号所指出那样的顺序选取：

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14} & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & \cdots \\
& \swarrow & & & & & & & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & \cdots \\
\multicolumn{9}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.}
\end{array}$$

显然，这时每一集的每一元素都获得确定的编号，即一切自然数与一切集 $A_1, A_2, \cdots$ 的一切元素之间建立了一一对应关系. 论断证毕.

习题 1 证明有理系数的一切多项式的集是可数的.

习题 2 如果数 ξ 是某一有理系数多项式的根，则 ξ 叫做代数数. 证明：一切代数数的集是可数的.

习题 3 证明：直线上一切有理开区间（即有理端点的开区间）的集是可数的.

习题 4 证明：平面上一切有理坐标的点的集是可数的.

提示 利用性质 2.

性质 3 任一无限集都包含可数子集.

证明 设 M 是无限集. 在 M 中任取一元素 a_1，由于 M 是无限的，所以可在 M 中找到异于 a_1 的元素 a_2，然后又可在 M 中找到既异于 a_1 又异于 a_2 的元素 a_3，等等. 继续这一过程（因为 M 是无限的，这一过程不会由于元素的"不足"而中断），我们便得到集 M 的可数子集

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

命题证毕.

这个命题表明，在无限集当中，可数集是"最小的". 下面我们来讨论是否存在不可数的无限集.

3. 集的对等性 从上面的讨论看到，将某些无限集与自然数列进行比较时，我

们就得到可数集的概念. 显然,任一集不仅可以和自然数集作比较,而且任何两个集之间也可以通过建立一一对应(双射)进行比较. 引入下列定义.

定义　如果集 M 与 N 的元素之间可以建立一一对应,则称 M 与 N 是对等的,记作 $M \sim N$.

对等的概念可以应用到不论是有限集或是无限集的任何集上. 两个有限集相互对等的充要条件是它们的元素的个数相等. 可数集的定义现在可以用下面的方式来叙述:如果某集对等于自然数集,则这个集就称为可数的. 显然,对等于第三个集的两个集是相互对等的;特别,任何两个可数集相互对等.

例 1　任何两个闭区间 $[a,b]$ 与 $[c,d]$ 上的点集相互对等. 由图 5 显然可见,它们之间可以建立双射. 也就是说,如果点 p 与 q 是辅助线段 ef 上同一点 r 的射影,那么这两点就相互对应.

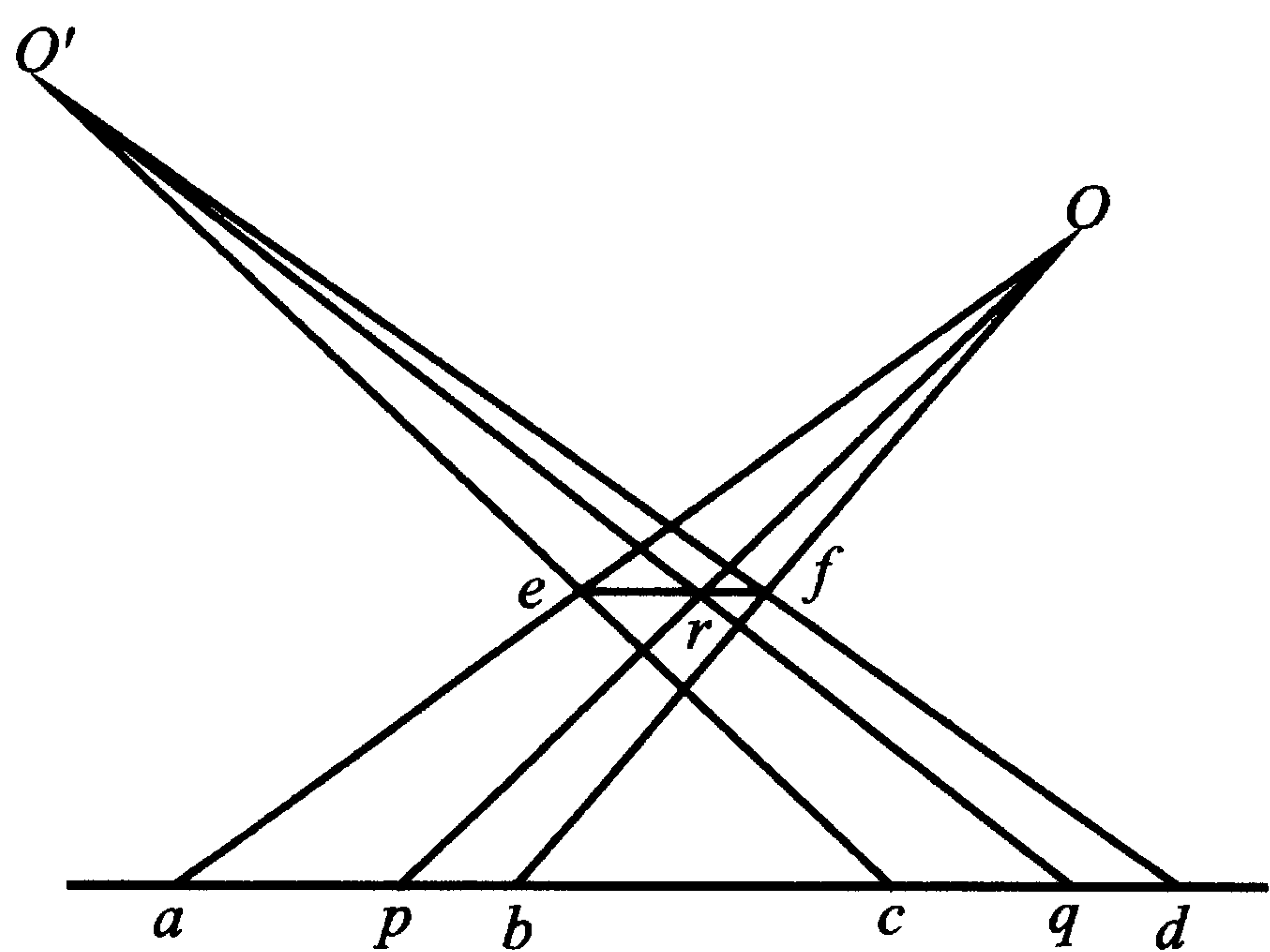


图　5

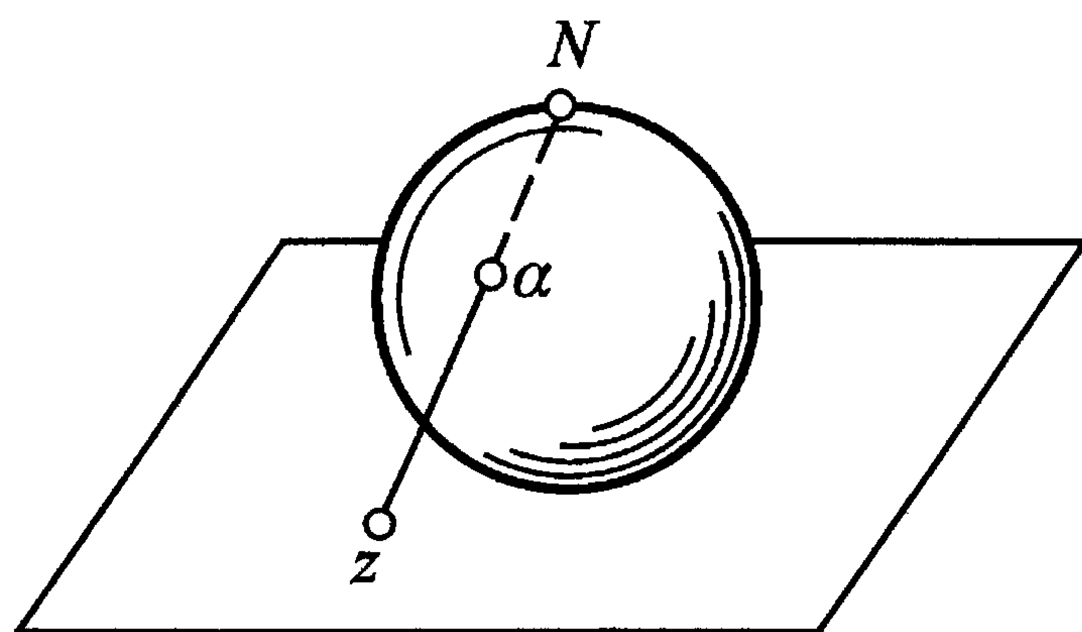


图　6

例 2　扩充复平面上一切点的集对等于球面上的一切点的集. 例如我们可以利用测地投影法建立双射 $\alpha \longleftrightarrow z$(图 6).

例 3　开区间 $(0,1)$ 内一切数的集对等于直线上一切点的集. 例如我们可以借助于函数

$$y = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$$

建立一一对应.

通过上面与第 2 段所举的例子使我们看到,有时无限集竟对等于它的真子集. 例如,自然数竟像一切整数或甚至一切有理数那样"一样"多,开区间 $(0,1)$ 上的点与全直线上的点"一样"多,等等. 这是无限集的特征. 事实上,在第 2 段中(性质 3)我们已经证明,从任一无限集 M 都可选出可数子集,设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 就是这样的子集.

下面我们把 A 分成两个可数子集

$$A_1 = \{a_1, a_3, a_5, \cdots\} \quad 与 \quad A_2 = \{a_2, a_4, a_6, \cdots\},$$

并建立 A 与 A_1 之间的一一对应. 然后可以将这个对应延拓到集 $A \cup (M \setminus A) = M$ 与

$A_1 \cup (M\backslash A) = M\backslash A_2$ 之间的一一对应,而这只要对 $M\backslash A$ 中的每一个元素与该元素本身对应就可以了. 集 $M\backslash A_2$ 与 M 不重合,即 $M\backslash A_2$ 是 M 的真子集. 这样,我们得到下述命题:

任一无限集对等于其某一真子集.

这个性质可以作为无限集的定义.

习题 证明:如果 M 是任一无限集而 A 可数,那么

$$M \sim M \cup A.$$

4. 实数集的不可数性 在第2段中我们给出了可数集的例子,像这样的例子还可以继续举出. 此外,在那里我们还证明了有限个或可数个可数集的和仍是可数集.

于是自然会提出这样的问题:是否存在一般的不可数集? 下面的定理对此作了肯定的回答.

定理1 含于0与1之间的实数集是不可数的.

证明 假定给出位于闭区间$[0,1]$上实数 α 的(所有的或者只有一些)某一可数集:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = 0.\, a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots, \\ \alpha_2 = 0.\, a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots, \\ \alpha_3 = 0.\, a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n = 0.\, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{1}$$

这里 a_{ik} 是数 α_i 第 k 位小数的数字. 下面我们按康托尔(Cantor)对角线程序构造小数

$$\beta = 0.\, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots.$$

也就是说,我们取与 a_{11} 不同的任意数字作为 b_1,取与 a_{22} 不同的任意数字作为 b_2,等等,一般地,取与 a_{nn} 不同的任意数字作为 b_n. 这个十进位小数显然不可能与表(1)所包含的任一小数相等. 事实上,小数 β 至少与 α_1 的第一位的数字相异,也与 α_2 的第二位的数字不同,等等. 一般说来,因为对所有的 n 都有 $b_n \neq a_{nn}$,所以小数 β 异于包含在表(1)中的任一小数 α_i. 于是,位于闭区间$[0,1]$上的任一可数实数集都不能填满该区间.

上面的证明包含不大的"错觉". 这就是说有某些数(即形如 $p/10^q$ 的数)可以用两种方式写成十进位小数的形式,亦即可以写成具有无限个0或无限个9的形式. 例如,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.500\,0\cdots = 0.499\,9\cdots$$

于是,两个十进位小数不一样还不能说这两个数相异.

但是,如果构造小数 β 注意使得它既不含 0 也不含 9. 例如,可以这样规定:当 $a_{nn}=1$ 时,令 $b_n=2$;当 $a_{nn}\neq 1$ 时,令 $b_n=1$. 那么定理的证明就完全可以避免上面所谈到的问题.

习题　证明:具有两种不同十进展开式的数构成可数集.

于是,闭区间[0,1]给出了不可数集的例. 下面我们再举出几个对等于闭区间[0,1]的集的例子.

例 1　任何闭区间$[a,b]$或开区间(a,b)的一切点的集.

例 2　直线上一切点的集.

例 3　平面、空间、球面上一切点的集,位于球内的点的集,等等.

例 4　平面上一切直线的集.

例 5　一切单变量或多变量连续函数的集.

对于例 1 与例 2,证明不难(参看第 3 段例 1 与例 3),其他各例直接证明就相当复杂.

习题　利用本段及第 2 段习题 2 的结果,证明超越数(即不是代数数的数)的存在.

5. 康托尔 – 伯恩斯坦(Cantor-Bernstein)定理　下述定理是集论中的一个基本定理.

定理 2(康托尔 – 伯恩斯坦)　设 A 与 B 为两个任意集. 如果存在集 A 到集 B 的子集 B_1 上一一映射 f 及集 B 到集 A 的子集 A_1 上的一一映射 g,那么 A 与 B 对等.

证明　不失一般性,可以认为 A 与 B 不相交. 设 x 是 A 中的任一元素. 令 $x=x_0$,并用下面的方法定义元素序列$\{x_n\}$. 设元素 x_n 已经确定. 于是,当 n 为偶数时,就取满足条件 $g(x_{n+1})=x_n$ 的 B 中元素作为 x_{n+1}(如果这样的元素存在的话);而当 n 为奇数时,则取满足条件 $f(x_{n+1})=x_n$ 的 A 中元素作为 x_{n+1}(如果它存在的话). 于是,有两种情况可能出现:

1°　对于某一个 n,满足上述条件的元素 x_{n+1} 不存在. 这样的数 n 叫做元素 x 的阶.

2°　序列$\{x_n\}$是无限的①. 这时 x 称为无限阶的元素.

现在把 A 分成三类集:由偶数阶元素组成的集 A_E,由奇数阶元素组成的集 A_O 及由一切无限阶元素组成的集 A_I. 对于集 B 也用类似的方法分成三类集. 我们看到,f 映 A_E 到 B_O 上以及映 A_I 到 B_I 上,而 g^{-1} 映 A_O 到 B_E 上. 于是与 f 在 $A_E\cup A_I$ 上重合以及与 g^{-1} 在 A_O 上重合的一一映射 ψ 是全 A 到全 B 上的一一映射.

6. 集的势的概念　如果两有限集对等,那么它们元素的个数相同. 如果任一集 N 与集 M 相互对等,则说 M 与 N 具有同一的势. 由此可见,势就是任何两个相互对等集共有的内在属性. 对于有限集来说,势的概念与集的元素个数的习惯说法一致. 自然数集(即任何可数集)的势用符号 $\aleph_0$(读作"阿列夫零")来表示. 如果某集对等于闭区间[0,1]上所有实数集,则称该集具有连续统的势. 这个势以符号 c(或符号

---

① 这时不同元素 x_n 的个数也可能是有限的:它们可以"循环"形成仅包含有限个两两不同元素的无限序列.

$\aleph$)记之.

在下面§4中,我们将要讨论关于在$\aleph_0$与c当中是否存在势这个极为深刻的问题. 通常在分析学中讨论的无限集,或者是可数的,或者是具有连续统的势的集.

对于有限集的势,即对于自然数除了有相等的概念外,还有"大于"和"小于"的概念. 我们试图把后面两个概念推广到无限集中去.

设A与B是两个任意集,而$m(A)$与$m(B)$表示它们的势. 于是,逻辑上可能有下述四种情况:

情况1 A对等于集B的某一子集,而B对等于集A的某一子集;

情况2 A包含与B对等的某一子集,而在B中没有与A对等的子集;

情况3 B包含与A对等的某一子集,但在A中没有与B对等的子集;

情况4 两集中的任一集都没有与另一集对等的子集.

在第一种情形,根据康托尔-伯恩斯坦定理,集A与集B相互对等,即$m(A)=m(B)$. 在第二种情形自然认为$m(A)>m(B)$. 而在第三种情形$m(A)<m(B)$. 最后第四种情形,我们应当认为集A与集B的势不能相互比较,但是这种情形事实上也是不可能的. 这可从§4中所谈到的策梅洛(Zermelo)定理推出.

于是,任何两个集A与B或者相互对等(这时,$m(A)=m(B)$),或者满足两个关系中的一个:$m(A)<m(B)$或$m(A)>m(B)$.

上面我们曾经指出,可数集是"最小的"无限集,而后又证明了存在具有更"高阶"无限性的无限集,也就是具有连续统的势的集. 然而,是否存在超过连续统的势的无限势? 更一般地说,是否存在某一"最大的"势? 下述定理给出了正确的回答.

定理3 设M是某一集,而$\mathfrak{M}$是以集M的一切可能的子集为元素组成的集. 这时$\mathfrak{M}$具有比原来集M更大的势.

证明 不难看出,集$\mathfrak{M}$的势$\mathfrak{m}$不可能小于原来集M的势m. 事实上,M中"一个元素"的子集构成$\mathfrak{M}$中的子集,它与集M对等. 剩下证明势$\mathfrak{m}$与m不一致. 假设集M的元素$a,b,\cdots$与集$\mathfrak{M}$的任一元素$A,B,\cdots$(即M中的任一子集)之间可以建立一一对应关系:

$$a\longleftrightarrow A, b\longleftrightarrow B, \cdots.$$

我们来证明,这个对应一定不能穷尽全$\mathfrak{M}$. 也就是说,我们作出集$X\subset M$,使得M中任一元素不与X对应. 设X是M中那些不属于与自己对应的子集的元素组成的集. 详细地说,如果$a\longleftrightarrow A$且$a\in A$,那么元素a不属于X,而如果$a\longleftrightarrow A$且$a\notin A$,那么元素a属于X. 显然X是M的子集,即它是$\mathfrak{M}$的某一元素. 现在我们证明M中任一元素不能与其子集X对应. 假定这样的元素$x\longleftrightarrow X$存在,我们看它是否属于X? 设$x\notin X$,但根据定义,X中任一元素都不属于它所对应的子集,因而元素x应当属于X. 反之,假定x属于X,我们却得到x不能属于X,因为X只包含不属于与自己对应的子集的那些元素. 于是,与子集X对应的元素x应当同时既属于X又不属于X. 由此可见,这样的元素一般不存在,即集M的元素与它的子集之间不能建立一一

对应的关系. 定理证毕.

于是,对于任一势,我们确实可以造出一个较大的势的集,然后造出更大的势的集,等等. 这样,所得到势的大小没有上界.

注 集 $\mathfrak{M}$ 的势记作 2^m,其中 m 是集 M 的势(把 M 考虑作有限的情形,读者就不难理解这个记号的意义). 这样,上面的定理就可以用不等式 $m<2^m$ 来表示. 特别当 $m=\aleph_0$ 时,就有不等式 $\aleph_0<2^{\aleph_0}$. 下面我们证明 $2^{\aleph_0}=\aleph$,即证明自然数列的一切子集所成的集的势等于连续统的势.

我们把自然数列的子集分成 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{G}$ 两类,其余集是无限的那些子集组成类 $\mathfrak{B}$,其余集是有限的那些子集组成类 $\mathfrak{G}$. 特别,自然数列本身属于类 $\mathfrak{G}$,因为它的余集是空集. 在类 $\mathfrak{G}$ 中,子集的个数是可数的(请读者证明之). 因此,它不影响集 $\mathfrak{M}=\mathfrak{B}\cup\mathfrak{G}$的势.

类 $\mathfrak{B}$ 的子集与半闭区间$[0,1)$的实数 α 之间可建立一一对应. 也就是说,子集 $A\in\mathfrak{B}$ 可以和二进位展开式的 $\alpha,0\leqslant\alpha<1$:

$$\alpha=\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon_n}{2^n}+\cdots,$$

建立一一对应,这里 $\varepsilon_n=1$ 或 0 视 n 属于或不属于集 A 而定. 详细证明请读者自行完成.

习题 证明:在某一集 M 上定义的一切数值函数(或在两个元素以上的集内取值的更一般函数)的总体具有比集 M 更大的势.

提示 利用下述事实:M 上的一切特征函数(只取 0 与 1 两个值的函数)的集对等于 M 的一切子集的集.

§4. 有序集. 超限数

本节我们讨论与有序集概念相关联的一系列概念. 这里仅限于研究最基本的内容,更详细的讨论可在书末列出的文献里找到.

1. 偏序集 设 M 是任一集而 φ 是 M 中的某一个二元关系(由某集 $R_\varphi\subset M\times M$ 确定的). 如果关系 φ 满足下列条件:

1) 自反性: $a\varphi a$,

2) 传递性: 如果 $a\varphi b$ 且 $b\varphi c$,那么 $a\varphi c$,

3) 反对称性: 如果 $a\varphi b$ 且 $b\varphi a$,那么 $a=b$,

则称关系 φ 是偏序的.

我们通常用符号$\leqslant$表示偏序性. 于是,记号 $a\leqslant b$ 表示偶(a,b)属于对应的集 R_φ. 这时,对于元素 a 我们说它不超过 b 或从属于 b. 在其中给出某一偏序的集叫做偏序集.

下面举一些偏序集的例子.

例 1 如果当且仅当 $a=b$ 时令 $a\leqslant b$，那么任一集都可按通常的方式看作偏序的. 换句话说，总可以把二元恒等关系 ε 作为偏序性. 当然，这个例子不会引起很大的兴趣.

例 2 设 M 是闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上一切连续函数的集. 如果当且仅当对一切 $t,\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $f(t)\leqslant g(t)$ 时令 $f\leqslant g$. 显然，我们得到 M 的偏序性.

例 3 某一指定集的一切子集的集合按下述包含关系是偏序的：$M_1\leqslant M_2$ 意味着 $M_1\subset M_2$.

例 4 如果 $a\leqslant b$ 表示"b 被 a 整除"，那么一切自然数集是偏序的.

设 M 是任意偏序集. 当 $a\leqslant b$ 且 $a\neq b$ 时，我们利用符号 $<$ 并记作 $a<b$，且说 a 小于 b 或 a 严格从属于 b. 和记号 $a\leqslant b$ 一样，我们利用等价记号 $b\geqslant a$ 同时并说 b 不小于 a（大于 a，如果 $b\neq a$）或 b 在 a 的后面. 如果由 $a\leqslant b$ 推出 $b=a$，则 a 称为极大元. 如果由 $c\leqslant a$ 推出 $c=a$，则 a 称为极小元.

对于偏序集的任意两点 a,b，可以找到它们后面的点 $c(a\leqslant c,b\leqslant c)$，此集就称为有向的.

2. 保序映射 设 M 与 M' 是两偏序集，f 是 M 到 M' 内的映射. 如果 $a\leqslant b(a,b\in M)$ 推出 $f(a)\leqslant f(b)$（在 M' 中），则称映射 f 是保序的. 如果映射 f 是双射，而关系 $f(a)\leqslant f(b)$ 当且仅当 $a\leqslant b$ 时才成立，则 f 称为偏序集 M 与 M' 的同构映射. 这时，集 M 与 M' 本身叫做相互同构的.

例如，设 M 是按"整除"（参看第 1 段例 4）给出偏序的自然数集，而 M' 也是自然数集，但它按自然方式赋序，即当 $b-a$ 是正数时，$b\geqslant a$. 这时，对于每一个数 n 与它本身对应的 M 到 M' 上的映射是保序的（但不是同构）.

偏序集之间的同构关系显然是等价关系（它满足对称性、传递性和自反性）. 因此，如果存在任意一组[①]偏序集，那么所有这些集可以分成相互同构的类. 显然，如果我们关心的不是集元素的本性而是集的偏序性，那么两个相互同构的偏序集可以简单地看作一样的.

3. 序型. 有序集 对于相互同构的偏序集，则说它们具有同一的序型. 于是，序型就是任何两个相互同构偏序集的公共内在属性，如同势是相互对等集的公共内在属性一样（所研究的对等集不依赖于它们的序关系）.

设 a 与 b 是偏序集的元素，可能出现，关系 $a\leqslant b$ 与 $b\leqslant a$ 中任何一个都不成立. 在这种情况下，元素 a 与 b 叫做不可比较的. 由此可见，序关系仅对一些元素偶有定义，因此才把它叫做偏序性. 如果在偏序集 M 中没有不可比较的元素，那么集 M 叫做有序的（线性有序的，全有序的）. 于是，如果 M 是偏序集，且对于任何两个不同的元素 $a,b\in M$，一定有 $a<b$ 或 $b<a$，那么集 M 是有序的.

显然，有序集的任一子集仍是有序集.

---

① 我们不用像"所有偏序集"那样的概念，因为这种概念与"所有集的集"的概念类似. 实际上，这种内在矛盾的概念是不能属于精确数学概念之中的.

在第 1 段的例 1 至例 4 中所指的集仅是偏序集. 自然数集，有理数集，闭区间 $[0,1]$ 上的实数集等（在这些集中，它们都具有“大于”和“小于”的自然关系）都可以作为线性有序集最简单的例子.

因为有序性是偏序性的特殊情形，所以可把保序的映射概念，特别是同构的概念，应用到有序集中去. 因此可以谈论有序集的序型. 集的元素之间具有自然序关系的自然数列 $1,2,3,\cdots$ 乃是无限有序集最简单的例. 它的序型通常用符号 ω 记之.

如果两个偏序集相互同构，那么它们当然具有同一的势（同构必是双射），因此可以谈论与已知序型相当的势（例如序型 ω 相当势 $\aleph_0$）. 但反之不真，因为已知势的集一般说来可以用各种不同的方式赋序. 只有有限的线性有序集的序型才可以用它的元素的个数 n 来唯一确定，其中集的元素也用同一记号 n 记之. 例如，对于可数的自然数集，除了它的“自然”序型 ω 外，这样的序型：

$$1,3,5,\cdots,2,4,6,\cdots$$

是可能的，即任一偶数都在任何奇数之后，而奇数与偶数彼此之间都按递增顺序排列. 可以证明，与势 $\aleph_0$ 相当的各种序型的个数是无限的甚至是不可数的.

4. 有序集的有序和 设 M_1 与 M_2 是序型为 θ_1 与 θ_2 的两个不相交的有序集. 在集 M_1 与 M_2 的并 $M_1 \cup M_2$ 中可以引进序，其中认为 M_1 的两个元素如同在 M_1 中一样有序，M_2 的元素如同在 M_2 中一样有序，并且 M_1 的任一元素前于 M_2 的任一元素（请验证，这的确是一线性有序集！）. 我们把这样的有序集称为集 M_1 与 M_2 的有序和，并记作 M_1+M_2. 特别注意，这里加项的次序是重要的，一般说来，和 M_1+M_2 与和 M_2+M_1 不同构. 我们把和 M_1+M_2 的序型称为序型 θ_1 与 θ_2 的有序和，并记作 $\theta_1+\theta_2$.

这个定义不难推广到任意有限个加项 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$.

例 考察序型 ω 与 n. 容易看出，$n+\omega=\omega$. 事实上，如果在自然数列 $1,2,3,\cdots,k,\cdots$ 的左边添加上有限项，那么我们便得到同一序型 ω. 同时序型 $\omega+n$ 就是集 $1,2,3,\cdots,k,\cdots,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的序型，它显然不等于 ω.

5. 良序集. 超限数 上面我们引进了偏序性与有序性概念，这里再引进较为狭窄但更为重要的完全有序性概念.

定义 如果有序集的任一非空子集都含有最小的（即前于该子集所有元素的）元素，则称它为良序集.

如果有序集是有限的，那么它显然就是良序集. 闭区间 $[0,1]$ 可以看作有序集，但不是良序集的例子. 这个集本身包含有最小元素，即数 0，但它的由正数组成的子集不包含有最小元素.

显然，良序集的任何（非空）子集仍是良序集.

我们称良序集的序型为序数（当强调讨论的是无限集时，我们就称之为超限序数或简称超限数）.

自然数列（具有自然序关系）不仅是有序集，而且也是良序集. 这样，它的序型 ω

是序数(超限的!). $\omega+k$ 即集型

$$1,2,\cdots,n,\cdots,a_1,a_2,\cdots,a_k$$

也是序数.

相反,集

$$\cdots,\ -n,\cdots,\ -3,\ -2,\ -1 \tag{1}$$

是有序的,但它不是良序的. 这里,每一个非空子集皆有最大的元素(在所有元素最后的元素),但一般说来它没有最小元素(例如,在整个集(1)中就没有最小元素). 集(1)的序型(不是序数!)通常用 ω^* 记之.

我们来证明下面简单而重要的事实.

引理 1 有限个良序集的有序和仍是良序集.

事实上,设 M 是良序集的有序和 $M_1+M_2+\cdots+M_n$ 的任一子集,我们考察集 M_k 中包含 M 的元素的第一个集. 交 $M\cap M_k$ 为良序集 M_k 的子集,这表示交有首元素. 这个元素也是整个 M 的首元素.

推论 序数的有序和仍是序数.

于是,我们可以根据某一组序数构造出新的序数. 例如,根据自然数(即有限的序数)与序数 ω,可得到序数

$$\omega+n,\omega+\omega,\omega+\omega+n,\omega+\omega+\omega$$

等等. 读者不难构造出相当于这些超限数的良序集.

和序型的有序和一样,我们可以引进有序积. 设 M_1 与 M_2 是按型 θ_1 与 θ_2 赋序的集. 我们按 M_2 的每一元素来取集 M_1 的许多样品,并把这些样品代入集 M_2 的元素中. 这样得到的集称为 M_1 与 M_2 的有序积,并用符号 $M_1\cdot M_2$ 记之. $M_1\cdot M_2$ 形式上是由偶(a,b)构成的集,其中 $a\in M_1$, $b\in M_2$,同时当 $b_1<b_2$ 时$(a_1,b_1)<(a_2,b_2)$(对于任意的 a_1,a_2),且当 $a_1<a_2$ 时$(a_1,b)<(a_2,b)$.

类似地可定义任意有限个因子的有序积 $M_1\cdot M_2\cdot\cdots\cdot M_p$. 有序集的 $M_1\cdot M_2$ 的序型 θ 称为序型 θ_1 与 θ_2 的积:

$$\theta=\theta_1\cdot\theta_2.$$

有序积也和有序和一样是不可交换的.

引理 2 两个良序集的有序积仍是良序集.

证明 设 M 是积 $M_1\cdot M_2$ 的某一子集,集 M 是由偶(a,b)组成的集. 考察属于 M 中偶的一切第二个元素 b,它们构成 M_2 中某一子集. 由于 M_2 的完全有序性,这个子集有首元素,记它为 b_0. 再考察属于 M 中形如(a,b_0)的一切偶,它们的第一个元素 a 构成 M_1 中的某一子集. 由于 M_1 的完全有序性,这个子集有首元素,记它为 a_0. 这时,不难看出,偶(a_0,b_0)就是 M 的首元素.

推论 序数的有序积仍是序数.

例 不难看出,$\omega+\omega=\omega\cdot 2,\omega+\omega+\omega=\omega\cdot 3$. 根据序型 $\omega\cdot n,\omega^2,\omega^2\cdot n,\omega^3,\cdots,\omega^p,\cdots$也不难作出有序集. 所有这些集都具有可数势.

我们也可以定义序型的其他运算,例如,在上述序数中引进乘幂,比如说,$\omega^\omega,\omega^{\omega^\omega}$等等.

6. 序数的比较 如果 n_1 与 n_2 是两个有限序数,那么它们或者相等,或者其中一个比另一个大. 我们把这种序关系推广到超限序数. 为此引进以下概念. 线性有序

集 M 的任一元素 a 定义一始截段 P(由 $<a$ 的元素组成)及一剩余 Q(由 $\geqslant a$ 的元素组成).

设 α 与 β 是两个序数,而 M 与 N 分别为序型 α 与 β 的集. 如果 M 与 N 同构,则说 $\alpha=\beta$;如果集 M 与集 N 的任一始截段同构,则说 $\alpha<\beta$;反过来,如果集 N 与集 M 的任一始截段同构,则说 $\alpha>\beta$.

定理 1　任何两个序数 α 与 β 相互之间的关系:

$$\alpha=\beta,\alpha<\beta \text{ 或 } \alpha>\beta$$

有且仅有一个成立.

为证明此定理,我们首先证明下述引理.

引理 3　如果 f 是良序集 A 到它的某一子集 B 上的同构映射,那么对于一切 $\alpha\in A$ 有 $f(a)\geqslant a$.

事实上,如果存在这样一些元素 $\alpha\in A$ 使得 $f(a)<a$,那么在这些元素中间必有首元素(A 的完全有序性!). 设这个首元素为 a_0,并设 $b_0=f(a_0)$. 于是 $b_0<a_0$. 又因为 f 是同构映射,所以 $f(b_0)<f(a_0)=b_0$. 即 a_0 不是具有上述性质的元素中的首元素.

从这个引理还立即推出,良序集不能与自己的截段同构. 如果 A 同构于元素 a 所确定的截段,那么关系 $f(a)<a$ 成立. 因此关系 $\alpha=\beta$ 与 $\alpha<\beta$ 不能同时成立. 类似地,$\alpha=\beta$ 与 $\alpha>\beta$ 不能同时成立. 关系 $\alpha<\beta$ 与 $\alpha>\beta$ 也不能同时成立,因为不然的话,我们就得到 $\alpha<\alpha$(根据传递性!),这是不可能的. 于是,我们证明了关系 $\alpha\lesseqgtr\beta$ 的一个成立排斥其他两个关系. 现在证明这些关系之一恒成立,即任何两个序数总可比较.

首先对任一序数 α 构造集 $W(\alpha)$,把它作为 α 的"标准代表". 这也就是说把一切小于 α 的序数组成的集作为 $W(\alpha)$. $W(\alpha)$ 中的一切数是可以相互比较的,而集 $W(\alpha)$ 本身(按序数大小顺序)具有序型 α. 事实上,如果集

$$A=\{\cdots,a,\cdots,b,\cdots\}$$

具有序型 α,则根据定义,小于 α 的序数与集 A 的始截段成一一对应,因而也与集 A 的元素成一一对应. 换句话说,序型为 α 的集,其元素可借助于小于 α 的序数进行编号:

$$A=\{a_0,a_1,\cdots,a_\lambda,\cdots\}.$$

现设 α 与 β 是两个序数,这时 $A=W(\alpha)$ 与 $B=W(\beta)$ 分别是序型 α 与 β 的集. 其次,设 $C=A\cap B$ 是集 A 与 B 的交,即同时小于 α 与 β 的序数的全体. 集 C 是良序的,记它的序型为 γ. 我们来证明 $\gamma\leqslant\alpha$. 事实上,如果 $C=A$,那么 $\gamma=\alpha$;如果 $C\neq A$,那么 C 是集 A 的截段,这时

$$\gamma<\alpha.$$

这是因为对于一切 $\xi\in C,\eta\in A\backslash C$ 的数 ξ 与 η 是可比较的,即 $\xi\leqslant\eta$. 但关系 $\eta<\xi<\alpha$ 是不可能成立的,否则这时 $\eta\in C$. 因此,$\xi<\eta$. 由此可见,C 是集 A 的截段,从而

$\gamma<\alpha$. 此外,γ 是集 $A\backslash C$ 的首元素. 所以

$$\gamma \leqslant \alpha.$$

类似地也有

$$\gamma \leqslant \beta.$$

同时,情况 $\gamma<\alpha,\gamma<\beta$ 是不可能成立的. 否则这时我们有 $\gamma \in A\backslash C,\gamma \in B\backslash C$,即一方面 $\gamma \notin C$,另一方面 $\gamma \in A\cap B=C$. 因而,只可能有下列情况:

$$\gamma = \alpha,\ \gamma = \beta,\ \alpha = \beta,$$
$$\gamma = \alpha,\ \gamma < \beta,\ \alpha < \beta,$$
$$\gamma < \alpha,\ \gamma = \beta,\ \alpha > \beta,$$

即 α 与 β 是可比较的,定理证毕.

每一个序数相当一个确定的势,而从序数的可比较性显然可推出相应的势的可比较性. 所以:

如果 A 与 B 是两个良序集,那么它们或者相互对等(等势),或者其中一个比另一个势大(即良序集不可能有不可比较的势).

我们研究相当于有限或可数势的一切序数的集,它们构成良序集. 不难验证,这个集甚至是不可数的. 事实上,按照通行符号的意义,我们记一切可数超限数的集的序型为 ω_1. 如果与它相当的势是可数的,那么具有 ω_1+1 序型的集也是可数的. 同时数 ω_1 显然应当在相当于有限或可数势的所有超限数后面.

我们把与超限序数 ω_1 相当的势记作 $\aleph_1$,不难看出,没有任一势 m 能满足下列不等式

$$\aleph_0 < m < \aleph_1.$$

事实上,如果这样的势 m 存在,那么在 ω_1 前面的一切超限序数的集 $W(\omega_1)$ 中,存在势 m 的子集. 这个子集是良序的且是不可数的. 但这时它的序型 α 在 ω_1 之前且同时应在所有可数超限数之后,这与 ω_1 的定义矛盾.

7. 选择公理. 策梅洛定理及与其等价的其他命题 良序集的势的可比较性提示了如下问题:任何一个集能否以某种方式形成一个良序集? 其中一个肯定的回答就是不可比较势一般不存在. 策梅洛证明了任一集都可以良序化以后回答了这个问题. 这个定理的证明(这里我们不准备重复它,请读者参见[2])主要依据下述的所谓选择公理.

设 A 是某一指标 α 的集,并设对于每一 α,给出了某任意集 M_α. 这时,选择公理断言,可以作出 A 上的函数 φ,使对于每个 $\alpha \in A$ 有相应的集 M_α 的某一元素 m_α 与之对应. 换句话说,也就是可以从每一 M_α 中,按照一个且只取一个元素得到某一个集.

我们讨论这种形式的集论,它来自于康托尔与策梅洛,就是"朴素"的集论. 在朴素集论范围内出现的选择公理也叫做策梅洛公理,它与其他问题一起,如连续统假设,即关于连续统的势与第一个不可数的势 $\aleph_1$ 一致的问题一起,引起众说纷纭. 从而导致数理逻辑与数学基础方面的一

系列著作,如哥德尔 - 伯奈斯(Gödel-Bernays)和策梅洛 - 弗兰克尔(Zermelo-Frankel)构造了集论的公理化系统. 在这一理论范围内建立了选择公理的无矛盾性与独立性. 我们介绍读者参阅以下专著:弗兰克尔(Frankel)与巴 - 希勒尔(Bar-Hillel)著的《集论基础》,《Мир》,1966;柯恩(Cohen)著的《集论与连续统假设》,《Мир》,1969. 注意,否认选择公理实质就妨碍集论的构造.

朴素集论的批判以及回避不用选择公理的尝试导致了如递归函数理论这样的著名理论的建立,以及如计数概念这样的概念的建立.

下面我们阐述与选择公理等价的某些命题(即如果接受选择公理,那么可以证明每一等价命题成立;反之,假定这些命题的任何一个的正确性,便可证明选择公理成立). 首先显然看到,策梅洛定理本身就是这样的命题. 事实上,如果假定任一集 M_α 是良序的,那么,为了构造选择公理断定其存在的函数 φ,只要在任一 M_α 中选取首元素即可.

为了阐述与选择公理等价的其他命题,我们引进下述概念. 设 M 是偏序集,A 是它的任一子集. 如果 A 中任何两个元素彼此可比较(在 M 中引进偏序的意义下),则 A 叫做链. 如果一个链不作为真子集包含在属于 M 的其他链中,则称此链为极大的. 其次,如果对于偏序集 M 的子集 $M' \subset M$ 的任何元素 a' 都从属于 $a \in M$,则称元素 a 为 M' 的上界.

豪斯多夫(Hausdorff)定理 偏序集中的任何一个链必包含在它的某一极大链中.

下述命题也许是选择公理的所有等价叙述中最方便的.

佐恩(Zorn)引理 如果偏序集 M 中任一链都有上界,那么 M 中任一元素从属于某一极大元.

这些命题(选择公理、策梅洛定理、豪斯多夫定理、佐恩引理)等价性的证明,例如可参阅库洛什(Курош)的《一般代数学讲义》,数学物理出版社,1962;还可参阅[8]. 在此我们就不重复了.

如果子集 A 的上界集有最小的元 a,则 a 称为子集 A 的上确界;类似地可定义下确界. 如果偏序集的任何非空有限子集都具有上确界与下确界,则称该集为格或结构.

8. 超限归纳法 证明某些命题的一种广泛普遍的方法是数学归纳法. 众所周知,它由以下的内容组成. 设存在对于任一自然数 n 作出的某一命题 $P(n)$,并设已知:

1) 命题 $P(1)$ 正确;

2) 由对于一切 $k \leqslant n$,$P(k)$ 正确,推出 $P(n+1)$ 也正确.

这时命题 $P(n)$ 对于一切 $n=1,2,\cdots$ 都正确. 事实上,如果不然的话,在那些使得 $P(n)$ 不真的 n 中可以找到最小数,比如说 n_1. 显然 $n_1>1$,即 n_1-1 也是自然数. 从而,我们得到与条件 2)相矛盾的结果.

类似的方法可应用于代替自然数列的任何良序集. 在这种情况下,称它为超限归纳法. 这样,超限归纳法包含以下内容. 设给定某一良序集 A(如果需要的话,可以

把它看作小于某一给定超限数的所有超限数的集)，并设对于每一个 $a \in A$ 作出的某命题 $P(a)$，使得 $P(a)$ 对于 A 的首元素为真，而且如果 $P(a)$ 对于 a 前面的一切元素都真，推出对于 a 也真. 于是 $P(a)$ 对一切 $a \in A$ 都真. 事实上，如果存在 A 中的元素，使得 $P(a)$ 不真，那么在这些元素的集中可以找到首元素，比如说 a^*，从而我们得到矛盾，因为对于一切 $a < a^*$ 命题 $P(a)$ 为真.

因为根据策梅洛定理，任一集都可良序化，所以超限归纳法原则上可以应用于任何集. 但用佐恩引理代替超限归纳法实际往往是方便的，因在所考虑的集中，它只要求偏序性的存在. 而在要求应用佐恩引理的问题中，被研究的对象的某一偏序性“本身”通常就以自然的方式出现.

§5. 集族①

1. 集环　其元素本身是某些集的任何集称为集族. 如果没有相反的说明，我们将研究这样的集族，即它的任一元素是某固定集 X 的子集. 我们将用大写哥特字母表示集族. 对我们来说，主要感兴趣的是(关于 §1 中所引进的运算)满足某些确定封闭性条件的集族.

定义 1　设 $\mathfrak{R}$ 为非空集族. 如果它具有这样的性质：由 $A \in \mathfrak{R}$ 与 $B \in \mathfrak{R}$ 推出 $A \triangle B \in \mathfrak{R}$ 与 $A \cap B \in \mathfrak{R}$，则 $\mathfrak{R}$ 称为环.

因为对于任何 A 与 B 均有

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \quad 及 \quad A \setminus B = A \triangle (A \cap B),$$

所以由 $A \in \mathfrak{R}$ 与 $B \in \mathfrak{R}$ 可推出集 $A \cup B$ 与 $A \setminus B$ 也属于 $\mathfrak{R}$. 这样，集环关于取和与交，减法与对称差的运算是封闭的集族. 显然，环关于形如

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad D = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

的任何有限和与交的构造也是封闭的.

任何环都包含空集 $\varnothing$，因为 $A \setminus A = \varnothing$ 恒成立. 仅由空集组成的族乃是所有可能的最小集环.

设 $\mathfrak{S}$ 为集族. 如果 $E \in \mathfrak{S}$ 且对于任意 $A \in \mathfrak{S}$，等式

$$A \cap E = A$$

成立，则 E 叫做 $\mathfrak{S}$ 的单位.

于是，集族 $\mathfrak{S}$ 的单位是这个族的包含了 $\mathfrak{S}$ 中的一切其他集的最大集.

具有单位的集环称为集代数.

例 1　对于任何集 A，它的一切子集所成的族 $\mathfrak{M}(A)$ 乃是具有单位 $E = A$ 的集代

---

① 在第五章中，当叙述一般测度理论时，我们需要本节中所讨论的概念. 因此本节的内容可以推后学习. 当读者决定限于研究平面测度(第五章 §1)的测度理论时，这一节的内容可以完全不学.

数.

例 2　对于任何非空集 A，由 A 与空集 $\varnothing$ 组成的族 $\{\varnothing, A\}$ 构成具有单位 $E = A$ 的集代数.

例 3　任意集 A 的一切有限子集的族乃是集环，这个环是集代数当且仅当集 A 本身是有限集.

例 4　数轴上一切有界子集的族是不包含单位的集环.

从集环的定义直接推得

定理 1　任何集环的交 $\mathfrak{R} = \bigcap\limits_{\alpha} \mathfrak{R}_\alpha$ 仍是环.

我们建立下面简单但对今后重要的事实.

定理 2　对于任何非空集族 $\mathfrak{S}$ 存在一个且仅有一个环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$，它包含 $\mathfrak{S}$ 且属于包含 $\mathfrak{S}$ 的任何环 $\mathfrak{K}$ 中.

证明　不难看出，环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ 由族 $\mathfrak{S}$ 唯一确定. 为了证明它的存在性，我们考察属于 $\mathfrak{S}$ 的一切集 A 的并 $X = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{S}} A$，以及集 X 的一切子集组成的环 $\mathfrak{M}(X)$. 设 Σ 是属于 $\mathfrak{M}(X)$ 且又包含 $\mathfrak{S}$ 的一切集环的总体. 显然，所有这些环的交 $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_{\mathfrak{R} \in \Sigma} \mathfrak{R}$ 就是所要求的环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

事实上，对于任何包含 $\mathfrak{S}$ 的环 $\mathfrak{R}^*$，交 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{M}(X)$ 是 Σ 中的环，从而 $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}^*$，即 $\mathfrak{R}$ 确实满足极小性的要求. 这个环叫做 $\mathfrak{S}$ 上的极小环或 $\mathfrak{S}$ 生成环，并记作 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

2. 集半环　在许多问题中，例如，在测度论中，除了环的概念起着重要的作用以外，还有更一般的集半环的概念.

定义 2　如果集族 $\mathfrak{S}$ 包含空集 $\varnothing$，它关于交是封闭的，并且具有下述性质：由 $\mathfrak{S}$ 中的 A 与 $A_1 \subset A$ 就能得到形如 $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 的 A 的表达式，其中 A_k 是 $\mathfrak{S}$ 中两两不相交的集，而首项是给定的集 A_1. 则称 $\mathfrak{S}$ 为半环.

任一组两两不相交的集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并是已知集 A，我们就把这个并叫做集 A 的有限分解式.

任一集环 $\mathfrak{R}$ 都是半环，因为如果 A 与 $A_1 \subset A$ 属于 $\mathfrak{R}$，则成立分解式

$$A = A_1 \cup A_2,$$

其中 $A_2 = A \setminus A_1 \in \mathfrak{R}$.

数轴上所有开区间 (a,b)，闭区间 $[a,b]$，半开区间 $[a,b)$ 及 $(a,b]$ 的全体[①]都可以作为集半环但不是集环的例子. 平面上一切"半开"矩形 $a < x \leqslant b, c < y \leqslant d$ 的全体或空间中一切"半开"平行六面体的全体也可以作为另一个例.

---

① 同时，开区间中当然也包括"空的"开区间 (a,a)，而在闭区间中则包括由一个点 $[a,a]$ 组成的闭区间.

我们建立集半环以下的性质.

引理 1　设集 $A_1,A_2,\cdots,A_n,A$ 属于半环 $\mathfrak{S}$,其中集 A_i 两两不相交并且皆属于 A. 这时可以把集 $A_{n+1},\cdots,A_s\in\mathfrak{S}$ 添加到一组集 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 上,使得集 A 的有限分解式为

$$A=\bigcup_{k=1}^{s}A_k\quad(s\geqslant n).$$

证明　用归纳法证明. 当 $n=1$ 时,由半环的定义推知引理成立. 假定对于 $n=m$ 命题成立,我们来考虑满足引理条件的 $m+1$ 个集 $A_1,\cdots,A_m,A_{m+1}$. 根据所做的假定

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m\cup B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_p,$$

其中所有集 $B_q(q=1,2,\cdots,p)$ 皆属于 $\mathfrak{S}$. 令 $B_{q1}=A_{m+1}\cap B_q$. 根据半环的定义,有分解式 $B_q=B_{q1}\cup B_{q2}\cup\cdots\cup B_{qr_q}$,这里所有 B_{qj} 皆属于 $\mathfrak{S}$. 不难看出

$$A=A_1\cup\cdots\cup A_m\cup A_{m+1}\cup\bigcup_{q=1}^{p}\left(\bigcup_{j=2}^{r_q}B_{qj}\right).$$

于是,当 $n=m+1$ 时引理的断言得证,从而对所有的 n 也成立.

引理 2　任一有限个属于半环 $\mathfrak{S}$ 的一组集 $A_1,\cdots,A_n$,均可在 $\mathfrak{S}$ 中找到有限个两两不相交的一组集 $B_1,\cdots,B_t$,使得每一 A_k 都可表为某些集 B_s 的如下形式的和:

$$A_k=\bigcup_{s\in M_k}B_s.$$

证明　当 $n=1$ 时引理成立,因为只要令 $t=1,B_1=A_1$ 即可. 假设当 $n=m$ 时引理成立,我们来考察 $\mathfrak{S}$ 中某一组集 $A_1,\cdots,A_m,A_{m+1}$. 设 $B_1,B_2,\cdots,B_t$ 是满足引理关于 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 条件的 $\mathfrak{S}$ 中的集. 令

$$B_{s1}=A_{m+1}\cap B_s.$$

根据引理 1,分解式

$$A_{m+1}=\bigcup_{s=1}^{t}B_{s1}\cup\bigcup_{p=1}^{q}B'_p,\quad B'_p\in\mathfrak{S}\tag{1}$$

成立,而由半环本身的定义,分解式

$$B_s=B_{s1}\cup B_{s2}\cup\cdots\cup B_{sf_s},B_{sj}\in\mathfrak{S}$$

成立. 不难看出,

$$A_k=\bigcup_{s\in M_k}\bigcup_{j=1}^{f_s}B_{sj},\quad k=1,2,\cdots,m,$$

从而集

$$B_{sj},\ B'_p$$

两两不相交. 于是,集 B_{sj},B'_p 满足引理关于 $A_1,\cdots,A_m,A_{m+1}$ 的条件.

3. 半环生成的环　我们在第 1 段已经看到,对于任一集族 $\mathfrak{S}$ 都存在包含 $\mathfrak{S}$ 的唯一极小环. 然而对任一族 $\mathfrak{S}$,按照它实际地构造环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ 却很复杂. 而当 $\mathfrak{S}$ 是半环这一重要的条件下,环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ 就变得很简单. 它的构造由以下定理给出.

定理 3 如果 $\mathfrak{S}$ 是半环,那么 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ 与在集 $A_k \in \mathfrak{S}$ 上具有有限分解式

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

的集 A 所成的族 $\mathfrak{Z}$ 一致.

证明 我们来证明族 $\mathfrak{Z}$ 构成环. 如果 A 与 B 是 $\mathfrak{Z}$ 中两个任意集,那么成立分解式

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j, \quad A_i \in \mathfrak{S}, B_j \in \mathfrak{S}.$$

因为 $\mathfrak{S}$ 是半环,所以集

$$C_{ij} = A_i \cap B_j$$

也属于 $\mathfrak{S}$. 根据引理 1 成立分解式

$$A_i = \bigcup_{j} C_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}; \quad B_j = \bigcup_{i} C_{ij} \cup \bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}, \tag{2}$$

其中 $D_{ik}, E_{jl} \in \mathfrak{S}$. 由等式(2)推出集 $A \cap B$ 与 $A \triangle B$ 具有分解式

$$A \cap B = \bigcup_{i,j} C_{ij}, \quad A \triangle B = \bigcup_{i,k} D_{ik} \cup \bigcup_{j,l} E_{jl},$$

从而它们也属于 $\mathfrak{Z}$,于是,$\mathfrak{Z}$ 确实是环. 在包含 $\mathfrak{S}$ 的一切环当中,它的极小性是显然的.

4. σ 代数 在各种不同的问题中,特别在测度论中,不仅需要研究有限个集的和与有限个集的交,而且还要研究可数个集的和与可数个集的交. 因此,除了上面引进集环的概念以外,再引进下述概念是适宜的.

定义 3 如果集环包含任一集序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时一定包含和

$$S = \bigcup_{n} A_n,$$

则这样的集环叫做 σ 环.

定义 4 如果集环包含任一集序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时一定包含交

$$D = \bigcap_{n} A_n,$$

则称这样的集环为 δ 环.

具有单位的 σ 环与具有单位的 δ 环自然分别叫做 σ 代数与 δ 代数. 然而,不难看出,这两个概念是一致的:任一 σ 代数同时是 δ 代数,而任一 δ 代数同时也是 σ 代数. 这可从对偶关系(参见 §1)

$$\bigcup_{n} A_n = E \Big\backslash \bigcap_{n} (E \backslash A_n), \quad \bigcap_{n} A_n = E \Big\backslash \bigcup_{n} (E \backslash A_n)$$

推出.

某集 A 的所有子集的总体是 σ 代数最简单的例子.

如果有某一集族 $\mathfrak{S}$,那么至少总存在一个包含该族的 σ 代数. 事实上,令

$$X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$$

并研究集 X 的一切子集的族 $\mathfrak{B}$. 显然, $\mathfrak{B}$ 是包含 $\mathfrak{S}$ 的 σ 代数. 如果 $\tilde{\mathfrak{B}}$ 是包含 $\mathfrak{S}$ 的任意的 σ 代数, 而 $\tilde{X}$ 是它的单位, 那么任一 $A \in \mathfrak{S}$ 都属于 $\tilde{X}$. 从而 $X = \bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A \subset \tilde{X}$. 如果 $\tilde{X} = \bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$,则称 σ 代数 $\mathfrak{B}$(关于族 $\mathfrak{S}$)为不可约的. 换句话说,不可约的 σ 代数是不包含不属于任一 $A \in \mathfrak{S}$ 的点的 σ 代数. 自然在每一种情况下,我们只限于研究这种 σ 代数.

与上面证明过的关于环的定理 2 类似,对于不可约 σ 代数也有如下定理.

定理 4　对于任何非空集族 $\mathfrak{S}$,存在(关于这个族)不可约的 σ 代数 $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$,它包含 $\mathfrak{S}$ 且属于包含 $\mathfrak{S}$ 的任何 σ 代数中.

证明　证明方法完全和定理 2 一样. σ 代数 $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ 称为族 $\mathfrak{S}$ 上的极小 σ 代数.

在分析中,起重要作用的是所谓博雷尔(Borel)集或 B 集,即数轴上属于所有闭区间 $[a,b]$ 全体上的极小 σ 代数的集.

5. 集族与映射　我们指出以下一些对研究可测函数有用的事实.

设 $y=f(x)$ 是在集 M 上的定义的且在集 N 中取值的函数,并设 $\mathfrak{M}$ 是集 M 的子集组成的某一集族. 我们用 $f(\mathfrak{M})$ 表示所有属于 $\mathfrak{M}$ 的集的象 $f(A)$ 组成的族. 此外,设 $\mathfrak{N}$ 是包含在 N 中的某一集族, $f^{-1}(\mathfrak{N})$ 是属于 $\mathfrak{N}$ 的集的一切原象 $f^{-1}(A)$ 组成的族. 这时下列命题成立,其证明留给读者自行完成.

1) 如 $\mathfrak{N}$ 是环,则 $f(\mathfrak{N})$ 也是环.

2) 如 $\mathfrak{N}$ 是代数,则 $f^{-1}(\mathfrak{N})$ 也是代数.

3) 如 $\mathfrak{N}$ 是 σ 代数,则 $f^{-1}(\mathfrak{N})$ 也是 σ 代数.

4) $\mathfrak{R}(f^{-1}(\mathfrak{N}))=f^{-1}(\mathfrak{R}(\mathfrak{N}))$.

5) $\mathfrak{B}(f^{-1}(\mathfrak{N}))=f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathfrak{N}))$.

如果把 f^{-1} 换成 f, $\mathfrak{N}$ 换成 $\mathfrak{M}$,上述命题是否仍成立?

第二章　度量空间与拓扑空间

§1. 度量空间的概念

1. 定义与基本例子　极限运算是分析学中最重要运算之一. 这种运算基于下述事实,即数轴上一点到另一点的距离是确定的. 分析学中有许多基本性质与实数的代数性质(即与它们)所构成的域没有联系,而只与距离的概念有关. 在实数集合中引进元素间的距离而予以推广,这时我们就得到度量空间的概念,它是现代数学最重要概念之一. 下面我们研究度量空间理论的基本性质及其拓广——拓扑空间. 本章的结果对于后面的学习极为重要.

定义　由元素(点)的某集(空间)X 及距离 ρ 组成的偶(X,ρ)叫做度量空间,其中距离是由 X 中任何 x 与 y 确定的单值非负实函数 $\rho(x,y)$,它满足以下三条公理:

1) $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$,

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$　(对称公理),

3) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$　(三角形公理).

通常我们把度量空间(X,ρ)用一个字母来表示:

$$R=(X,\rho).$$

在不致引起误解的情况下,我们常常就用"点的仓库"X 本身这同一记号来表示度量空间.

下面给出度量空间的一些例子,其中有些空间在分析学中起着很重要的作用.

例 1　对任意集的元素,令

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=y \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x\neq y \text{ 时}.\end{cases}$$

显然,我们得到一个度量空间. 它可以称为孤立点空间.

例 2 距离为

$$\rho(x,y) = |x-y|$$

的实数集构成度量空间 $\mathbf{R}^1$.

例 3 距离为

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2} \tag{1}$$

的 n 个实数有序组 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的集称为 n 维算术欧几里得(Euclid)空间 $\mathbf{R}^n$. 公理 1)与 2)对 $\mathbf{R}^n$ 显然成立. 我们来证明三角形公理在 $\mathbf{R}^n$ 中也成立.

设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 及 $z=(z_1,\cdots,z_n)$,这时三角形公理可写成如下形式:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2}. \tag{2}$$

令 $y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$,我们得到 $z_k - x_k = a_k + b_k$,而不等式(2)这时化为

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}. \tag{3}$$

但此不等式可从著名的柯西 – 布尼雅可夫斯基(Cauchy-Буняковский)不等式①

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}b_k^2 \tag{4}$$

立即推出. 事实上,由于这个不等式,我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}a_k b_k + \sum_{k=1}^{n}b_k^2 \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2} + \sum_{k=1}^{n}b_k^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2.\end{aligned}$$

从而证明了不等式(3),因而也就证明了(2).

例 4 考虑同样的 n 个实数有序组 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的集,但其中距离由下式

$$\rho_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k| \tag{5}$$

定义. 这时公理 1)—3)显然成立. 我们以 $\mathbf{R}_1^n$ 记这个度量空间.

---

① 从恒等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j - b_i a_j)^2$$

推得柯西 – 布尼雅可夫斯基不等式,而这个恒等式可直接验证.

例 5　我们再取与例 3、例 4 同样的集，而其元素之间的距离由公式

$$\rho_{\infty}(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |y_k - x_k| \tag{6}$$

定义. 公理 1)—3) 显然成立. 我们记这个空间为 $\mathbf{R}_{\infty}^{n}$. 在分析学的许多问题中，其方便之处不在欧几里得空间 $\mathbf{R}^{n}$ 之下.

后面三个例子表明，对于度量空间本身以及对于它的点集具有不同的记号有时确实也很重要，因为同样的一组点可以有不同的度量.

例 6　距离为

$$\rho(f,g) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |g(t) - f(t)|, \tag{7}$$

定义在闭区间 $[a,b]$ 上的一切连续实函数的集 $C[a,b]$ 也形成度量空间. 此空间在分析学中起着极重要的作用. 我们也用此空间点集的同样记号 $C[a,b]$ 来记它. 同时把 $C[0,1]$ 简记为 C.

例 7　我们用 l_2 表示这样的度量空间，其中的点为满足下述条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_2^k < \infty$$

的一切可能的实数序列 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$，而距离由公式

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2} \tag{8}$$

定义. 从基本不等式 $(x_k \pm y_k)^2 \leqslant 2(x_k^2 + y_k^2)$ 推得，对一切 $x, y \in l_2$，函数 $\rho(x,y)$ 都有意义，即如果

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \quad 与 \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty,$$

则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2$ 收敛. 现在我们来证明，函数 (8) 满足度量空间公理. 公理 1) 与 2) 显然成立，而三角形公理这时具有形式

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}. \tag{9}$$

由上面讨论知道，(9) 式中三个级数都收敛. 另一方面，对于任一 n，不等式

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$$

成立（参见例 4）. 当 $n\to\infty$ 时，对上式取极限便得 (9) 式，即 l_2 中三角形不等式成立.

例 8　像例 6 一样，我们考察闭区间 $[a,b]$ 上的一切连续函数的集，而距离按下面的公式定义，即令

$$\rho(x,y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \tag{10}$$

我们把这样的度量空间记为 $C_2[a,b]$，并称它为具有平方度量的连续函数空间. 显然，度量空间公理 1) 与 2) 在这里仍然成立，而三角形公理可直接从柯西 - 布

尼雅可夫斯基积分不等式①

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_a^b y^2(t)\,\mathrm{d}t$$

推得.

例 9 考察一切有界实数序列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 的集. 令

$$\rho(x,y) = \sup_k |y_k - x_k|, \tag{11}$$

我们就得到一个度量空间,并记它为 m. 公理 1)—3) 显然成立.

例 10 距离为

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^p\right)^{1/p} \tag{12}$$

(其中 $p \geqslant 1$ 是任意固定的数)的 n 个实数有序组构成的集是一度量空间,我们把它记为 $\mathbf{R}_p^n$. 显然,公理 1) 与 2) 在这里也成立. 下面验证公理 3). 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$, $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 是 $\mathbf{R}_p^n$ 中三个点. 令 $y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$,这时,要证的不等式

$$\rho_p(x,z) \leqslant \rho_p(x,y) + \rho_p(y,z)$$

就化为如下的形式

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p} \tag{13}$$

这就是所谓闵可夫斯基(Minkowski)不等式. 当 $p=1$ 时闵可夫斯基不等式显然成立(和的绝对值不超过绝对值之和),所以我们将认为 $p>1$②

当 $p>1$ 时,不等式(13)的证明根据所谓赫尔德(Hölder)不等式

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}, \tag{14}$$

其中数 $p>1$ 及 $q>1$ 具有关系

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad 即 \quad q = \frac{p}{p-1}. \tag{15}$$

我们指出,不等式(14)是齐次的. 这意味着,如果对于任意两个向量 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 不等式(14)成立,那么不等式(14)对于向量 λa 与 μb

---

① 这个不等式可以从容易验证的恒等式

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 = \int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b y^2(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [x(s)y(t) - y(s)x(t)]^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

得到.

② 当 $p<1$ 时,闵可夫斯基不等式不成立. 换句话说,如果我们想要研究当 $p<1$ 时的空间 $\mathbf{R}_p^n$,那么在这样的空间中三角形公理不成立.

(其中 λ 与 μ 是任意数)也成立. 因此对不等式(14)只要在

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q = 1 \tag{16}$$

的情况下来证明就可以了.

于是,假设条件(16)成立;我们来证明

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant 1. \tag{17}$$

我们研究由方程 $\eta = \xi^{p-1}$ ($\xi > 0$)或同样的方程 $\xi = \eta^{q-1}$(图7)所确定的(ξ,η)平面上的曲线. 由图中显然看出,对于任意选取的正数 a 与 b 都有 $S_1 + S_2 \geqslant ab$. 我们来计算 S_1 与 S_2 的面积:

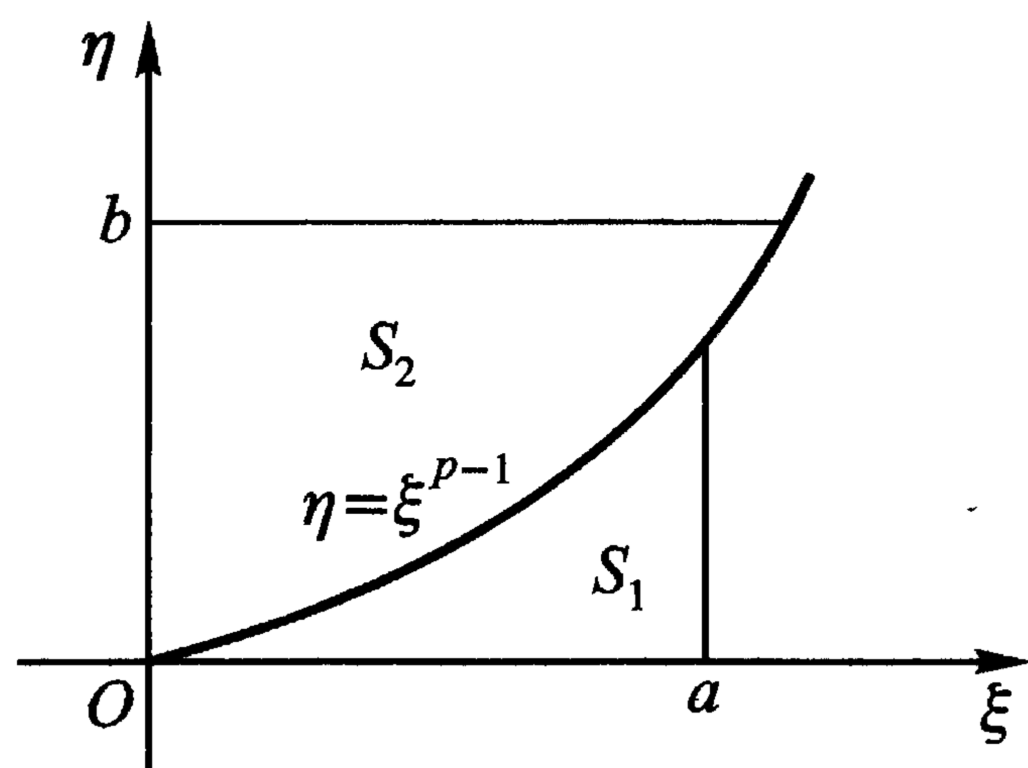


图 7

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} \mathrm{d}\xi = \frac{a^p}{p},$$

$$S_2 = \int_0^b \eta^{q-1} \mathrm{d}\eta = \frac{b^q}{q}.$$

于是,数的不等式

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

成立.

把上面的不等式中的 a 换成 $|a_k|$,b 换成 $|b_k|$,并且按 k 从 1 到 n 求和,注意到(15)及(16)式,我们得到

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant 1.$$

这就证明了不等式(17),因而也就证明了一般的不等式(14). 当 $p = 2$ 时,赫尔德不等式(14)就成为柯西 - 布尼雅可夫斯基不等式(4).

现在我们转到闵可夫斯基不等式的证明. 为此考虑恒等式

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1} |a| + (|a| + |b|)^{p-1} |b|.$$

在上式中把 a 换成 a_k,b 换成 b_k 并按 k 从 1 到 n 求和,我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p \\ &= \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^{p-1} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^{p-1} |b_k|.\end{aligned}$$

现在把赫尔德不等式应用到上式右边两个和中的每一个,并考虑到 $(p-1)q = p$,我们得到

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (| a_k | + | b_k |)^p \right)^{1/q} \left(\left[\sum_{k=1}^{n} | a_k |^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^{n} | b_k |^p \right]^{1/p} \right).$$

在这个不等式的两边除以

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (| a_k | + | b_k |)^p \right)^{1/q},$$

便得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (| a_k | + | b_k |)^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} | a_k |^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} | b_k |^p \right)^{1/p}.$$

由此立即推得不等式(13). 从而三角形公理在空间 $\mathbf{R}_p^n$ 中成立.

在这个例子中所研究的度量 ρ_p,当 $p=2$ 时就成为欧几里得度量(例3),当 $p=1$ 时就成为例4 的度量. 可以证明,例5 中引进的度量

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} | y_k - x_k |$$

正是度量 $\rho_p(x,y)$ 的极限情形,即

$$\rho_\infty(x,y) = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} | y_k - x_k |^p \right)^{1/p}.$$

从上面得到的不等式

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right),$$

也不难推出赫尔德积分不等式

$$\int_a^b | x(t)y(t) | \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b | x(t) |^p \mathrm{d}t \right)^{1/p} \left(\int_a^b | y(t) |^q \mathrm{d}t \right)^{1/q},$$

对于使得右边的积分有意义的任何函数 $x(t)$ 与 $y(t)$,此不等式是正确的. 由此同样也可得到闵可夫斯基积分不等式

$$\left(\int_a^b | x(t) + y(t) |^p \mathrm{d}t \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b | x(t) |^p \mathrm{d}t \right)^{1/p} + \left(\int_a^b | y(t) |^p \mathrm{d}t \right)^{1/p}.$$

例 11 我们再指出度量空间一个有趣的例子. 这个空间的元素是满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^p < \infty$$

(其中 $p\geqslant 1$ 是某一固定的数)的一切可能的实数序列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$,而距离由式

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | y_k - x_k |^p \right)^{1/p} \tag{18}$$

定义. 我们记这个度量空间为 l_p.

根据闵可夫斯基不等式(13),对任何 n 有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} | y_k - x_k |^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} | x_k |^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} | y_k |^p \right)^{1/p}.$$

因为,由假设知道,级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \text{ 与 } \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p$$

都收敛. 所以当 $n\to\infty$ 时取极限,我们得到

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p} < \infty. \tag{19}$$

于是,我们证明了 l_p 中按公式(18)定义的距离,对任意的 $x,y\in l_p$ 确实有意义. 同时,不等式(19)表明在 l_p 中满足三角形公理. 其他公理显然也成立.

用下面的方法可以进一步给出无穷多的例子,设 $R=(X,\rho)$ 是度量空间而 M 是 X 中的任意子集. 那么,具有同一函数 $\rho(x,y)$ 的 M 也是一度量空间,但在这里我们认为 $\rho(x,y)$ 是对 M 中的 x 与 y 来定义的,M 称为空间 R 的子空间.

2. 度量空间的连续映射. 等距　设 X 与 Y 是两个度量空间,f 是空间 X 到空间 Y 内的映射. 于是,对于每一个 $x\in X$ 有 Y 中的某一元素 $y=f(x)$ 与之对应. 如果对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对于

$$\rho(x,x_0) < \delta$$

的一切 $x\in X$,不等式

$$\rho_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

成立(这里 ρ 是 X 中的距离,而 ρ_1 是 Y 中的距离),则称映射 f 在点 $x_0\in X$ 连续. 如果映射 f 在空间 X 的一切点都连续,则称 f 在 X 上连续. 如果 X 与 Y 都是数集,即 f 是在数轴的某一子集 X 上定义的数值函数,那么导出的连续映射的定义就成为大家所熟知的初等分析中连续函数的定义.

类似地可定义多变量 $x_1\in X_1,\cdots,x_n\in X_n$(其中 $X_1,\cdots,X_n$ 是度量空间)的在度量空间 Y 中取值的连续函数(映射)f.

说到这里,我们指出,如果把距离 $\rho(x,y)$ 看作 X 中变量 x 与 y 的函数,那么距离 $\rho(x,y)$ 本身是连续的. 这可从不等式

$$|\rho(x,y) - \rho(x_0,y_0)| \leqslant \rho(x_0,x) + \rho(y_0,y)$$

立即推得,而此不等式不难从三角形不等式推出.

如果映射 $f:X\to Y$ 是一对一的,那么存在空间 Y 到空间 X 上的逆映射 $x=f^{-1}(y)$. 如果映射 f 是一对一且是双方连续的(即 f 与 f^{-1} 都是连续映射),则 f 称为同胚映射或同胚,而在其间可以建立同胚的空间 X 与 Y 本身称为相互同胚的. 整个数轴 $(-\infty,\infty)$ 与开区间,例如开区间 $(-1,1)$,可以作为同胚的度量空间的例子. 此时同胚由下式

$$y = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x$$

建立. 所谓等距映射是同胚的重要特殊情形.

如果对于任意 $x_1,x_2\in R$,

$$\rho(x_1,x_2) = \rho'(f(x_1), f(x_2)),$$

则称度量空间 $R=(X,\rho)$ 与 $R'=(Y,\rho')$ 之间的双射 f 为等距映射. 在其间可以建立等距对应的空间 R 与 R' 叫做等距的.

空间 R 与 R' 等距意味着它们的元素之间的度量关系是一样的;所不同的可能只是它们的元素的特性,从度量空间观点来看这是非本质的. 今后我们把彼此等距的空间简单地看成同一空间.

在本章 §5 末,我们还要返回来用最一般的观点来阐述这里的概念(连续性、同胚).

§2. 收敛性. 开集与闭集

1. 极限点. 闭包 这里我们引进度量空间理论的一些概念,这些概念以后经常要用到.

设 R 是一个度量空间. 我们把满足条件

$$\rho(x,x_0)<r$$

的点 $x\in R$ 的全体 $B(x_0,r)$ 称为开球,其中点 x_0 称为该球的中心,而数 r 称为球的半径.

我们把满足条件

$$\rho(x,x_0)\leqslant r$$

的点 $x\in R$ 的全体 $B[x_0,r]$ 称为闭球.

我们把 x_0 为中心,ε 为半径的开球又叫做点 x_0 的 ε - 邻域,并记作 $O_\varepsilon(x_0)$.

习题 试举出度量空间的例子,在此空间中有使得 $\rho_1>\rho_2$ 的两个球 $B(x,\rho_1)$, $B(y,\rho_2)$ 但 $B(x,\rho_1)\subset B(y,\rho_2)$.

如果集 $M\subset R$ 完全包含在某一球中,则称集 M 是有界的.

如果点 $x\in R$ 的任何邻域至少包含集 $M\subset R$ 中的一个点,则称此点为 M 的接触点. 集 M 的一切接触点的总体记作 $[M]$ 并称为该集的闭包. 于是,我们可以对度量空间的集定义闭包的运算,亦即从集 M 变到其闭包 $[M]$ 的运算.

定理 1 闭包运算具有下列性质:

1) $M\subset[M]$,

2) $[[M]]=[M]$,

3) 如果 $M_1\subset M_2$,那么 $[M_1]\subset[M_2]$,

4) $[M_1\cup M_2]=[M_1]\cup[M_2]$.

证明 第一个命题显然成立,因为属于 M 的一切点都是 M 的接触点. 我们来证明第二个命题.

设 $x\in[[M]]$. 这时在点 x 的任何邻域 $O_\varepsilon(x)$ 中可以找到点 $x_1\in[M]$. 令 $\varepsilon-\rho(x,x_1)=\varepsilon_1$ 并考察球 $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. 这个球完全包含在球 $O_\varepsilon(x)$ 中. 事实上,如果 $z\in O_{\varepsilon_1}(x_1)$,那么 $\rho(z,x_1)<\varepsilon_1$. 又因为 $\rho(x,x_1)=\varepsilon-\varepsilon_1$,所以根据三角形公理

$$\rho(z,x) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon,$$

即 $z \in O_\varepsilon(x)$. 因为 $x_1 \in [M]$,所以在 $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ 中可以找到 $x_2 \in M$. 但这时 $x_2 \in O_\varepsilon(x)$. 因为 $O_\varepsilon(x)$ 是点 x 的任意邻域,所以 $x \in [M]$. 第二个命题证毕.

第三个性质是明显的. 最后,我们来证明第四个性质.

如果 $x \in [M_1 \cup M_2]$,那么 x 至少属于集 $[M_1]$ 或 $[M_2]$ 中之一,即

$$[M_1 \cup M_2] \subset [M_1] \cup [M_2].$$

因为 $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ 及 $M_2 \subset M_1 \cup M_2$,所以由性质 3) 得到相反的包含式. 定理证毕.

如果点 $x \in R$ 的任何邻域包含 $M \subset R$ 中无限多个点,则称点 x 为集 M 的极限点.

极限点可以属于 M,也可以不属于 M. 例如,如果 M 是闭区间 $[0,1]$ 中的有理数集,那么该区间的每一个点都是 M 的极限点.

如果在点 x 充分小的邻域 $O_\varepsilon(x)$ 中没有异于 x 的 M 中的点,则属于集 M 的点 x 称为这个集的孤立点. 作为习题请读者证明下面的命题:

集 M 的任一接触点或是该集的极限点,或是孤立点.

由此可以断言,闭包 $[M]$ 一般说来由下列三种类型的点组成:

1) 集 M 的孤立点;

2) 属于 M 的集 M 的极限点;

3) 不属于 M 的集 M 的极限点.

于是,给 M 添加上它的一切极限点便得到闭包 $[M]$.

2. 收敛性　设 $x_1, x_2, \cdots$ 是度量空间 R 中的点列. 如果点 x 的每一个邻域 $O_\varepsilon(x)$ 包含从某一项开始的一切点 x_n,即如果对于任一 $\varepsilon > 0$,可以找到这样的数 N_ε,使得当 $n > N_\varepsilon$ 时 $O_\varepsilon(x)$ 包含所有的点 x_n,则称这个序列收敛于点 x. 点 x 称为序列 $\{x_n\}$ 的极限.

这个定义显然还可以用下列方式叙述:如果

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0,$$

则序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

从极限定义直接推出:1) 任一序列不可能有两个相异的极限;2) 如果序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x,那么它的任一子序列也收敛于同一个点.

下面的定理建立了接触点与极限点两概念之间的紧密联系.

定理 2　点 x 是集 M 的接触点的充要条件为 M 中存在收敛于 x 的点列 $\{x_n\}$.

证明　必要条件,因为如果 x 是集 M 的接触点,那么在它的任一邻域 $O_{1/n}(x)$ 中至少包含一个点 $x_n \in M$. 这些点构成收敛于 x 的序列. 充分性显然.

如果 x 是集 M 的极限点,那么可以选取与不同的 n 相对应的两两不同的点 $x_n \in O_{1/n}(x) \cap M$. 于是,点 x 是 M 的极限点的充要条件为在 M 中存在收敛于 x 的两两不同的点的序列.

现在我们可以用收敛序列的术语来叙述 §1 中引进的度量空间 X 到度量空间 Y

内连续映射的概念. 即如果对于收敛于 x_0 的任一序列 $\{x_n\}$, 序列 $\{y_n=f(x_n)\}$ 都收敛于 $y_0=f(x_0)$, 则映射 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续. 这个连续性定义与 §1 引进的连续性, 它们等价性的证明与数值函数两种连续性定义("用 ε,δ 术语"与"用序列术语")的等价性证明没有什么不同, 请读者证明.

3. 稠密子集 设 A 与 B 是度量空间 R 中两个集合. 如果 $[A]\supset B$, 则称集 A 在 B 中稠密. 特别, 如果集 A 的闭包 $[A]$ 与全空间 R 重合, 则称集 A (在空间 R 中) 处处稠密. 例如, 有理数集在数轴上处处稠密. 如果集 A 在任一球中不稠密, 即如果在任一球 $B\subset R$ 中包含有另一与 A 无任一公共点的球 B', 则称集 A 无处稠密.

具有可数处处稠密集的空间的例子. 具有可数处处稠密集的空间称为可分空间. 我们用这个观点研究 §1 中给出的例子.

例 1 在 §1 例 1 中所说的"离散"空间, 在该空间中包含可数处处稠密集的充要条件为它本身只由可数个点组成. 这是由于在这个空间中, 任何集 M 的闭包 $[M]$ 总与 M 相同.

在 §1 例 2 至例 8 中所列举的一切空间, 都包含可数处处稠密集. 我们在其中每一个空间指出这样的集, 详细证明请读者自行完成.

例 2 在实数轴 $\mathbf{R}^1$ 上的有理点.

例 3—例 5 在 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中以及在空间 $\mathbf{R}_1^n$, $\mathbf{R}_\infty^n$ 中那些具有有理坐标向量的全体.

例 6 在空间 $C[a,b]$ 中那些具有有理系数一切多项式的全体.

例 7 在空间 l_2 中的这样的序列的全体, 其中任一序列的一切项是有理数, 并且异于零的项只有有限项(对每一序列本身而言).

例 8 在空间 $C_2[a,b]$ 中那些具有有理系数一切多项式的全体.

同时指出, 有界序列空间 m(§1 例 9) 是不可分的.

事实上, 考虑由 0 与 1 组成的所有可能序列, 它们构成连续统的势的集合(因为它们与自然数列的子集之间可以建立一一对应). 在这个集中按 §1 公式(11)定义的两点之间的距离等于 1. 我们围绕其中每一个点作半径为 1/2 的开球, 这些球互不相交. 如果某一个集在 m 中处处稠密, 那么所构造的每一个球都应当至少包含该集中的一个点. 从而此集不可能是可数的.

4. 开集与闭集 在度量空间中我们来研究两类重要的集, 即开集与闭集.

设 M 是度量空间 R 中的集合. 如果 M 与其闭包重合: $[M]=M$, 则称 M 为闭集. 换句话说, 集称为闭的, 就是说它包含了自己的一切极限点.

根据定理 1 知道, 任何集 M 的闭包是闭集. 从同一个定理还推出, $[M]$ 是包含 M 的最小闭集(请读者证明此断言!).

例 1 数轴的任一闭区间 $[a,b]$ 是闭集.

例 2 闭球是闭集. 特别, 在空间 $C[a,b]$ 中满足条件 $|f(t)|\leqslant K$ 的函数 f 所成的集是闭的.

例 3　在空间 $C[a,b]$ 中满足条件 $|f(t)|<K$(开球)的函数 f 所成的集不是闭的;它的闭包是满足条件 $|f(t)|\leqslant K$ 的函数 f 的全体.

例 4　对于任何度量空间 R,空集 $\varnothing$ 及全空间 R 都是闭的.

例 5　由有限个点组成的任何集都是闭的.

闭集的基本性质可以叙述为以下定理的形式.

定理 3　任意多个闭集的交与任意有限多个闭集的和仍是闭集.

证明　设 $F=\cap F_\alpha$ 是闭集 F_α 的交,x 是 F 的极限点,这表示 x 的任何邻域 $O_\varepsilon(x)$ 包含 F 中无限多个点. 但这时 $O_\varepsilon(x)$ 更是包含每一个 F_α 中的无限多个点. 于是,因为所有的 F_α 是闭的,所以点 x 属于每一个 F_α. 因此,$x\in F=\cap F_\alpha$,即 F 是闭的.

现设 F 是有限个闭集之和:$F=\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i$,点 x 不属于 F. 我们来证明,x 不可能是 F 的极限点. 事实上,x 不属于闭集 F_i 中的任何一个,因而也就不是 F_i 中任何一个的极限点. 所以,对于每一个 i 可以找到点 x 的邻域 $O_{\varepsilon_i}(x)$,使得这个邻域至多包含 F_i 中有限个点. 从邻域 $O_{\varepsilon_1}(x),\cdots,O_{\varepsilon_n}(x)$ 中选取最小的一个,我们便得到至多包含 F 中有限个点的点 x 的邻域 $O_\varepsilon(x)$.

于是,如果点 x 不属于 F,那么它不可能是 F 的极限点,即 F 是闭的. 定理证毕.

如果存在点 x 的邻域 $O_\varepsilon(x)$ 完全包含在集 M 中,则点 x 称为集 M 的内点.

其一切点均为内点的集称为开集.

例 6　数轴 $\mathbf{R}^1$ 的开区间 (a,b) 是开集. 事实上,如果 $a<\alpha<b$,那么 $O_\varepsilon(\alpha)$ $(\varepsilon=\min(\alpha-a,b-\alpha))$ 完全包含在开区间 (a,b) 中.

例 7　任何度量空间 R 中的开球 $B(a,r)$ 是开集. 事实上,如果 $x\in B(a,r)$,那么 $\rho(a,x)<r$. 令 $\varepsilon=r-\rho(a,x)$. 于是 $B(x,\varepsilon)\subset B(a,r)$.

例 8　在 $[a,b]$ 上满足条件 $f(t)<g(t)$ ($g(t)$ 是某一给定的连续函数)的连续函数的集合乃是空间 $C[a,b]$ 的一个开子集.

定理 4　集 M 是开的充要条件为它的余集 $R\backslash M$ 关于全空间 R 是闭的.

证明　如果 M 是开的,那么对于 M 中每一点 x 都有一个邻域完全包含在 M 中,即这些邻域与 $R\backslash M$ 没有任何一个公共点. 于是,不属于 $R\backslash M$ 的任何一点就不能是 $R\backslash M$ 的接触点,即 $R\backslash M$ 是闭的. 反之,如果 $R\backslash M$ 是闭的,那么对于 M 中任一点都有完全包含在 M 中的邻域,即 M 是开的.

由于空集与全空间 R 是闭的,并且它们又同时互为余集,因此空集与全空间 R 也都是开的.

由定理 3 及对偶原理(余集的交等于和的余集,余集的和等于交的余集,参看第一章 §1 第 2 段)可以推出下面与定理 3 互为对偶的重要定理.

定理 3′　任意(有限或无限)多个开集的和与任意有限个开集的交仍是开集.

由空间 R 的一切开子集与闭子集生成的属于 σ 代数的集称为博雷尔集.

5. 直线上的开集与闭集　在一些度量空间中,开集与闭集的结构可能是很复

杂的. 这种复杂性甚至连二维或多维的欧几里得空间的开集与闭集也不例外. 但是,在一维即在直线的情况下,对一切开集(因而也对一切闭集)做出详尽的描述并不困难. 这就是下面给出的定理.

定理 5 数直线上任一开集乃是有限个或可数个两两互不相交开区间的和集①.

证明 设 G 是直线上的开集. 我们对 G 中的点引进等价关系:如果存在这样的开区间(α,β),使得 $x,y\in(\alpha,\beta)\subset G$,我们就把 x,y 看作是等价的,并记作 $x\sim y$. 显然,这个关系是自反的,对称的,而且还是传递的. 因为如果 $x\sim y$ 及 $y\sim z$,则存在这样的开区间(α,β)与(γ,δ),使得

$$x,y\in(\alpha,\beta)\subset G \text{ 及 } y,z\in(\gamma,\delta)\subset G.$$

但这时 $\gamma<\beta$ 且开区间(α,δ)完全位于 G 中并包含点 x 与 z. 因此,相互等价的点把 G 分解为两两互不相交的类 I_τ:

$$G=\cup I_\tau.$$

我们来证明,任一 I_τ 都是开区间(a,b),其中 $a=\inf I_\tau$, $b=\sup I_\tau$. 包含式 $I_\tau\subset(a,b)$ 显然成立. 另一方面,如果 $x,y\in I_\tau$,那么由 I_τ 本身的定义知,开区间(x,y)包含在 I_τ 中. 因为 a 点右边任何邻域与 b 点左边任何邻域都是 I_τ 中的点,所以 I_τ 包含其端点属于(a,b)的任何开区间(a',b'). 由此可见 $I_\tau=(a,b)$. 这些互不相交的开区间组 I_τ 至多是可数的. 事实上,我们可以在其中每一个开区间用任意的方式选取有理点,于是这些开区间与有理数集的某一子集建立了一一对应. 定理证毕.

因为闭集是开集的余集,所以由此推出:直线上的任一闭集可以从直线上去掉有限个或可数个开区间而得到.

闭集最简单的例子是闭区间,单点集以及有限个这些集的和. 下面我们研究直线上一个比较复杂的闭集例子,即所谓康托尔集.

设 F_0 是闭区间$[0,1]$. 从 F_0 中去掉开区间$(1/3,2/3)$,而剩下的闭集记作 F_1. 然后从 F_1 中去掉开区间$(1/9,2/9)$与$(7/9,8/9)$,而剩下的闭集(由四个闭区间组成)记作 F_2. 在这四个闭区间中的每一个去掉长为$(1/3)^3$ 的中间的开区间,等等(图 8). 继续这一过程,便得到递减的闭集序列 F_n. 令

$$F=\bigcap_{n=0}^{\infty}F_n.$$

F 是闭集(看作闭集之交). 它是从闭区间$[0,1]$中去掉可数个开区间而得到的.

我们研究集 F 的结构,属于 F 的点

$$0,1,1/3,2/3,1/9,2/9,7/9,8/9,\cdots \tag{1}$$

显然是被去掉开区间的端点. 但是,这些点并没有遍历集 F. 事实上,闭区间$[0,1]$上属于集 F 的那些点可以用下面的方式来说明它的特征. 我们把 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的每一个数

① 我们这时把$(-\infty,\infty)$,(α,∞)与$(-\infty,\beta)$的集也列为开区间.

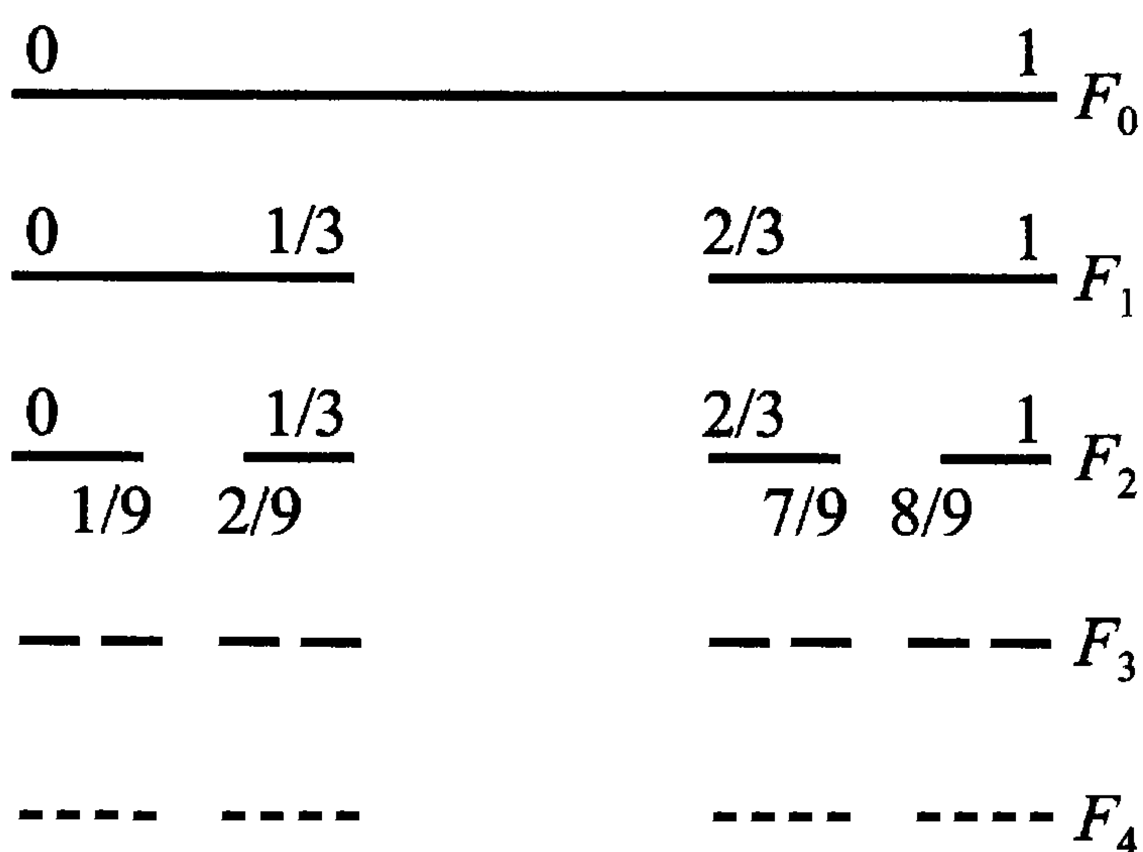


图　8

x 写成三进位小数：

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots,$$

其中数 a_n 可以取值 0，1 或 2. 像十进位小数的情形一样，某些数允许两种写法. 例如，

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \cdots + \frac{0}{3^n} + \cdots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \cdots.$$

不难验证，凡属于集 F 的仅仅是 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上这样的数 x，它至少可以用一种方法写成三进位小数，在这种形式中使得序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 不出现 1. 于是，对于每一点 $x \in F$，可以使得它与序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \tag{2}$$

相对应，其中 a_n 等于 0 或 2. 这些序列的全体构成连续统的势的集. 这可验证如下，对每一序列(2)，使它与序列

$$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots \tag{2'}$$

相对应，其中当 $a_n = 0$ 时 $b_n = 0$，当 $a_n = 2$ 时 $b_n = 1$. 序列(2′)可以看作 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 上某一实数 y 的二进位小数表示形式. 这样，我们就得到集 F 到整个闭区间[0，1]上的映射. 由此推出 F 具有连续统的势①. 因为点集(1)是可数的，所以这些点不可能填满整个 F.

习题 1　直接证明，属于集 F 的点 1/4 不是被去掉开区间中的任何一个端点.

提示　点 1/4 分区间[0，1]为 1 与 3 之比. 在第一次去掉开区间以后而剩下的闭区间[0，1/3]也被点 1/4 分成 1 与 3 之比，等等.

(1)中的点称为集 F 的第一类点，F 中其余的点称为第二类点.

习题 2　证明，第一类点构成 F 中处处稠密集.

习题 3　证明，形如 $t_1 + t_2$ $(t_1, t_2 \in F)$ 的一切数填满整个闭区间[0,2].

---

① 所建立的集 F 与闭区间[0，1]之间的映射是单值的，但不是相互单值的(因为同一个数有时可以用相异的二进位小数来表示). 由此推出，F 具有不小于连续统的势. 但 F 是闭区间[0，1]的一部分，从而它又不能大于连续统的势.

我们已经证明集 F 具有连续统的势,即它与整个闭区间 $[0,1]$ 包含同样多的点.

把这一事实与下面的结果进行比较是有趣的:一切被去掉开区间的长之和 $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots$ 恰好等于1!

补充讨论

1) 设 M 是度量空间 R 中的某一个集,x 是该空间的点. 数

$$\rho(x,M)=\inf_{a\in M}\rho(x,a)$$

称为点 x 到集 M 的距离.

如果 $x\in M$,那么 $\rho(x,M)=0$,但从 $\rho(x,M)=0$ 并不能推出 $x\in M$. 从接触点的定义直接得到:$\rho(x,M)=0$ 的充要条件为 x 是集 M 的接触点. 这样一来,闭包运算可以定义为:与集的距离等于零的一切点均归入该集.

2) 两集之间的距离可类似地定义. 设 A,B 为度量空间 R 的两个集,则

$$\rho(A,B)=\inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}}\rho(a,b).$$

如果 $A\cap B\neq\varnothing$,那么 $\rho(A,B)=0$;一般说来,反之不成立.

3) 设 M_K 是 $C[a,b]$ 中所有函数 f 所成的集,其中 f 满足利普希茨(Lipschitz)条件:对于任意 $t_1,t_2\in[a,b]$

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant K|t_2-t_1|,$$

这里 K 是某一固定的数. 集 M_K 是闭的. 它与 $[a,b]$ 上满足 $|f'(t)|\leqslant K$ 的一切可微函数所成的集的闭包一致.

4) 设集 $M=\bigcup\limits_K M_K$,对于任何 K,M_K 是满足利普希茨条件的函数所成的集,则 M 非闭. 它的闭包是整个空间 $C[a,b]$.

5) 设 G 是 n 维欧几里得空间的开集. 如果任意两点 $x,y\in G$ 可以用完全位于 G 中的折线来连接,则称 G 为连通的. 例如,圆的内部 $x^2+y^2<1$ 是连通集. 相反地,两个圆

$$x^2+y^2<1 \quad 与 \quad (x-2)^2+y^2<1$$

的和不是连通集(虽然在这两个圆上有一公共的切点!). 设 H 是开集 G 的开子集. 如果它是连通的且不包含在 G 的任意更大的连通开子集中,则称 H 为集 G 的分支. 在 G 中可以引进等价关系 $x\sim y$:如果存在 G 中的连通开子集 H 把 x 与 y 盖住,即

$$x,y\in H\subset G,$$

则 $x\sim y$. 像在直线的情形一样,不难验证上述等价关系具有传递性,所以可以把 G 分解为两两不相交的类:$G=\cup I$. 这些类是 G 的开分支,它们的个数至多是可数的.

在 $n=1$,即在直线的情形下,任一连通开集是开区间(其中也包括无限开区间 $(-\infty,a)$,(b,∞) 和 $(-\infty,\infty)$). 于是,定理5关于直线上开集的构造由两个命题组成:a) 直线上任一开集乃是有限个或可数个分支的和集;b) 直线上的连通开集是开区间. 这两个命题中的前一个对 n 维欧几里得空间(还可以进一步推广)的集也是正确的,而后一个命题只对直线的集成立.

§3. 完备度量空间

1. 完备度量空间的定义与例子　自学习数学分析的开始阶段,我们就看到数直线的完备性,即任一基本实数列收敛于某一极限这一性质,在分析学中起着多么重要的作用. 数直线乃是所谓完备度量空间最简单的例子,本节我们就研究这种空间的基本性质.

设$\{x_n\}$是度量空间R的点列,如果它满足柯西准则,即如果对于任意$\varepsilon>0$,存在数N_ε,使得对所有的$n'>N_\varepsilon,n''>N_\varepsilon,\rho(x_{n'},x_{n''})<\varepsilon$成立,则称$\{x_n\}$为基本点列.

从三角形公理直接推得,任一收敛序列都是基本的. 事实上,如果$\{x_n\}$收敛于x,那么对于给定的$\varepsilon>0$,可以找到数N_ε,使对一切$n>N_\varepsilon,\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$. 这时,对于任意的$n'>N_\varepsilon$与$n''>N_\varepsilon,\rho(x_{n'},x_{n''})\leqslant\rho(x_{n'},x)+\rho(x_{n''},x)<\varepsilon$.

定义 1　如果空间R中任一基本序列都收敛,则这个空间称为完备的.

例如,在§1所研究的一切空间中,除例8以外,都是完备的. 事实上:

例 1　在孤立点的空间中(§1 例1),只有定常序列(即从其中某一个下标开始都重复着同一个点的序列)是基本的. 任一这样的序列当然都收敛,也就是说该空间是完备的.

例 2　从分析学知道,实数全体构成的欧几里得空间$\mathbf{R}^1$是完备的.

例 3　从$\mathbf{R}^1$的完备性直接可推出欧几里得空间$\mathbf{R}^n$的完备性. 事实上,设$\{x^{(p)}\}$是$\mathbf{R}^n$中的基本点列. 这意味着对任一$\varepsilon>0$可以找到$N=N_\varepsilon$,使得对一切大于N的p,q,有

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^{(p)}-x_k^{(q)})<\varepsilon^2,$$

其中$x^{(p)}=\{x_1^{(p)},\cdots,x_n^{(p)}\}$. 这时,对于每一$k=1,2,\cdots,n$,我们得到相应于坐标$x_k^{(p)}$的,对于一切$p,q>N$都成立的不等式:

$$|x_k^{(p)}-x_k^{(q)}|<\varepsilon,$$

即$\{x_k^{(p)}\}$是基本数列. 设

$$x_k=\lim_{p\to\infty}x_k^{(p)}\quad 及\quad x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

这时显然有

$$\lim_{p\to\infty}x^{(p)}=x.$$

例 4—例 5　空间$\mathbf{R}_\infty^n$与$\mathbf{R}_1^n$的完备性可完全类似地证明.

例 6　我们来证明$C[a,b]$的完备性. 设$\{x_n(t)\}$为$C[a,b]$中的某一基本序列. 这表示对每一$\varepsilon>0$,存在这样的N,使得当$n,m>N$时,对于一切$t(a\leqslant t\leqslant b)$,

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

由此推出序列$\{x_n(t)\}$一致收敛. 大家知道,此时它的极限$x(t)$是连续函数. 在上面不等式中让m趋于无限大,对于所有的t及一切$n>N$,有

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon.$$

这也就意味着$\{x_n(t)\}$在空间$C[a,b]$的度量意义下收敛于$x(t)$.

例 7 我们来证明空间l_2的完备性. 设$\{x^{(n)}\}$是l_2中的基本序列. 这表示对任意$\varepsilon>0$,可以找到这样的N,当$n,m>N$时,

$$\rho^2(x^{(n)},x^{(m)})=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)}-x_k^{(m)})^2<\varepsilon, \tag{1}$$

其中$x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots)$. 由(1)推出,对于任意的$k$,$(x_k^{(n)}-x_k^{(m)})^2<\varepsilon$,即对于每一个$k$,实数列$\{x_k^{(n)}\}$是基本的因而它收敛. 设$x_k=\lim\limits_{n\to\infty}x_k^{(n)}$并用$x$表示序列$(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)$. 这时应当证明:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$,即$x\in l_2$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x^{(n)},x)=0$.

下面我们来证明. 从不等式(1)推出,对任何固定的M有

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(n)}-x_k^{(m)})^2<\varepsilon.$$

此时上述和仅有有限个加项,我们就可以固定n,让$m\to\infty$取极限,得

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(n)}-x_k)^2\leqslant\varepsilon.$$

这个不等式对任何M成立. 令$M\to\infty$而取极限使之成为无穷级数,我们得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)}-x_k)^2\leqslant\varepsilon. \tag{2}$$

由级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)})^2$及$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)}-x_k)^2$的收敛性得到级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2$的收敛性(根据初等不等式$(a+b)^2\leqslant2(a^2+b^2)$),即命题a)得证. 其次,因为$\varepsilon$可任意小,所以不等式(2)表示

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x^{(n)},x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)}-x_k)^2}=0,$$

即在空间l_2度量意义下$x^{(n)}\to x$. 命题b)也得证.

例 8 不难验证空间$C_2[a,b]$不完备. 例如,考察连续函数序列

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}-1, & \text{当 } -1\leqslant t\leqslant-1/n \text{ 时},\\ nt, & \text{当 } -1/n\leqslant t\leqslant 1/n \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } 1/n\leqslant t\leqslant 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

这个序列在$C_2[-1,1]$中是基本的,因为

$$\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\varphi_m(t))^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\min(n,m)}.$$

但它不收敛于 $C_2[-1,1]$ 中的任何函数. 事实上,设 f 为 $C_2[-1,1]$ 中某一函数,ψ 为下述间断函数,即当 $t<0$ 时 ψ 等于 -1,当 $t\geqslant 0$ 时 ψ 等于 $+1$.

根据闵可夫斯基积分不等式(对于分段连续函数显然也成立)有

$$\left(\int_{-1}^{1}(f(t)-\psi(t))^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\int_{-1}^{1}(f(t)-\varphi_n(t))^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}+\left(\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\psi(t))^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

由于函数 f 的连续性,上面不等式左端的积分异于零. 其次,显然有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\psi(t))^2\mathrm{d}t=0.$$

所以,当 $n\to\infty$ 时 $\int_{-1}^{1}(f(t)-\varphi_n(t))^2\mathrm{d}t$ 不可能趋于零.

习题　证明:一切有界序列所成的空间(§1 例 9)是完备的.

2. 球套定理　在分析学中,所谓区间套引理被广泛地应用着. 在度量空间理论中,下面的所谓球套定理也起着类似的重要作用.

定理 1　度量空间 R 是完备的充要条件为 R 中半径趋于零的一个包含另一个的闭球的任一序列有非空的交.

证明　必要性. 设空间 R 完备,并设 $B_1,B_2,B_3,\cdots$ 是一个包含另一个的闭球的序列. 设球 B_n 的半径为 r_n,球心为 x_n. 球心序列 $\{x_n\}$ 是基本的,因为当 $m>n$ 时 $\rho(x_n,x_m)<r_n$,而当 $n\to\infty$ 时 $r_n\to 0$. 由于 R 完备,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;这时 $x\in\bigcap\limits_n B_n$. 事实上,球 B_n 可能除了点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 以外包含序列 $\{x_n\}$ 的一切点. 于是,x 是每一个球 B_n 的接触点. 但因为 B_n 是闭集,所以对所有的 n,$x\in B_n$.

充分性. 设 $\{x_n\}$ 是基本序列. 我们来证明,它有极限. 由于 $\{x_n\}$ 是基本序列,我们可以选取这样的点 x_{n_1},使得对于一切 $n\geqslant n_1$,$\rho(x_n,x_{n_1})<1/2$. 我们把点 x_{n_1} 取作半径为 1 闭球的中心,并记该球为 B_1. 然后从 $\{x_n\}$ 中选取 x_{n_2},使得 $n_2>n_1$,且对于一切 $n\geqslant n_2$,$\rho(x_n,x_{n_2})<1/2^2$. 我们把点 x_{n_2} 作为半径为 1/2 闭球的中心,并记该球为 B_2. 一般地,如果已经选得 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k}$ $(n_1<n_2<\cdots<n_k)$,那么我们可选取点 $x_{n_{k+1}}$,使得 $n_{k+1}>n_k$ 且对一切 $n\geqslant n_{k+1}$,$\rho(x_n,x_{n_{k+1}})<1/2^{k+1}$,并且以半径为 $1/2^k$ 的闭球 B_{k+1} 包含点 $x_{n_{k+1}}$. 继续这一作法,我们便得到一个包含另一个的闭球序列 B_k,而且 B_k 的半径为 $1/2^{k-1}$. 由假设知,这个球序列有公共点,记这点为 x. 显然,点 x 就是子序列 $\{x_{n_k}\}$ 的极限点. 但如果基本序列包含收敛于 x 的子序列,那么这个基本序列本身也收敛于同一极限. 因此,$x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

习题 1　证明定理 1 中闭球套的交变为一个点.

习题 2 数

$$d(M) = \sup_{x,y \in M} \rho(x,y)$$

称为度量空间中集 M 的直径. 证明在完备的度量空间中,直径趋于零的一个包含另一个非空的任一闭集序列有非空的交.

习题 3 举出一个完备的度量空间和其中具有空交的闭球套的例子.

习题 4 证明:完备度量空间 R 的子空间是完备的充要条件为其在 R 中是闭的.

3. 贝尔(Baire)定理 下述定理在完备度量空间理论中起着基本的作用.

定理 2(贝尔) 完备度量空间 R 不能表为可数个无处稠密集的并的形式.

证明 假设不然. 设 $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$,其中任一 M_n 为无处稠密集. 设 S_0 是某一半径为 1 的闭球. 因为集 M_1 为无处稠密的,所以它在 S_0 中不稠密. 于是存在半径小于 1/2的闭球 S_1,使得 $S_1 \subset S_0$,且 $S_1 \cap M_1 = \varnothing$. 因为集 M_2 在 S_1 中不稠密,和上面一样,存在半径小于 1/3 的闭球 S_2 包含在球 S_1 中,使得 $S_2 \cap M_2 = \varnothing$,等等. 于是我们得到半径趋于零的一个包含另一个的闭球序列 $\{S_n\}$,并且 $S_n \cap M_n = \varnothing$. 根据定理 1,交 $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ 包含某一点 x. 由上面的作法这点不属于集 M_n 中的任何一个,因而,$x \notin \bigcup_n M_n$,即 $R \neq \bigcup_n M_n$. 这与假设矛盾.

特别,没有孤立点的任一完备空间是不可数的. 事实上,在这种空间中只包含一个点的任一集都是无处稠密的.

4. 空间的完备化 如果空间 R 不完备,那么总可以用某种(而且实质上是唯一的)方法把 R 包含在一个完备化空间内.

定义 2 设 R 是度量空间,R^* 是完备度量空间. 如果

1) R 是空间 R^* 的子空间,

2) R 在 R^* 中处处稠密,即 $[R] = R^*$(此处 $[R]$ 自然表示空间 R 在 R^* 中的闭包),

则 R^* 称为 R 的完备化.

例如,一切实数的空间是有理数空间的完备化.

定理 3 任一度量空间 R 都有完备化,并且,这个完备化如对那种能使 R 中的不动点保持等距的映射不加区别是唯一的.

证明 先证唯一性. 我们需要证明:如果 R^* 与 R^{**} 是空间 R 的两个完备化,那么存在空间 R^* 到 R^{**} 上的一一映射 φ,使得

1) 对于一切 $x \in R$, $\varphi(x) = x$;

2) 如果 $x^* \leftrightarrow x^{**}$ 及 $y^* \leftrightarrow y^{**}$,那么 $\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**})$,其中 ρ_1 是 R^* 中的距离,而 ρ_2 是 R^{**} 中的距离.

映射 φ 可用下面的方法来定义. 设 x^* 是 R^* 中的任一点. 这时,根据完备化的定义,存在 R 中的点列 $\{x_n\}$,收敛于 x^*. 点列 $\{x_n\}$ 也包含在 R^{**} 中. 因为 R^{**} 完备,所

以$\{x_n\}$收敛于R^{**}中的某一点x^{**}. 显然,x^{**}和收敛于x^*的序列$\{x_n\}$的选择无关. 设$\varphi(x^*)=x^{**}$. 映射φ就是要求的等距映射.

事实上,根据上面的作法,对于一切$x\in R$有$\varphi(x)=x$. 其次,设

$$\text{在} R^* \text{中} \{x_n\}\to x^* \text{及在} R^{**} \text{中} \{x_n\}\to x^{**},$$

$$\text{在} R^* \text{中} \{y_n\}\to y^* \text{及在} R^{**} \text{中} \{y_n\}\to y^{**}.$$

这时,根据距离的连续性,

$$\rho_1(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty}\rho_1(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

同样地,

$$\rho_2(x^{**},y^{**})=\lim_{n\to\infty}\rho_2(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

因此,

$$\rho_1(x^*,y^*)=\rho_2(x^{**},y^{**}).$$

现在我们来证明完备化的存在性. 这个证明的想法与康托尔实数理论的思想是一样的. 但这里的证明要比实数理论的情形更简单,因为在实数理论中,对于新引进的对象无理数,还要求定义所有的算术运算.

设R是任一度量空间. 如果R中两个基本序列$\{x_n\}$与$\{x'_n\}$满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x'_n)=0,$$

则称$\{x_n\}$与$\{x'_n\}$等价,并记作$\{x_n\}\sim\{x'_n\}$. 我们所以称之为"等价",由于这个关系是自反的,对称的与传递的. 由此可见,可以把空间R中的点的一切基本序列按彼此等价的序列进行分类. 现在我们来定义空间R^*,并把彼此等价的基本序列一切可能的类作为它的点,而两点之间的距离用下面的方法给出. 设x^*与y^*为两个这样的类. 我们从其中每一类取出一个代表,即取出某一基本序列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$. 令①

$$\rho(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n). \tag{3}$$

我们来证明这个距离定义的正确性,即证明(3)式的极限存在,且和基本序列$\{x_n\}\in x^*$及$\{y_n\}\in y^*$的选取无关.

由不等式

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(y_n,y_m) \tag{4}$$

以及序列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$是基本序列知,对于充分大的一切n与m,

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|\leqslant\varepsilon.$$

由此可见,实数列$s_n=\rho(x_n,y_n)$满足柯西准则,从而s_n有极限.

这个极限不依赖于$\{x_n\}\in x^*$与$\{y_n\}\in y^*$的选择. 事实上,设

$$\{x_n\},\{x'_n\}\in x^* \quad \text{与} \quad \{y_n\},\{y'_n\}\in y^*.$$

完全类似于(4)式的计算,有不等式

① 为简便起见,我们仍用原来空间R的距离的同一记号ρ来表示空间R^*的距离.

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x'_n,y'_n)|\leqslant\rho(x_n,x'_n)+\rho(y_n,y'_n).$$

因为$\{x_n\}\sim\{x'_n\}$及$\{y_n\}\sim\{y'_n\}$,由此得到

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x'_n,y'_n).$$

现在我们来证明,度量空间的公理在R^*中成立.

从基本序列等价的定义直接推得公理1).

公理2)显然成立.

下面验证三角形公理. 因为在原来的空间R中,三角形公理成立,所以

$$\rho(x_n,z_n)\leqslant\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,z_n).$$

令$n\to\infty$,对上面不等式取极限,得

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,z_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)+\lim_{n\to\infty}\rho(y_n,z_n),$$

即

$$\rho(x^*,z^*)\leqslant\rho(x^*,y^*)+\rho(y^*,z^*).$$

我们再证明R可以看作空间R^*的子空间.

对于每一点$x\in R$,有等价基本序列的某一类与之对应,即与收敛于x的所有序列的全体对应. 因为这个类包含一切项皆等于x的定常序列,所以它非空. 同时,如果$x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$及$y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$,那么

$$\rho(x,y)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

于是,每一点$x\in R$都与收敛于它的基本序列所成的类x^*相对应. 这样,我们就得到R到空间R^*内的等距映射. 以后,我们就可以对空间R本身与其在R^*中的象不加区别,并把R看作R^*的子空间.

下面证明R在R^*中处处稠密. 事实上,设x^*是R^*中的某一点且$\varepsilon>0$是任意的. 在x^*中选取一个代表,即某一基本序列$\{x_n\}$. 设N是使得对一切$n,m>N$,$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$的数. 这时当$n>N$时,

$$\rho(x_n,x^*)=\lim_{m\to\infty}\rho(x_n,x_m)\leqslant\varepsilon,$$

即点x^*的任意邻域包含R中某一点. 因此,R在R^*中的闭包就是整个R^*.

最后证明R^*的完备性. 首先指出,根据R^*的构造,对于R中的点所成的任何基本序列$x_1,x_2,\cdots x_n,\cdots$都收敛于$R^*$中的某一点,即收敛于用这个序列本身定义的点$x^*\in R^*$. 其次,因为$R$在$R^*$中完备,所以对于$R^*$中的点所成的任何基本序列$x_1^*$,$x_2^*,\cdots,x_n^*,\cdots$总可以用$R$中的点作出与它等价的序列$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$. 为此只要取$R$中使$\rho(x_n,x_n^*)<\dfrac{1}{n}$的任何一点作为$x_n$即可. 这样作出的序列$\{x_n\}$在$R$中是基本的,根据定义,它收敛于某一点$x^*\in R^*$. 但这时序列$\{x_n^*\}$也收敛于$x^*$.

§4. 压缩映射原理及其应用

1. 压缩映射原理 对于某些类型方程(例如,微分方程)解的存在性与唯一性

有关的一系列问题,可以叙述为关于相应的度量空间到其本身的某一映射的不动点的存在性与唯一性的问题. 在判别这种类型的映射下的不动点的存在性与唯一性的各种准则当中,最简单同时也最重要的是所谓压缩映射原理.

设 R 是度量空间,A 为空间 R 到其本身的映射. 如果存在数 $\alpha<1$,使得对于任意两点 $x,y\in R$ 满足不等式

$$\rho(Ax,Ay)\leqslant\alpha\rho(x,y),\tag{1}$$

则称 A 为压缩映射或简称压缩. 任何压缩映射是连续的. 事实上,如果 $x_n\to x$,那么根据(1)有 $Ax_n\to Ax$.

如果 $Ax=x$,则点 x 称为映射 A 的不动点. 换言之,不动点是这个方程 $Ax=x$ 的解.

定理 1(压缩映射原理)　在完备度量空间定义的任一压缩映射有且仅有一个不动点.

证明　设 x_0 是 R 中任意一点. 令 $x_1=Ax_0$, $x_2=Ax_1=A^2x_0$, 等等;一般地, $x_n=Ax_{n-1}=A^nx_0$.

我们来证明,序列 $\{x_n\}$ 是基本的. 事实上,为确定起见,可以认为 $m\geqslant n$. 于是有

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_m)&=\rho(A^nx_0,A^mx_0)\leqslant\alpha^n\rho(x_0,x_{m-n})\\&\leqslant\alpha^n\{\rho(x_0,x_1)+\rho(x_1,x_2)+\cdots+\rho(x_{m-n-1},x_{m-n})\}\\&\leqslant\alpha^n\rho(x_0,x_1)\{1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{m-n-1}\}\\&\leqslant\alpha^n\rho(x_0,x_1)\frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

因为 $\alpha<1$,所以上式当 n 充分大时可以任意小. 由于空间 R 的完备性,序列 $\{x_n\}$ 是基本的,因而有极限. 设

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

这时由映射 A 的连续性,

$$Ax=A\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}Ax_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x.$$

于是,不动点的存在性得证. 下面证明它的唯一性. 如果

$$Ax=x,Ay=y,$$

那么,不等式(1)可取如下的形式

$$\rho(x,y)\leqslant\alpha\rho(x,y).$$

因为 $\alpha<1$,由此得到

$$\rho(x,y)=0,\text{即 }x=y.$$

习题　举例说明,对一切 $x\neq y$ 满足条件 $\rho(Ax,Ay)<\rho(x,y)$ 的映射 A,可能连一个不动点也没有.

2. 压缩映射原理最简单的一些应用　压缩映射原理可以应用到各种类型方程解的存在性与唯一性定理的证明中. 压缩映射原理除了证明方程 $Ax=x$ 解的存在性

与唯一性外，实际上还给出求这个解的近似方法（逐次逼近法）. 我们考察下面几个简单的例子.

例 1 设 f 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上，满足利普希茨条件

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant K|x_2-x_1|$$

（其中常数 $K<1$），且把闭区间 $[a,b]$ 映射到自身内的函数. 这时 f 是压缩映射，根据上面已证明的定理，序列 $x_0, x_1=f(x_0), x_2=f(x_1), \cdots$ 收敛于方程 $x=f(x)$ 的唯一的根.

特别，如果函数在闭区间 $[a,b]$ 上有导数 $f'(x)$，并且 $|f'(x)|\leqslant K<1$，那么压缩条件满足.

图 9 与图 10 描述了在 $0<f'(x)<1$ 与 $-1<f'(x)<0$ 两种情形的逐次逼近过程.

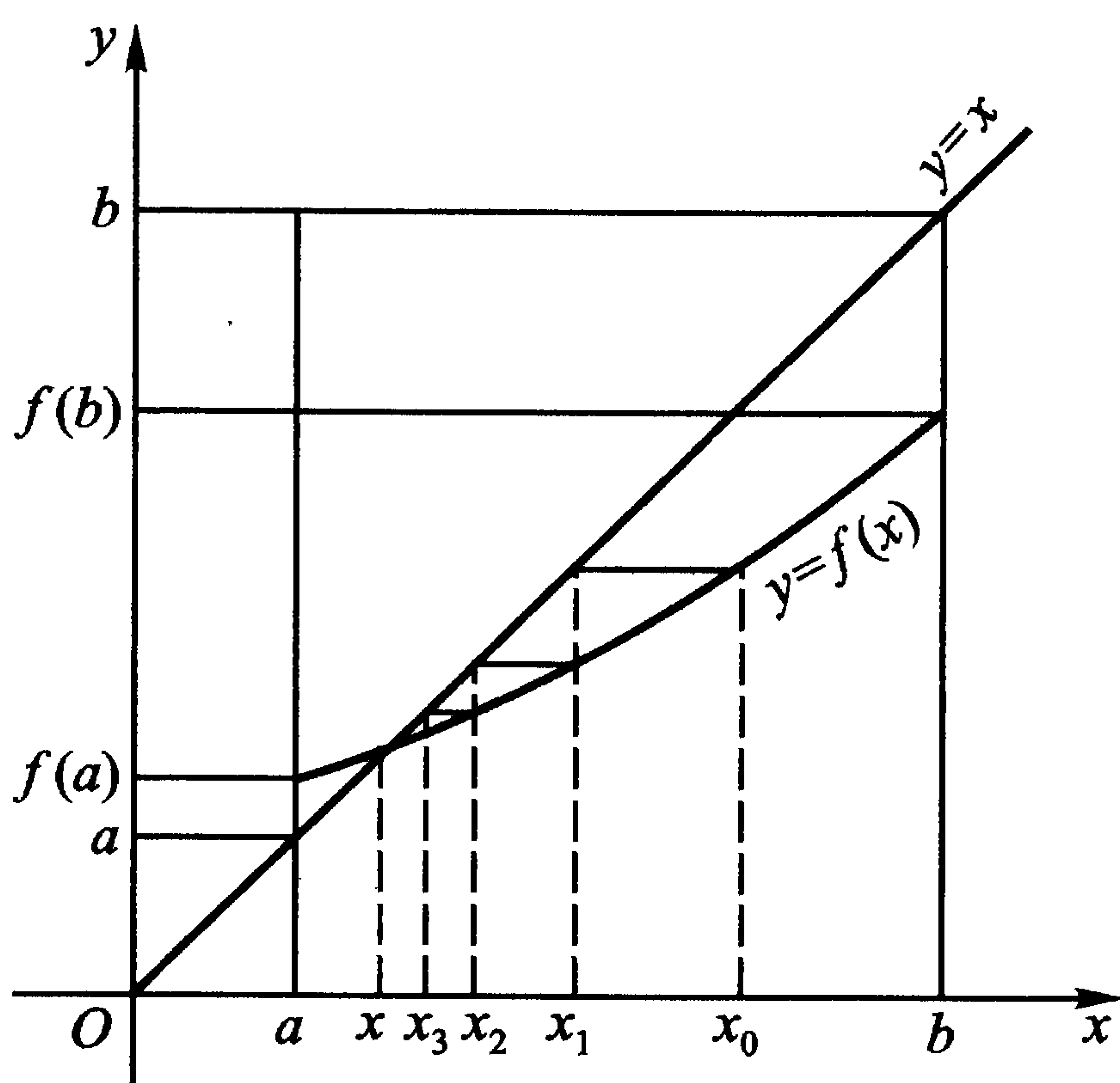


图 9

现在我们研究形如 $F(x)=0$ 的方程，并且 $F(a)<0, F(b)>0$，且在 $[a,b]$ 上 $0<K_1\leqslant F'(x)\leqslant K_2$. 我们引进函数 $f(x)=x-\lambda F(x)$，并求解与方程 $F(x)=0$（$\lambda\neq 0$ 时）等价的方程 $x=f(x)$. 因为 $f'(x)=1-\lambda F'(x)$，所以 $1-\lambda K_2\leqslant f'(x)\leqslant 1-\lambda K_1$，而且不难选择数 λ，使得可以用逐次逼近法进行求解. 这是求根方法的一种推广.

例 2 考察由线性方程组

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

给出的 n 维空间到自身内的映射 A.

如果 A 是压缩的，那么我们可以应用逐次逼近法求解方程 $x=Ax$.

在什么条件下映射 A 是压缩的？这个问题的答案与空间中度量的选择有关. 我们研究下面三个例子.

a）空间 $\mathbf{R}_\infty^n$，即 $\rho(x,y)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|$；

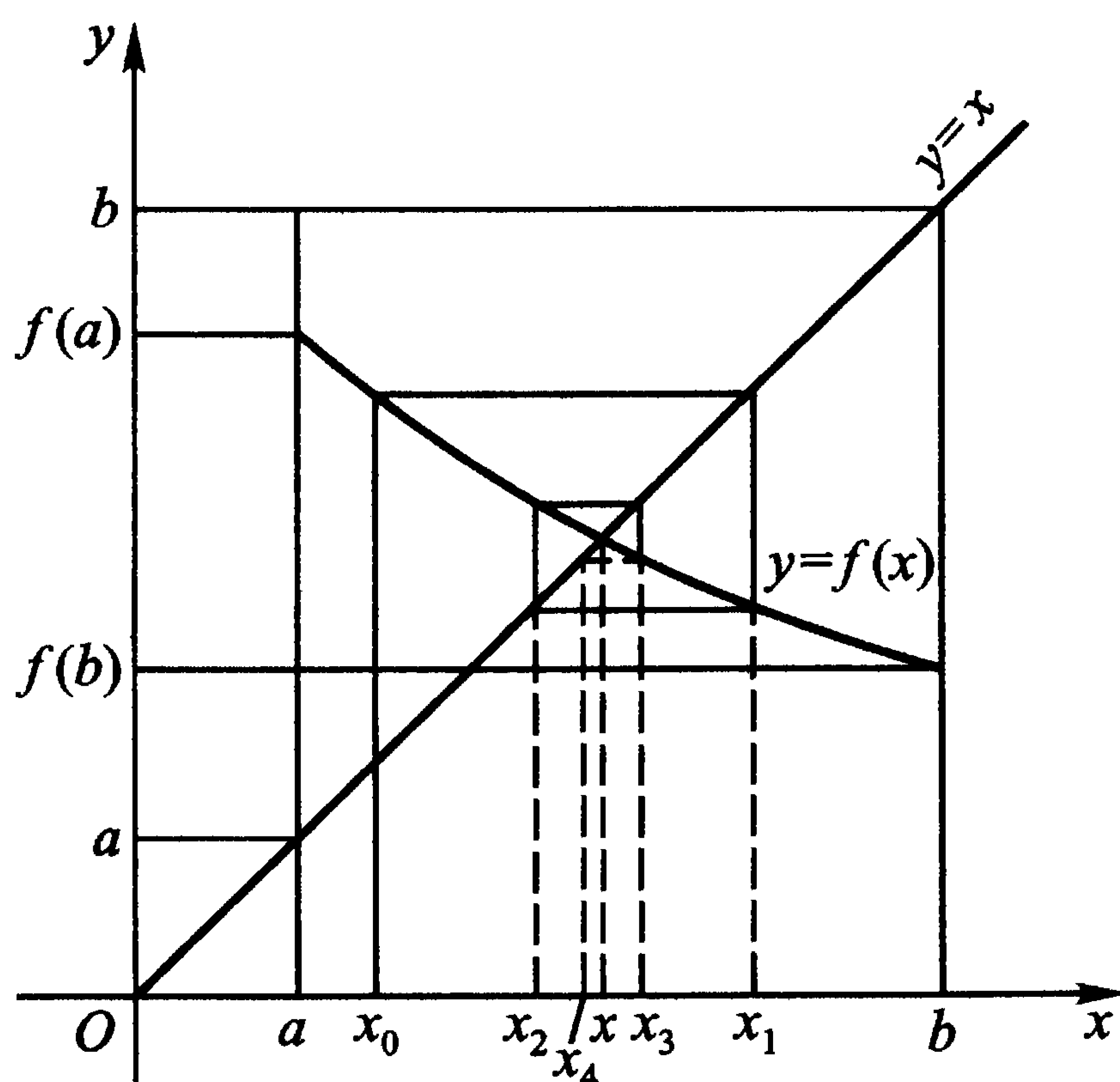


图　10

$$\rho(y',y'') = \max_i |y_i' - y_i''| = \max_i \left| \sum_j a_{ij}(x_j' - x_j'') \right|$$

$$\leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}| |x_j' - x_j''| \leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x_j' - x_j''|$$

$$= \left(\max_i \sum_j |a_{ij}| \right) \rho(x',x'').$$

由此压缩条件为

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, i = 1, \cdots, n. \tag{2}$$

b）空间 $\mathbf{R}_1^n$，即 $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$；

$$\rho(y',y'') = \sum_i |y'_i - y''_i| = \sum_i \left| \sum_j a_{ij}(x_j' - x_j'') \right|$$

$$\leqslant \sum_i \sum_j |a_{ij}| |x_j' - x_j''| \leqslant (\max_j \sum_i |a_{ij}|) \rho(x',x'').$$

由此压缩条件为

$$\sum_i |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, j = 1, \cdots, n. \tag{3}$$

c）空间 $\mathbf{R}^n$，即 $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$. 根据柯西－布尼雅柯夫斯基不等式，有

$$\rho^2(y',y'') = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}(x_j' - x_j'') \right)^2 \leqslant \left(\sum_i \sum_j a_{ij}^2 \right) \rho^2(x',x'').$$

由此压缩条件为

$$\sum_i \sum_j a_{ij}^2 \leqslant \alpha < 1. \tag{4}$$

因此,如果条件(2)—(4)中至少有一个成立[①],那么就存在一个而且只有一个点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,使得$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i$,并且这个解的逐次逼近具有下列形式:

$$
\begin{aligned}
x^{(0)} &= (x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}),\\
x^{(1)} &= (x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{(k)} &= (x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

其中

$$x_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(k-1)}+b_i,$$

而可以取$\mathbf{R}^n$中的任何一点作为$x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$.

条件(2)—(4)中的任何一个都是使得映射$y=Ax$为压缩的充分条件. 还可以证明,对于条件(2)与(3)是使映射$y=Ax$为压缩的必要条件(分别在度量a)与度量b)的意义下).

条件(2)—(4)中的任何一个,对于逐次逼近法的应用不是必要的.

如果$|a_{ij}|<1/n$,那么所有三个条件(2)—(4)都成立. 因此显然可以应用逐次逼近法.

如果$|a_{ij}|\geqslant 1/n$,那么条件(2)—(4)中的任何一个都不成立.

3. 微分方程的存在性与唯一性定理 在上一段中,我们给出了压缩映射原理应用于一维空间与n维空间中的两个简单例子. 然而,将这个原理应用于无限维泛函空间对分析学更为重要. 下面我们指出如何利用压缩映射原理,得到某些类型的微分方程与积分方程解的存在性与唯一性定理.

(1) **柯西问题** 设具有初始条件

$$y(x_0)=y_0 \tag{5}$$

的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \tag{6}$$

同时函数f在包含点(x_0,y_0)的某一平面区域G内有定义而且连续,又在该区域内关于y满足利普希茨条件:

---

① 特别,从条件(2)—(4)中的任何一个都可推出

$$\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant M|y_1-y_2|.$$

这时,我们来证明,附有初始条件(5)的方程(6),在某一闭区间 $|x-x_0|\leqslant d$ 上存在一个而且只有一个解 $y=\varphi(x)$(皮卡(Picard)定理).

方程(6)与初始条件(5)合在一起等价于积分方程

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

由于函数 f 的连续性,在包含点 (x_0,y_0) 的某一区域 $G'\subset G$ 内,有 $|f(x,y)|\leqslant K$. 我们选取这样的 $d>0$,满足条件:

1) 如果 $|x-x_0|\leqslant d$, $|y-y_0|\leqslant Kd$,那么 $(x,y)\in G'$;

2) $Md<1$.

我们把在闭区间 $|x-x_0|\leqslant d$ 上定义的,且满足条件 $|\varphi(x)-y_0|\leqslant Kd$ 的一切连续函数 φ 所成的空间记作 C^*,其中度量为 $\rho(\varphi_1,\varphi_2)=\max\limits_{x}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|$.

因为 C^* 是 $[x_0-d,x_0+d]$ 上一切连续函数的完备空间的闭子空间,所以空间 C^* 是完备的. 我们考虑由式

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t$$

定义的映射 $\psi=A\varphi$,其中 $|x-x_0|\leqslant d$. 这个映射变完备空间 C^* 为自身且在其中是压缩的. 事实上,设 $\varphi\in C^*$, $|x-x_0|\leqslant d$. 这时,

$$|\psi(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t\right|\leqslant Kd.$$

因而,$A(C^*)\subset C^*$. 此外,

$$\begin{aligned}|\psi_1(x)-\psi_2(x)|&\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(t,\varphi_1(t))-f(t,\varphi_2(t))|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant Md\max_{x}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|.\end{aligned}$$

因为 $Md<1$,所以 A 是压缩的.

由此推得,方程 $\varphi=A\varphi$(即方程(7))在空间 C^* 中有一解且仅有一解.

(2) *方程组的柯西问题*　设给定附有初始条件

$$\varphi_i(x_0)=y_{0i},i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

的微分方程组

$$\varphi_i'(x)=f_i(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)),i=1,2,\cdots,n \tag{9}$$

同时函数 f_i 在包含点 $(x_0,y_{01},\cdots,y_{0n})$ 的空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的某一区域 G 中有定义而且连续,并满足利普希茨条件

$$|f_i(x,y_1^{(1)},\cdots,y_n^{(1)})-f_i(x,y_1^{(2)},\cdots,y_n^{(2)})|\leqslant M\max_{1\leqslant i\leqslant n}|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}|.$$

这时,我们来证明,初值问题(8),(9)在某一闭区间 $|x-x_0|\leqslant d$ 上,存在一个且只有一个解,即在上述闭区间上存在一个且只有一个满足方程(9)及初始条件(8)的函数组 φ_i.

方程组(9)与初始条件(8)合在一起等价于积分方程组

$$\varphi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\mathrm{d}t, i = 1,\cdots,n. \tag{10}$$

由于函数f_i 的连续性,所以它在包含点$(x_0,y_{01},\cdots,y_{0n})$的某一区域 $G'\subset G$ 内有界,即存在常数 K,使得

$$|f_i(x,y_1,\cdots,y_n)| \leqslant K.$$

我们选取这样的 $d>0$,使得下列条件成立:

1) 如果 $|x-x_0|\leqslant d$, $|y_i-y_{0i}|\leqslant Kd \quad (i=1,\cdots,n)$,那么,

$$(x,y_1,\cdots,y_n) \in G';$$

2) $Md<1$.

我们考察空间 C_n^*,它的元素是定义在闭区间 $|x-x_0|\leqslant d$ 上,并且是由满足条件 $|\varphi_i(x)-y_{0i}|\leqslant Kd$ 的 n 个连续函数 $\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$组成的. 其度量由下式定义:

$$\rho(\varphi,\psi) = \max_{x,i}|\varphi_i(x) - \psi_i(x)|.$$

上面引进的空间 C_n^* 是完备的. 由方程组

$$\psi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\mathrm{d}t$$

给出的映射 $\psi=A\varphi$ 是完备空间 C_n^* 到自身的一个压缩映射. 事实上,

$$\begin{aligned}&\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x)\\ &= \int_{x_0}^{x}[f_i(t,\varphi_1^{(1)}(t),\cdots,\varphi_n^{(1)}(t)) - f_i(t,\varphi_1^{(2)}(t),\cdots,\varphi_n^{(2)}(t))]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因而

$$\max_{x,i}|\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x)| \leqslant Md\max_{x,i}|\varphi_i^{(1)}(x) - \varphi_i^{(2)}(x)|.$$

因为 $Md<1$,所以映射 A 是压缩的.

由此推出,算子方程 $\varphi=A\varphi$ 在空间 C_n^* 中有一解且仅有一解.

4. 压缩映射原理应用于积分方程

(1) *弗雷德霍姆(Fredholm)方程* 现在我们应用压缩映射法来证明第二类弗雷德霍姆非齐次线性积分方程

$$f(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y + \varphi(x) \tag{11}$$

解的存在性与唯一性,其中 K(称为核)与 φ 是给定的函数,f是要求的函数,而 λ 是任意参数.

我们将要看到,压缩映射法只对足够小的参数值 λ 有效.

我们假定 $K(x,y)$与 $\varphi(x)$在 $a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b$ 上连续,因此 $|K(x,y)|\leqslant M$. 我们考虑由式

$$g(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y + \varphi(x)$$

给出的完备空间 $C[a,b]$到自身的映射 $g=Af$. 我们有

$$\rho(g_1,g_2) = \max|g_1(x) - g_2(x)| \leqslant |\lambda| M(b-a)\max|f_1(x) - f_2(x)|.$$

因而,当 $\lambda < \frac{1}{M(b-a)}$ 时,映射 A 是压缩的.

从压缩映射原理推知,对于 $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ 的一切 λ,弗雷德霍姆方程有唯一的连续解. 逐次逼近于这个解的函数 $f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$ 具有形式:

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y + \varphi(x),$$

其中可选取任意连续函数作为 $f_0(x)$.

(2) 非线性积分方程　压缩映射原理可以应用于形如

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y;f(y))\,\mathrm{d}y + \varphi(x) \tag{12}$$

的非线性积分方程,其中 K 与 φ 是连续函数;此外,核 K 关于它的"泛函"变量满足利普希茨条件:

$$|K(x,y;z_1) - K(x,y;z_2)| \leqslant M|z_1 - z_2|.$$

此时,对于由公式

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,y;f(y))\,\mathrm{d}y + \varphi(x) \tag{13}$$

给出的完备空间 $C[a,b]$ 到自身的映射 $g = Af$,不等式

$$\max|g_1(x) - g_2(x)| \leqslant |\lambda| M(b-a)\max|f_1(x) - f_2(x)|$$

成立,其中 $g_1 = Af_1, g_2 = Af_2$. 因而,当 $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ 时,映射 A 是压缩的.

(3) 沃尔泰拉(Volterra)方程　最后我们研究沃尔泰拉型积分方程

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + \varphi(x). \tag{14}$$

这个积分方程与弗雷德霍姆方程不同之处在于积分上限为变量 x. 如果我们给函数 K 补充定义:当 $y > x$ 时,$K(x,y) = 0$. 那么,沃尔泰拉方程形式上可看作弗雷德霍姆方程的特殊情形.

但是,在讨论弗雷德霍姆积分方程的情形时,我们当时不得不限制参数 λ 取足够小的值. 然而应用压缩映射原理(及逐次逼近法)于沃尔泰拉方程时,对于一切 λ 值却是无所限制的. 确切地说,就是下面所说的压缩映射原理的拓广.

设 A 是使得它的某次幂 $B = A^n$ 为完备度量空间 R 到自身的压缩连续映射. 这时方程

$$Ax = x$$

有且仅有一解.

事实上,设 x 是映射 B 的不动点,即 $Bx=x$. 我们有

$$Ax = AB^k x = B^k Ax = B^k x_0 \to x \quad (k \to \infty).$$

因为 B 是压缩的,所以对任一点 $x_0 \in R$,序列 $Bx_0, B^2x_0, B^3x_0, \cdots$ 收敛于映射 B 的不动点 x. 因而,

$$Ax = x.$$

这个不动点是唯一的,因为关于 A 的每一个不动点也是关于压缩映射 A^n 的不动点,而压缩映射 A^n 的不动点只可能是一个.

现在我们再来证明映射

$$Af(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)f(y)\mathrm{d}y + \varphi(x)$$

的某次幂是压缩的. 设 f_1 与 f_2 为闭区间 $[a,b]$ 上的两个连续函数. 这时

$$\begin{aligned}|Af_1(x) - Af_2(x)| &= |\lambda| \left|\int_a^x K(x,y)(f_1(y) - f_2(y))\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant |\lambda| M(x-a)\max|f_1(x) - f_2(x)|,\end{aligned}$$

其中 $M = \max|K(x,y)|$. 由此

$$|A^2f_1(x) - A^2f_2(x)| \leqslant |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2}\max|f_1(x) - f_2(x)|.$$

一般地,

$$|A^nf_1(x) - A^nf_2(x)| \leqslant |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!}m \leqslant |\lambda|^n M^n m \frac{(b-a)^n}{n!},$$

其中 $m = \max|f_1(x) - f_2(x)|$.

对于任意值 λ,可以选择这样大的数 n,使得

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1.$$

此时,映射 A^n 是压缩的. 于是,沃尔泰拉方程(14)对任何 λ 都有解,而且还是唯一的.

§5 拓扑空间

1. 拓扑空间的定义与例子 前面我们引进了度量空间理论的基本概念(如极限点、接触点、集的闭包等),这些概念都是基于邻域概念的,或实质上是基于开集概念来引进的. 后两个概念(邻域,开集)同样地也是在所考察的空间中借助于给定的度量来定义的. 但是,我们也可以从另一种方法入手,不利用给定集 R 的度量而直接借助于公理在 R 中定义开集族. 这种方法保证了更多的运算自由,从而使我们得到拓扑空间. 度量空间虽然也很重要,但它已成为某种特殊的情形.

定义 设 X(某一个集)是“空间承载子”,τ是 X 的子集 G 所成的任一集族. 如果

τ满足下列两条公理：

1°　集 X 本身与空集$\varnothing$皆属于τ，

2°　τ中任意多个（有限个或无限个）集的和 $\bigcup_{\alpha} G_\alpha$ 及任意有限个集的交 $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ 都属于τ，

则称τ为 X 中的拓扑.

集 X 与在其中给定的拓扑τ，即偶(X,τ)称为拓扑空间.

凡属于集族τ的集皆称为开集.

如同度量空间是点集——“承载子”和在此点集引入度量的总体一样，拓扑空间是点集和在此点集引入拓扑的全体. 因此，给定拓扑空间就意味着给出了某集 X 并在其中给出了拓扑τ，亦即表明 X 中的那些子集都被认为是开的.

显然，对同一集 X 可以引进不同的拓扑，从而把它变为不同的拓扑空间. 同时，我们把所有相同的拓扑空间(X,τ)用同一个字母 T 表示. 拓扑空间的元素称为点.

开集 G 的余集 $T\setminus G$ 称为拓扑空间 T 的闭集. 利用对偶原理（第一章 §1），从公理 1°与 2°可推出相应的两条性质：

1. 空集$\varnothing$与全空间 T 是闭的.

2. 任意多个（有限个或无限个）闭集的交与任意有限个闭集的和也是闭的.

根据上述定义自然要在每一拓扑空间中引进邻域、接触点、集的闭包等概念，即：

我们把包含点 $x\in T$ 的任一开集 $G\subset T$ 称为点 x 的邻域；如果点 $x\in T$ 的任一邻域都至少包含 $M\subset T$ 中的一点，则点 x 称为集 M 的接触点；如果点 x 的任一邻域都至少包含 M 中异于 x 的一点，则称 x 为集 M 的极限点；集 M 的一切接触点的全体称为集 M 的闭包并记作$[M]$. 不难证明（这个证明留给读者），M 为闭集（上面我们把它作为开集的余集来定义）的充要条件为$[M]=M$. 也与度量空间的情形一样，$[M]$是包含 M 的最小闭集.

习题　证明：用拓扑定义的闭包$[M]$的运算具有 §2 定理 1 所说的性质 1)—4).

例 1　根据 §2 定理 3′，任一度量空间中的开集满足拓扑空间定义的公理 1°与 2°. 因此，任一度量空间也是拓扑空间.

例 2　设 T 是任意集. 我们将假定它的一切子集皆是开的. 这时公理 1°与 2°显然成立，亦即我们事实上得到一个拓扑空间. 在这个空间中的一切集同时既是开的又是闭的，也就是说其中每一个集与其闭包相合. 例如，§1 例 1 中所指的度量空间的离散拓扑就具有这种性质.

例 3　作为另一种极端的情形，我们来研究任意集 X 中只由全空间 X 与空集$\varnothing$组成的平凡拓扑. 这里任一非空集的闭包都是全空间 X. 这样的拓扑空间可称为“黏点空间（пространство слипщихся точек）”.

例 4　设 T 是由两点 a 与 b 组成的空间，同时我们认为全空间 T、空集以及由一

个点 b 组成的集都是开集. 这时公理 1°与 2°成立. 在这个空间(常称为两点连通空间)中,这些子集如全空间 T、空集与点 a 都是闭集. 单点集 $\{b\}$ 的闭包是全空间 T.

习题 在由两个,三个,四个以及五个点组成的空间 X 中构造一切拓扑.

2. 拓扑的比较 设在同一个承载子 X 上给定两个拓扑τ_1与τ_2(从而确定了两个拓扑空间 $T_1=(X,\tau_1)$ 与 $T_2=(X,\tau_2)$). 如果集族τ_2包含在τ_1中,则称拓扑τ_1比拓扑τ_2较强(或较细). 关于拓扑τ_2,这时就说它比τ_1较弱(或较粗).

在集 X 中所有可能的拓扑之总和可按自然方式引进偏序性(如果拓扑τ_2比拓扑τ_1较弱,那么τ_2前于τ_1). 其中由一切开集(例 2)组成的拓扑乃是这一拓扑总和中的极大元素,而只由全空间 X 与空集$\varnothing$两个开集(例 3)组成的拓扑却是这一拓扑总和中的极小元素.

定理 1 X 中任意一组拓扑的交 $\tau=\bigcap_\alpha \tau_\alpha$ 仍是 X 中的拓扑,这个拓扑τ较拓扑τ_α中的任何一个都弱.

证明 显然, $\bigcap_\alpha \tau_\alpha$包含 X 与$\varnothing$. 其次,从对每一个 τ_α所取的任意多个和与有限个交是封闭的推知,$\tau=\bigcap_\alpha \tau_\alpha$ 具有定理所说的性质.

推论 设 $\mathfrak{B}$ 是集 X 的任意一组子集,那么在 X 中存在包含 $\mathfrak{B}$ 的极小拓扑.

事实上,存在包含 $\mathfrak{B}$ 的拓扑(例如,在其中所有 $A\subset X$ 为开集的拓扑即是包含 $\mathfrak{B}$ 的拓扑). 包含 $\mathfrak{B}$ 的一切拓扑的交就是要求的拓扑. 这个极小拓扑称为由族 $\mathfrak{B}$ 生成的拓扑,并记作$\tau(\mathfrak{B})$.

设 X 是任一集而 A 是它的子集. 我们把形如 $A\cap B, B\in\mathfrak{B}$ 的子集组成的族 $\mathfrak{B}_A$ 称为集族 $\mathfrak{B}$ 在子集 A 上的迹. 容易看出,(在 X 中给定的)拓扑τ(在 A 上)的迹是 A 中的拓扑τ_A. 因此,任何拓扑空间的任一子集 A 仍是拓扑空间. 拓扑空间(A,τ_A)称为原拓扑空间(X,τ)的子空间. 显然,X 中两个不同的拓扑τ_1与τ_2可能在 $A\subset X$ 中生成相同的拓扑. 拓扑τ_A称为 A 中的相对拓扑.

3. 确定邻域族. 基. 可数性公理 我们已经看到,在空间 T 中给出一个拓扑,这就意味着在 T 中给出一组开集. 但在一些具体问题中不给出所有的拓扑而只给出它的某一部分常是方便的,亦即只给出某一组开集来唯一确定所有开子集的全体. 例如,在度量空间中,我们首先引进了开球(ε 邻域)的概念,然后把每一点连同其某一球邻域都包含在内的那种集定义为开集. 换句话说,度量空间中的集是开的,当且仅当它可表为(有限多个或无限多个)开球的和. 特别,直线上的集是开的,当且仅当它可表为开区间之和的形式. 通过这些讨论使我们得到拓扑空间的基的重要概念.

定义 设 $\mathscr{G}$为空间 T 的开子集族,如果空间 T 中任一开集可表为 $\mathscr{G}$中一些(有限多个或无限多个)集的和,则称 $\mathscr{G}$为空间 T 的拓扑基.

例如,所有开球(具有任意中心与任意半径)的全体构成度量空间的基. 特别,所有开区间族是直线的基. 仅具有有理端点的开区间也构成直线上的基, 因为任意开

区间均可表为这样一些开区间的和的形式,这就意味着直线上任意开集也可以表为这样一些开区间的和的形式.

于是,我们可以指定空间 T 的某一基 $\mathscr{G}$ 来给出 T 的拓扑 τ;这个拓扑与表为 $\mathscr{G}$ 的和集所成的集族相合.

在拓扑空间 $T=(X,\tau)$ 中,任一基 $\mathscr{G}$ 具有以下两条性质:

1) 任意一点 $x \in X$ 至少属于 $\mathscr{G}$ 中的一个集 G;

2) 如果 $x \in G_1 \cap G_2 (G_1, G_2 \in \mathscr{G})$,那么存在 $G_3 \in \mathscr{G}$,使得

$$x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2.$$

事实上,性质 1) 只不过表示整个 X 是开的,它一定可表为 $\mathscr{G}$ 中一些集的和;由 $G_1 \cap G_2$ 是开的,因而它是基的一些元素之和推得性质 2).

反之,设 X 是任一集而 $\mathscr{G}$ 是 X 中具有性质 1) 与 2) 的子集族. 这时,可表为 $\mathscr{G}$ 的和集的集族构成 X 中的拓扑(也就是说它满足拓扑空间定义的公理 1°与 2°).

事实上,设 $\tau(\mathscr{G})$ 为 X 中所有可表为 $\mathscr{G}$ 的集之和的全体. 这时空集①与整个 X 属于 $\tau(\mathscr{G})$,且 $\tau(\mathscr{G})$ 中任意多个集的和也属于 $\tau(\mathscr{G})$. 我们来证明,$\tau(\mathscr{G})$ 中任意有限个集的交属于 $\tau(\mathscr{G})$. 我们只要对两个集来证明就可以了. 设 $A = \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ 及 $B = \bigcup\limits_{\beta} G_\beta$,这时 $A \cap B = \bigcup\limits_{\alpha,\beta} (G_\alpha \cap G_\beta)$. 由条件 2) 推出,任一 $G_\alpha \cap G_\beta$ 都属于 $\tau(\mathscr{G})$. 所以 $A \cap B$ 也属于 $\tau(\mathscr{G})$.

于是,我们得到以下结果.

定理 2　集 X 的子集 G 所成的集族 $\mathscr{G}$ 是 X 中的某一拓扑基的充要条件为 $\mathscr{G}$ 具有性质 1) 与 2).

现在假定在空间 T 中给出某一确定的拓扑 τ. 在 T 中取具有性质 1) 与 2) 的开集族 $\mathscr{G}$ 作为它的基,显然我们得到 T 中的一个拓扑 $\tau(\mathscr{G})$,这个拓扑或者与原来的拓扑相合,或者比原来的拓扑更弱. 下面我们来建立 $\mathscr{G}$ 正好产生给定拓扑 τ 的条件.

定理 3　族 $\mathscr{G} \subset \tau$ 是给定拓扑 τ 的基的充要条件为它满足下述条件:

3) 对于任一开集 G 及每一点 $x \in G$,存在 $G_x \in \mathscr{G}$ 使得 $x \in G_x \subset G$.

证明　如果条件 3) 成立,那么每一开集 G 都可表为如下的形式:

$$G = \bigcup_{x \in G} G_x,$$

也就是说 $\mathscr{G}$ 是拓扑 τ 的基. 反之,如果 $\mathscr{G}$ 是拓扑 τ 的基,那么,每一 $G \in \tau$ 都可表为 $\mathscr{G}$ 中集之和的形式. 这时,对每一点 $x \in G$,可以求得 $G_x \in \mathscr{G}$ 使得 $x \in G_x \subset G$.

习题　设 $\mathscr{G}_1$ 与 $\mathscr{G}_2$ 为 X 中两个基(即满足两条性质 1) 与 2) 的两个集族),而 τ_1 与 τ_2 为由它们确定的拓扑. 证明:$\tau_1 \subset \tau_2$ 的充要条件为对于任意 $G_1 \in \mathscr{G}_1$ 及任意一点 $x \in G_1$,存在 $G_2 \in \mathscr{G}_2$ 使得 $x \in G_2 \subset G_1$.

① 它作为族 $\mathscr{G}$ 元素的空集的和而得到的.

例如,利用定理 3 易证,在任一度量空间中所有开球的全体构成度量空间的拓扑基. 半径为有理数的所有球的全体也是度量空间的拓扑基. 再如,所有有理开区间(即具有有理端点的开区间)的全体可以作为直线上的基.

具有可数基的空间,也就是在其中至少存在一个由至多可数个集组成的基的这种空间,构成重要的一类拓扑空间. 我们把具有可数基的空间也称为具有第二可数性公理的空间.

如果在拓扑空间 T 中有可数基,那么在 T 中必有可数处处稠密集,即这样的可数集,其闭包是全空间 T. 事实上,设 $\{G_n\}$ 是 T 中的可数基. 我们在这个基的任一元素中任取一点 x_n. 可数集 $X=\{x_n\}$ 在 T 中处处稠密,因为不然的话,非空开集 $G=T\setminus[X]$ 不含 X 中任何一个点,这是不可能的,因 G 是族 $\{G_n\}$ 中某些集的和,而 $x_n\in G_n$.

像度量空间一样,我们把具有可数处处稠密集的拓扑空间称为可分的.

上面证明过的论断的逆命题对度量空间是正确的:

如果度量空间 R 是可分的,那么在 R 中就有可数基. 事实上,像开球 $B(x_n, 1/m)$ 就构成 R 中的可数基,其中 $\{x_n\}$ 是可数处处稠密集,而 n 与 m 独立地取遍所有自然数. 于是,下面的定理成立:

定理 4 度量空间 R 具有可数基的充要条件为它是可分的.

根据这个定理,所有可分度量空间的例子也可以看作具有第二可数性公理度量空间的例子. 对于不可分的有界序列空间(参见 §1 例 9),它就没有可数基.

注 一般说来,定理 4 对任意(非度量的)拓扑空间是不正确的:可以指出没有可数基的可分空间的例子. 下面我们就来说明这一点. 对于度量空间 R 的每一点 x,存在它的邻域可数族 $\mathfrak{U}$(例如,开球族 $B(x,1/n)$),具有以下性质:对于任一包含点 x 的开集 G,均可找到族 $\mathfrak{U}$ 中的邻域,使得它完全包含在 G 中. 这样的邻域族称为点 x 的确定邻域族.

如果拓扑空间 T 的点 x 有可数的确定邻域族,则说在这点满足第一可数性公理. 如果空间 T 的每一点皆有可数的确定邻域族,则空间 T 称为具有第一可数性公理的空间.

任何度量空间,甚至不可分的度量空间,它们都自动满足第一可数性公理. 但是,在任意拓扑空间中(即使由可数个点组成的空间),第一可数性公理可能不成立. 因此,我们没有把度量空间中关于从可数处处稠密集的存在推得该空间可数基的存在的讨论,搬到任意拓扑空间上去. 即使具有第一可数性公理的可分拓扑空间,它也可能没有可数基.

设 X 是一个集而 $\{M_\alpha\}$ 为一集族. 如果 $\bigcup\limits_{\alpha} M_\alpha\supset X$,则 $\{M_\alpha\}$ 称为 X 的覆盖. 由开(闭)集组成的拓扑空间 T 的覆盖称为开(闭)覆盖. 如果覆盖 $\{M_\alpha\}$ 本身的某一部分 $\{M_{\alpha_i}\}$ 构成空间 T 的一个覆盖,则称 $\{M_{\alpha_i}\}$ 为覆盖 $\{M_\alpha\}$ 的子覆盖.

定理 5 如果 T 是具有可数基的拓扑空间,那么从它的任一开覆盖中可以选出

有限或可数的子覆盖.

证明　设$\{O_\alpha\}$是空间T的某一开覆盖. 这时任一点$x \in T$属于某一O_α. 设$\{G_n\}$是T中的可数基. 对每一点$x \in T$,存在可数基的元素$G_n(x)$,使得$x \in G_n(x) \subset O_\alpha$. 这样选取的集$G_n(x)$的全体是有限或可数的覆盖,从而覆盖全空间$T$. 对于每一个$G_n(x)$,选取包含它的集$O_\alpha$中的一个,我们就得到有限或可数的覆盖$\{O_\alpha\}$的子覆盖. 定理证毕.

按照拓扑空间的定义,空集与全空间T同时既是开的又是闭的. 在其中没有其他同时既是开的又是闭的集的空间称为连通空间. 直线$\mathbf{R}^1$乃是连通空间中最简单的一个例子. 而如果从$\mathbf{R}^1$中去掉一个或一些点,那么剩下的空间已不再是连通的了.

4. T中的收敛序列　大家熟悉的度量空间中收敛序列的概念容易搬到拓扑空间. 这就是说,设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为T中的点列,如果点x的任一邻域含有这个序列从某项开始的所有点,则称T中的这个点列收敛于x. 这个收敛性概念在度量空间中起着奠基性的作用,而在拓扑空间中却不是这样. 因为在度量空间R中,点x是集$M \subset R$的接触点的充要条件为M中存在收敛于x的序列,而在拓扑空间中这一般说来不成立. 在拓扑空间T中,从x是M的接触点(即$x \in [M]$)不能推出在M中存在收敛于x的序列. 作为示例,我们取闭区间$[0,1]$,并认为它的子集(及空集)是开的而这些子集是从$[0,1]$中去掉任意有限个或可数个点得到的. 不难证明,这样取的子集族此时满足公理1°与2°(§5第1段),也就是说我们得到一个拓扑空间. 在这个拓扑空间中,只有定常序列(即从某一下标开始,其元素都相同:$x_n = x_{n+1} = \cdots$的序列)才收敛(请读者自行证明!). 另一方面,例如,如果我们取半开区间$(0,1]$作为M,那么点0就是M的接触点(读者验证之!),但M中的任一点列在上述拓扑空间中却不收敛于0.

如果我们考察的不是任意拓扑空间,而是具有第一可数性公理的空间(即空间T的每一点x皆存在可数的确定邻域族),那么,收敛序列"具有恢复自身的权利". 这时,任意集$M \subset T$的每一接触点就可以看作M的某一点列的极限. 事实上,设$\{O_n\}$是点x的可数的确定邻域族. 可以认为$O_{n+1} \subset O_n$(不然的话,我们用$\bigcap_{k=1}^{n} O_k$代替O_n). 设x_k是M中属于$O_k(k=1,2,\cdots)$的任意一点. 这样的x_k显然存在,否则x不是M的接触点. 于是,序列$\{x_k\}$收敛于x.

正如我们已经指出,所有度量空间都满足第一可数性公理. 所以我们也可以对度量空间所有这样的概念,如闭包,接触点等,用收敛序列的术语来叙述.

5. 连续映射. 同胚　在§1中我们对度量空间引进的连续映射概念自然地可拓广到任意拓扑空间上去.

定义　设X, Y为两个拓扑空间,f为空间X到空间Y内的映射. 如果对于点$y_0 = f(x_0)$的任一邻域U_{y_0},可以找到点x_0的邻域V_{x_0},使得$f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$,则称映射$f$在

点 x_0 连续. 如果映射 $f:X\to Y$ 在每一点 $x\in X$ 都连续,则称 f 为连续的. 特别,拓扑空间 X 到数直线内的连续映射就叫做该空间的连续函数.

不难验证,对于度量空间,这个定义实际上就是在 §1 中给出的,变一个度量空间为另一个度量空间内映射的连续性定义.

我们所给出的定义具有"局部"特性. 通过映射 f 在每一点的连续性来定义 f 在全空间 X 上的连续性. 这就是说,一个拓扑空间到另一个拓扑空间内映射的连续性概念可以用开集的术语来叙述,亦即用这些空间的扑拓术语来叙述.

定理 6 拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射 f 是连续的充要条件为任一开集 $G\subset Y$ 的原象 $\Gamma=f^{-1}(G)$(在 X 中)是开的.

证明 必要性. 设映射 f 是连续的, G 为 Y 中的开集. 我们来证明 $\Gamma=f^{-1}(G)$ 是开的. 设 x 是集 Γ 的任一点而 $y=f(x)$. 这时 G 成为点 y 的邻域. 按照连续性定义,可以找到点 x 的邻域 V_x,使得 $f(V_x)\subset G$,亦即 $V_x\subset\Gamma$. 换句话说,如果 $x\in\Gamma$,则存在这点的邻域 V_x,它包含在 Γ 中. 这意味着 Γ 是开的.

充分性. 设当 $G\subset Y$ 是开的时, $\Gamma=f^{-1}(G)$ 也是开的. 我们来考察任一点 $x\in X$ 及点 $y=f(x)$ 的任意邻域 U_y. 因为 $y\in U_y$,所以点 x 属于集 $f^{-1}(U_y)$. 这个开集也成为点 x 的邻域,它的象包含在 U_y 中.

注 设 X 与 Y 皆是任意集而 f 是 X 到 Y 内的映射. 如果在 Y 中给定某一拓扑 τ(即包含 $\varnothing$, Y 以及关于取任意多个和与有限个交为封闭的集族),那么拓扑 τ 的原象(即所有集 $f^{-1}(G)$ 的全体,其中 $G\in\tau$)是 X 中的拓扑.

为了证明这个论断,只要回忆关于原象的和集与交集的定理(参见第一章 §2). 我们记 X 中的拓扑为 $f^{-1}(\tau)$. 如果这时 X 与 Y 是具有拓扑 τ_x 与 τ_y 的拓扑空间,那么定理 6 可叙述为:映射 $f:X\to Y$ 是连续的,而且仅当拓扑 τ_x 较拓扑 $f^{-1}(\tau_y)$ 强.

从余集的原象是原象的余集推出定理 6 的对偶定理.

定理 6′ 拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射 f 是连续的充要条件为 Y 中任一闭集的原象(在 X 中)是闭的.

不难验证,开(闭)集在连续映射下的象不一定是开(闭)的. 例如,我们考察半开区间 $X=[0,1)$ 到圆周上的映射. 这时,它把 $[0,1)$ 内的闭集 $[1/2,1)$ 变为圆周上的非闭集(图 11).

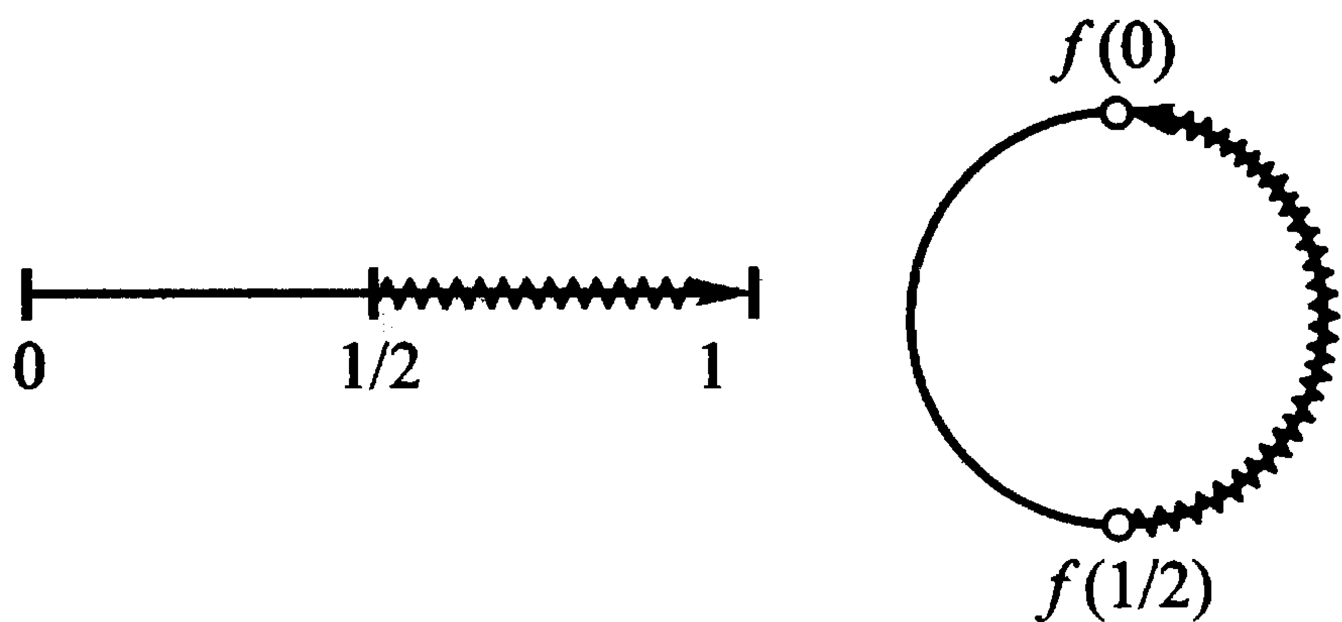


图 11

如果映射把任一开集仍变为开集,则称此映射为开的. 如果映射把任一闭集仍

变为闭集,则称此映射为闭的.

对于连续映射,也成立类似于大家所熟悉的分析学中关于复合函数连续性的定理.

定理 7　设 X,Y 及 Z 为拓扑空间,f 与 φ 分别为 X 到 Y 内与 Y 到 Z 内的连续映射. 这时,空间 X 到空间 Z 内的映射 $x\mapsto\varphi(f(x))$ 也是连续的.

从定理 6 可立即得到这个定理的证明.

在 §1 中我们对度量空间引进的同胚概念,也可以拓广到拓扑空间上去,也就是说,如果拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的映射 f 是一对一的、双方连续的,则 f 称为同胚映射;这时空间 X 与 Y 称为同胚的. 同胚空间具有同样的拓扑性质,而且从拓扑的观点来看,它们简直可以看作同一空间的两种摹本. 因此,在两个同胚空间中的拓扑,可以相互作为象和原象. 同胚关系是自反的,对称的和传递的. 所以任何拓扑空间的总体可以分成彼此同胚的空间的两两不相交的类.

注　两个相互同胚的度量空间所具有的度量性质可以是不同的①. 所以,其中一个空间可以是完备的,而另一个却不是. 例如,开区间 $(-\pi/2,\pi/2)$ 同胚于数直线(对应的同胚可由函数 $x\to\operatorname{tg}x$ 给出),但这时直线是完备空间,而开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 却不是.

6. 分离性公理　虽然度量空间中的许多基本概念不难拓广到任意拓扑空间上去,但从分析学的任务的观点来看,这种空间毕竟是过于一般的对象. 这里出现本质上不同于度量空间中可能发生的情况. 例如,我们已经看到,在拓扑空间中有限点集可能不是闭的(§5 第 1 段例 4),等等.

在诸拓扑空间中,可分出其性质与度量空间更为相近的空间来. 为此还需要对拓扑空间的公理 1°与 2°(§5 第 1 段)添加某些补充条件. 例如,可数性公理就可以作为这样的条件. 这样就可能根据收敛性概念来研究空间的拓扑. 另外一些性质的要求组成另一重要类型的补充条件,即所谓分离性公理. 下面我们依次列举逐渐加强的分离性公理.

公理 T_1(第一分离性公理)　对于空间 T 任何两个不同的点 x 与 y,存在点 x 的邻域 O_x(不包含点 y)以及存在点 y 的邻域 O_y(不包含点 x).

满足这个公理的空间称为 T_1 空间. 两点连通空间可以作为拓扑空间但不是 T_1 空间的例子.

在 T_1 空间中任何点都是闭集. 事实上,如果 $x\neq y$,则存在点 y 的邻域 O_y(不包含 x),即 $y\notin[x]$. 所以 $[x]=x$. 因此,在 T_1 空间中任何有限点集也是闭的. 并且不难验证,公理 T_1 恰恰等价于所有这些集的闭性要求.

---

① 空间 R 的度量唯一确定它的拓扑,但反之不然;在 X 中给定不同的度量可以得到 $R(X,\rho)$ 中同样的拓扑.

前面(参见§5第1段)我们已经在拓扑空间 T 中定义了集 M 的极限点 x 为使得交 $U\cap M\setminus\{x\}$ 非空的点,这里 U 是点 x 的任意邻域.

在不满足公理 T_1 的空间中,甚至仅由有限个点组成的集 M 可以存在极限点. 设 T 是两点连通空间,其中拓扑由 $\varnothing$, $\{b\}$ 及 $\{a,b\}$ 组成. 这时点 a 是集 $M=\{b\}$ 的极限点.

在 T_1 空间中上述情形已经不可能发生,亦即下述命题为真.

引理 点 x 是 T_1 空间中集 M 的极限点的充要条件为它的任一邻域 U 包含 M 中无限多个点.

条件的充分性是明显的. 我们来证明它的必要性. 设 x 是 M 的极限点. 假定存在点 x 这样的邻域 U,它只包含 M 中有限个点. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是除了 x 本身以外(如果这样的 x 属于 M 的话)所有这种点. 这时,$V=U-\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是 x 的邻域,并且 $V\cap M\setminus\{x\}=\varnothing$.

任一度量空间显然是 T_1 空间. 所以在度量空间中就把引理中所指的性质作为集的极限点的定义.

加强第一分离性公理就成为公理 T_2.

公理 T_2(第二分离性公理或豪斯多夫分离性公理) 拓扑空间 T 的任意两个不同的点 x 与 y 有不相交的邻域 O_x 与 O_y.

满足这个公理的空间称为 T_2 空间或豪斯多夫空间. 任一豪斯多夫空间必是 T_1 空间;但反之不真. 闭区间$[0,1]$可以作为 T_1 空间但不是豪斯多夫空间的例子,在这个闭区间$[0,1]$去掉至多可数个点所得到的一切集与空集是开的.

公理 T_3(第三分离性公理) 任意一点与不包含该点的闭集有不相交的邻域. 这时,包含 M 的任一开集 U 称为拓扑空间 T 中集 M 的邻域.

对这个公理又可以给出以下等价的叙述:

任意一点 x 的任何邻域 U 包含同一点的连同其闭包也含在 U 内的较小邻域.

读者可以把它作为习题来证明.

因为任意拓扑空间中的点可能不是闭集,所以第三分离性公理只对满足公理 T_1 的空间才有意义. 我们把满足两个公理 T_1 与 T_3 的空间称为正则空间.

任一正则空间当然是豪斯多夫空间;但反过来不成立. 满足下述条件的闭区间$[0,1]$可以作为豪斯多夫空间但不是正则空间的例. 在$[0,1]$中除点0以外的一切点,都用通常的方法来定义它的邻域,而把从其中去掉形如 $1/n(n=1,2,\cdots)$ 的这样的所有可能的半开区间$[0,\alpha)$作为零的邻域. 这是一个豪斯多夫空间,但其中点0与不包含它的闭集$\{1/n\}$不是用彼此不相交的邻域来分离的,即公理 T_3 不成立.

在分析学中,通常不会碰到比正则空间更一般的空间. 不但如此,一般地说,从分析学的观点来看,感兴趣的是满足以下更强要求的空间,这种要求即所谓空间的正规性.

公理 T_4(正规性公理) 如果在 T_1 空间中,任意两个不相交的闭集有不相交的

邻域,则 T_1 空间称为正规的.

特别,所有度量空间都属于正规空间. 事实上,设 X 与 Y 为度量空间 R 中的两个不相交的闭集. 对于每一点 $x \in X$ 有一个与 Y 不相交的邻域 O_x,因而存在点 x 到 Y 的某一正距离 ρ_x,类似地,对于每一点 $y \in Y$ 到 X 的距离是 ρ_y. 我们考察分别包含 X 与 Y 的开集[①]

$$U = \bigcup_{x \in X} B(x,\rho_x/2) \text{ 与 } V = \bigcup_{y \in Y} B(y,\rho_y/2),$$

并证明它们的交是空的. 假设 $z \in U \cap V$. 这时在 X 中存在点 x_0 使得 $\rho(x_0,z) < \rho_{x_0}/2$,而在 Y 中存在点 y_0 使得 $\rho(z,y_0) < \rho_{y_0}/2$. 为确定起见,假设 $\rho_{x_0} \leqslant \rho_{y_0}$. 于是

$$\rho(x_0,y_0) \leqslant \rho(x_0,z) + \rho(z,y_0) < \rho_{x_0}/2 + \rho_{y_0}/2 < \rho_{y_0},$$

即 $x_0 \in B(y_0,\rho_{y_0})$. 但这与 ρ_{y_0} 的定义矛盾. 于是命题得证.

由于任一度量空间的子空间仍是度量空间,所以它总具有正规性. 一般说来,这对于任意正规空间不真:正规空间的子空间不一定是正规的. 因此空间的正规性没有遗传性[②].

正则性的重要加强乃是所谓拓扑空间的完全正则性,这是遗传性质. 拓扑空间 T 称为完全正则的,如果对于每一个闭集 $F \subset T$ 与每一点 $x_0 \in T \setminus F$ 存在 T 上的实连续函数 f,它在点 x_0 等于 0,而在 F 上等于 1,并且满足条件 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. 任一正规空间是完全正则的[③];但反过来不成立. 任一完全正则(特别是正规)空间的子空间仍是完全正则的. 完全正则空间的概念是由吉洪诺夫(Тихонов)引进的,他证明了完全正则空间类与正规空间的一切子空间类重合. 从分析学的观点来看,完全正则空间之所以重要,就在于每一个这样的空间具有"充分多"的连续函数,即对于完全正则空间 T 的任意不同的点 x,y,存在定义在 T 上的实连续函数,它在这些点取不同的值.

7. 在空间中给定拓扑的不同方法. 可度量性　在某一空间中给定拓扑最直接的方法是直接指出我们假定为开集的那些集,这一组集应当满足公理 1°与 2°(参见 §5 第 1 段). 与此等价的对偶的方法就是指出一组闭集,这一组闭集显然应当满足条件 1 与 2(§5 第 1 段). 但事实上这种方法是很少能用得上的. 例如,即使在平面的情形,也未必能给出所有开集的直接描述(像这种描述对于直线的情形可以做到(§2 定理 5)).

给定拓扑的普遍方法在于选择某一个基, 实际上就是在度量空间中引进拓扑,

---

① 这里,通常用 $B(x,r)$ 表示以点 x 为中心,r 为半径的开球.

② 如果从已知拓扑空间 T 具有性质 P 推出 T 的一切子空间也具有性质 P,则性质 P 称为遗传的.

③ 这个(完全不明显)的结论是由以下乌里孙(П. С. Урысон)定理推得的:如果 T 是一正规空间,F_1,F_2 是 T 的两个不相交的闭子集,那么在 T 上存在连续函数 f,$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$,它在 F_1 上等于 0 而在 F_2 上等于 1.

在这里我们利用度量给出基,亦即开球的全体.

在空间中给定拓扑还有一种可能方法,这就是在空间中引进收敛性概念. 但在度量空间的范围内,这种方法不总是很方便. 因为正如第 4 段中所指出的,从某一集转到其闭包时不总能用收敛序列的术语来描述. 如果对收敛序列概念本身用适当的方式加以推广,上述方法就可以成为普遍的方法(例如,参见[29]第二章).

在拓扑空间中按公理方式定义了闭包运算以后,便可在该空间中引进拓扑. 也就是说,如果对于每一个 $A\subset X$ 有某一个集 $[A]\subset X$ 与之对应,则称在集 X 中给出一个闭包运算,$[A]$ 称为 A 的闭包,同时从 A 转到 $[A]$ 的运算具有 §2 定理 1 中指出的性质 1)—4). 在定义了使 $[A]=A$ 这个集的闭包以后,不难证明,这一类集满足性质 1 与 2(§5 第 1 段),亦即在 X 中事实上确定了一个拓扑.

给定度量是引进拓扑的一种很重要的方法,虽然远非普遍的方法. 正如我们已经看到,任一度量空间是正规的而且满足第一可数性公理. 但在把这两个性质之一去掉的空间中,利用任何度量都不能给出空间的拓扑.

定义　设 T 是拓扑空间. 如果 T 的拓扑可以用任一度量给出,则称 T 为可度量化的.

根据刚才所说的,空间的正规性与第一可数性公理乃是空间可度量化的必要条件. 同时,不论这些条件中的任何一个,或甚至两个条件合在一起,它们都不是可度量化空间的充分条件. 但下面乌里孙定理成立:

具有可数基的拓扑空间是可度量化的充要条件为它是正规的.

上述命题条件的必要性是明显的. 充分性的证明,例如可在[2]中找到.

§6. 紧性

1. 紧性概念　下述的海涅 - 博雷尔(Heine - Borel)著名引理在分析学中起着奠基的作用.

从数直线闭区间 $[a,b]$ 的任一覆盖(由诸开区间所组成)中可以选出有限子覆盖.

如果考虑任意开集代替开区间,上述命题仍然成立;从闭区间 $[a,b]$ 的任一开覆盖中可以选出有限子覆盖.

从数直线上闭区间的这个性质出发,我们引进以下重要概念.

定义　设 T 为拓扑空间,如果 T 的任一开覆盖包含有限子覆盖,则称 T 为紧的.

满足豪斯多夫分离性公理的紧拓扑空间称为紧统.

我们下面将要看到,任何有限维欧几里得空间的一切有界闭子集与闭区间一样具有紧的性质. 反之,直线、平面、三维空间都是非紧空间最简单的例子.

设 $\{A\}$ 是集 T 的某一子集族. 如果这个族的成员之任何有限交 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 非空,则称

集 T 的子集族 $\{A\}$ 是有心的. 从紧性定义的叙述及对偶原理可推得下面的定理.

定理 1 拓扑空间 T 是紧的充要条件为 T 满足条件 (R):

(R) T 的闭子集的任一有心族有非空的交.

事实上,设 $\{F_\alpha\}$ 为 T 中闭子集的有心族,且 T 是紧的. 这时,集 $G_\alpha = T\setminus F_\alpha$ 是开集,并且从任一有限个集的交 $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ 非空这事实推出任一有限集族 $G_i = T\setminus F_i$ 不能覆盖全空间 T. 但这时所有 G_α 也不能构成覆盖(紧性!),而这表示 $\cap F_\alpha \neq \varnothing$. 于是,如果 T 是紧的,则在 T 中条件 (R) 成立. 反之,设 T 满足条件 (R) 且 $\{G_\alpha\}$ 为空间 T 的开覆盖. 令 $F_\alpha = T\setminus G_\alpha$,我们便得到 $\cap F_\alpha = \varnothing$,由此推出族 $\{F_\alpha\}$ 不可能是有心的(条件 (R)),即存在 $F_1, \cdots, F_n$ 使得 $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$. 但这时相应的 $G_i = T\setminus F_i$ 构成覆盖 $\{G_\alpha\}$ 的有限子覆盖. 于是,条件 (R) 等价于紧性.

下面我们来建立紧空间的某些基本性质.

定理 2 如果 T 是紧空间,那么 T 的任一无限子集至少有一个极限点.

证明 如果 T 包含无限集 X,它连一个极限点也没有,那么在 X 中可选出可数集 $X_1 = (x_1, x_2, \cdots)$,这个集也是一个极限点也没有. 但这时集 $X_n = (x_n, x_{n+1}, \cdots)$ 构成 T 中闭集的有心族,它有空的交,即 T 非紧.

定理 3 紧空间的闭子集是紧的.

证明 设 F 是紧空间 T 的闭子集,$\{F_\alpha\}$ 是子空间 $F\subset T$ 的闭子集的任意有心族. 这时,任一 F_α 在 T 中也是闭的,即 $\{F_\alpha\}$ 是 T 中闭集的有心族. 因而,$\cap F_\alpha \neq \varnothing$. 由此根据定理 1 推出 F 的紧性.

因为豪斯多夫空间的子空间仍是豪斯多夫空间,由此得到下述推论.

推论 紧统的闭子集仍是紧统.

定理 4 紧统在任何包含它的豪斯多夫空间中是闭的.

证明 设 K 是豪斯多夫空间 T 中的紧集,并设 $y \notin K$. 这时对于任一点 $x \in K$,存在该点的邻域 U_x 及点 y 的邻域 V_x,使得

$$U_x \cap V_x = \varnothing.$$

邻域 U_x 构成集 K 的开覆盖. 由于 K 的紧性,从它的开覆盖中可选出有限子覆盖 U_{x_1}, $U_{x_2}, \cdots, U_{x_n}$. 令

$$V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \cdots \cap V_{x_n}.$$

于是 V 是点 y 的邻域,且不与 $U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n} \supset K$ 相交. 因而 $y \notin [K]$,这表示 K 是闭集. 定理证毕.

定理 3 与定理 4 表明,在豪斯多夫空间类中,紧性是空间的内在性质,亦即任一紧统不论在怎样更广的豪斯多夫空间中它仍然是紧统.

定理 5 任一紧统是一正规空间.

证明　设 X 与 Y 是紧统 K 的两个不相交的闭子集. 重复上面定理证明中所进行的推理,这时容易证明,对任一点 $y \in Y$,存在它的邻域 U_y 及开集 $O_y \supset X$,使得 $U_y \cap O_y = \varnothing$. 从而证明了任一紧统是正则的. 现设 y 遍历集 Y. 从集 Y 的覆盖 $\{U_y\}$ 中选取有限子覆盖 $U_{y_1}, \cdots, U_{y_n}$. 这时,开集

$$O^{(1)} = O_{y_1} \cap \cdots \cap O_{y_n} \text{ 与 } O^{(2)} = U_{y_1} \cup \cdots \cup U_{y_n}$$

满足条件

$$O^{(1)} \supset X, O^{(2)} \supset Y \text{ 与 } O^{(1)} \cap O^{(2)} = \varnothing,$$

而这也就表示集 K 的正规性.

2. 紧空间的连续映射　紧空间,特别是紧统的连续映射具有一系列有趣而重要的性质.

定理 6　紧空间的连续象是紧空间.

证明　设 X 是紧空间,而 f 是 X 到拓扑空间 Y 内的连续映射. 我们来考察象 $f(X)$ 的任一覆盖 $\{V_\alpha\}$,它们是 $f(X)$ 中的开集. 令 $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$. 集 U_α 是开的(它在连续映射下为开集的原象),且构成空间 X 的覆盖. 由于 X 的紧性,从这些覆盖中可选出有限子覆盖 $U_1, U_2, \cdots, U_n$. 于是集 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 覆盖空间 X 的整个象 $f(X)$,其中 $V_i = f(U_i)$.

定理 7　紧统 X 到豪斯多夫空间 Y 上的一对一连续映射是同胚映射.

证明　需要证明:从定理的条件推出逆映射 φ^{-1} 的连续性. 设 F 是 X 中的闭集而 $P = \varphi(F)$ 是它在 Y 中的象. 根据定理 6 知,P 也是紧统,因而 P 在 Y 中是闭的. 这样一来,在映射 φ^{-1} 下的每一个闭集 $F \subset X$ 的原象是闭的. 而这也就意味着映射 φ^{-1} 的连续性.

3. 在紧空间上的连续函数与半连续函数　在上一段中,我们谈到紧统到豪斯多夫空间内的连续映射. 而紧统到数直线内的映射,即紧集上的数值函数,是上述映射的特殊情形. 对于这种函数,它保持着分析学中熟知的函数在闭区间上的一些基本性质.

定理 8　设 T 是紧空间而 f 是 T 上的连续数值函数. 那么 f 在 T 上有界,并且在 T 上达到上确界和下确界.

证明　连续函数是紧空间 T 到数直线 $\mathbf{R}^1$ 内的连续映射. 根据一般的定理 6,T 在 $\mathbf{R}^1$ 中的象是紧的. 但正如读者在分析教程中已经知道(也可参阅 §7 第 2 段),数直线的紧子集是闭的并且有界,所以它不仅有有限的上确界和下确界,而且还包含这些界. 定理证毕.

习题　设 K 是紧度量空间而 A 是映 K 到自身,并且使得当 $x \neq y$ 时,$\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ 的映射. 试证映射 A 在 K 中有唯一的不动点.

上述定理 8 的结果也可以推广到更广的函数类上去,也就是推广到所谓半连续函数上去.

如果对于任意 $\varepsilon > 0$,存在点 x_0 的邻域,在这个邻域中有 $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$(或

$f(x) < f(x_0) + \varepsilon$)，则称函数$f(x)$在点 x_0 是下半连续的(或上半连续的).

例如，“x 的整数部分”这一函数$f(x) = E(x)$是上半连续的. 如果连续函数在任意一点 x_0 的值$f(x_0)$增加(减少)，那么我们就得到上(下)半连续的函数. 如果$f(x)$是上半连续的，那么 $-f(x)$ 就是下半连续的. 我们立即可以从这两个结果构造出很多半连续函数的例子.

在研究实函数的半连续性时，假定它可取无穷值是方便的. 如果$f(x_0) = -\infty$，那么我们就认为函数f在点 x_0 是下半连续的；而如果对于任意 $h>0$，存在点 x_0 的邻域，在这个邻域中有$f(x) < -h$，那么就认为函数f在点 x_0 是上半连续的.

如果$f(x_0) = +\infty$，那么就认为函数f在点 x_0 是上半连续的；而如果对于任意的 $h>0$，存在点 x_0 的邻域，在这个邻域中有$f(x) > h$，那么就认为函数f在点 x_0 是下半连续的.

设$f(x)$是度量空间 R 上的实函数. 量(有限的或无限的)$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\sup\limits_{x\in B(x_0,\varepsilon)} f(x)\right]$称为函数$f(x)$在点 x_0 的上极限 $\overline{f}(x_0)$. 类似地可定义下极限 $\underline{f}(x_0)$，只要把上极限中的上确界换成下确界. 差 $\omega f(x_0) = \overline{f}(x_0) - \underline{f}(x_0)$(如果它有意义，即如果数 $\overline{f}(x_0)$ 与 $\underline{f}(x_0)$ 不等于同一符号的无穷值)称为函数$f(x)$在点 x_0 的振幅. 不难看出，函数$f(x)$在点 x_0 连续的充要条件为 $\omega f(x_0) = 0$(即 $-\infty < \overline{f}(x_0) = \underline{f}(x_0) < \infty$).

对于给定在度量空间上的任意函数$f(x)$，函数 $\overline{f}(x)$ 是上半连续的，而函数 $\underline{f}(x)$ 是下半连续的. 这容易从上极限与下极限的定义推出.

我们来考察度量空间 M，它的元素 x 是给定在闭区间$[a,b]$上的一切有界实函数 $\varphi(t)$. M 中的度量由等式

$$\rho(x,y) = \rho(\varphi,\psi) = \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |\varphi(t) - \psi(t)|$$

给出. 我们把 M 上的函数通常称为泛函，以区别于 M 的元素函数 $\varphi(t)$.

我们来考察半连续泛函一个重要的例子.

我们把曲线 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$的长定义为泛函

$$L_a^b(f) = \sup\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2},$$

其中上确界(它可能等于$+\infty$)按区间$[a,b]$上的一切可能分划来取. 这个泛函在全空间 M 有定义. 对于连续函数，上述泛函与极限值

$$\lim_{\max|x_i - x_{i-1}|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

相等. 最后，对于具有连续导数的函数，它可以写成形式

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

泛函 $L_a^b(f)$在 M 中是下半连续的，这容易从它的定义推出.

现在我们把上面的定理 8 推广到半连续函数上去.

定理 8a　在紧 T_1 空间 T 上的下(上)半连续有限函数是下(上)有界的.

事实上，假定 $\inf f(x) = -\infty$. 这时存在序列$\{x_n\}$，使得$f(x_n) < -n$. 因为空间 T 是紧的，所以它的无限子集$\{x_n\}$至少有一个极限点 x_0(定理 2). 根据假设条件，函数f有限且下半连续，所以存在点 x_0 的邻域 U，使得当 $x\in U$ 时$f(x) > f(x_0) - 1$. 但这时邻域 U 可能只包含集$\{x_n\}$有限个点，

而这与点 x_0 是这个集的极限点矛盾.

对于上半连续的情形也可类似地证明.

定理 8b　在紧 T_1 空间 T 上的下(上)半连续有限函数达到自己的下(上)确界.

设函数 $f(x)$ 是下半连续的. 这时根据定理 8a,它有有限下界,并且存在序列 $\{x_n\}$,使得 $f(x_n) \leqslant \inf f(x)+1/n$.

因为 T 是紧的,集 $\{x_n\}$ 有极限点 x_0. 如果 $f(x_0)>\inf f$,那么,由于函数 f 的下半连续性,存在点 x_0 的邻域 U 及 $\delta>0$,使得当 $x\in U$ 时,$f(x)>\inf f+\delta$. 但这时邻域 U 不可能包含集 $\{x_n\}$ 的任何一个无限子集. 因而,$f(x_0)=\inf f$,这就是所要证明的.

4. 可数紧性　我们引进下面的定义.

定义　如果空间 T 的每一无限子集至少有一极限点,则称 T 为可数紧的.

在第 1 段已经证明的定理 2 表明,任一紧空间是可数紧的. 一般说来反之不真. 下面看一个是可数紧的,但不是紧空间的"传统的"例子. 考察小于第一个不可数序数 ω_1 的一切序数 α 所成的集合 X. 我们把满足不等式 $\alpha<\gamma<\beta$ 的一切序数 γ 的全体称为 X 中的开区间 (α,β). 任意多个开区间的并称为 X 中的开集. 容易验证,所构成的空间是可数紧的,但不是紧的.

紧性与可数紧性概念之间的关系由下面的定理就变得明显了.

定理 9　拓扑空间 T 是可数紧的充要条件为以下两个条件中的任何一个成立:

1) 空间 T 的任一可数开覆盖包含有限子覆盖.

2) T 中闭集的任一可数有心族具有非空的交.

证明　条件 1) 与 2) 的等价性可直接从对偶原理推得. 其次,如果 T 不是可数紧的,则重复证明定理 2 的论证,我们就证得 T 中存在具有空交的闭集的可数有心族. 于是条件 2)(也是条件 1))的充分性得证. 下面证明条件 2) 的必要性. 设 T 是可数紧的而 $\{F_n\}$ 是 T 中闭集的可数有心族. 我们来证明,$\bigcap_n F_n\neq\varnothing$,设 $\Phi_n=\bigcap_{k=1}^{n}F_k$. 显然,所有 Φ_n 都是闭的、非空的(由于 $\{F_n\}$ 的有心性),且构成非递增族 $\Phi_1\supset\Phi_2\supset\cdots$,同时 $\bigcap_n\Phi_n=\bigcap_n F_n$. 于是有两种可能情况:

1) 从某一下标 n_0 开始

$$\Phi_{n_0}=\Phi_{n_0+1}=\cdots.$$

这时,显然 $\bigcap_n\Phi_n=\Phi_{n_0}\neq\varnothing$.

2) 在 Φ_n 中有无限多两两互异的 Φ_n. 这时只要考察所有 Φ_n 是互不相同的情形. 设

$$x_n\in\Phi_n\backslash\Phi_{n+1},$$

序列 $\{x_n\}$ 乃是 T 中不同的点组成的无限集. 由于 T 的可数紧性,$\{x_n\}$ 应当至少有一个极限点. 比如说 x_0. 因为 Φ_n 包含所有点 $x_n,x_{n+1},\cdots$,所以 x_0 是 Φ_n 的极限点. 由于

Φ_n 的闭性，$x_0 \in \Phi_n$. 从而，$\bigcap_n \Phi_n \ni x_0$，即 $\bigcap_n \Phi_n \neq \varnothing$.

这样一来，开覆盖本身的“性态”既刻画了紧空间也刻画了可数紧空间. 虽然在这两种空间中都可从开覆盖中选出有限覆盖，但在第一种空间谈到的是任意覆盖，而在第二种空间谈到的仅是可数覆盖.

虽然在一般情况下不能从可数紧性推出紧性，但以下事实成立.

定理 10　对具有可数基的空间来说，紧的概念与可数紧的概念是一致的.

事实上，从具有可数基的空间 T 的任一开覆盖中，可选出可数子覆盖（§5 定理 5）. 而如果空间 T 也是可数紧的，那么，从这后一条件，根据定理 9 可选出有限子覆盖. 从而证得 T 是紧的.

注　拓扑空间的可数紧性的概念在事实上（与紧性相反）是不很合适也不很自然的. 它的出现说成“按照惯性”，然而，对于度量空间（如同对于具有可数基的空间一样），紧与可数紧这两个概念是一致的（这将在下一节证明）. 同时，对于度量空间，紧性概念最先正是这样给出的：对于每一个无限子集皆存在极限点，亦即是照可数紧定义给出的. 从度量的情形“自动”地把这个定义转到拓扑的情形就得到可数紧拓扑空间的概念. 有时候在文献中，尤其是比较古老的文献中，把术语“紧性”理解为“可数紧性”，而在我们的术语中，紧拓扑空间就是从任一开覆盖中可以选出有限子覆盖的空间，称它为重紧空间. 同时把紧豪斯多夫空间（即紧统）就叫做重紧统，而对紧度量空间保留“紧统”的术语. 我们将沿用前面引入的这些术语（紧性，可数紧性）；同时我们还将紧度量空间也称为紧统，而当希望特别强调存在度量这种情况时，就称为“度量紧统”.

5. 准紧集　如果 M 是某一豪斯多夫空间 T 的一个非闭集，那么 M 不可能是紧的. 例如，数直线上的任一非闭子集都不是紧的. 但可能出现 T 中这样的集 M，它的闭包 $[M]$ 具有紧性. 比如数直线上或 n 维空间中的任何有界子集就满足这个条件. 我们引进以下的定义.

定义　设 M 为某一拓扑空间 T 的一个集. 如果 M 的闭包在 T 中是紧的，则称集 M 为准紧的（或相对于 T 是紧的）. 类似地，如果任一无限子集 $A \subset M$ 至少有一个极限点（它可能属于 M 但也可能不属于 M），则称 M 在 T 中是可数准紧的.

显然，准紧的概念（和紧的概念不同）与我们在其中考察给定的集的空间 T 有关. 例如开区间 $(0,1)$ 中的有理点集，如果把它看作数直线上的子集是准紧的，而作为一切有理数空间的子集就不是准紧的.

在度量空间的情形中，准紧概念是最本质的. 我们将在下一节讨论它.

§7. 度量空间的紧性

1. 完全有界性　由于度量空间乃是拓扑空间的特殊情形，所以我们在上一节

中,对推广到拓扑空间的一些定义和事实进行了讨论. 在度量空间的情形,紧性与完全有界性概念有着紧密的联系. 现在我们引进完全有界性概念.

设 M 为度量空间 R 中的某一个集,而 ε 为某一正数. 如果对任一点 $x \in M$,至少存在一点 $a \in A$,使得

$$\rho(x,a) \leqslant \varepsilon,$$

则称集 A 为 R 中 M 的 ε 网. (集 A 不一定包含在 M 中,且甚至可能与 M 没有一个公共点. 但是,有 M 的某一 ε 网 A,就可以构造 2ε 网 $B \subset M$.)

例如,整数点构成平面上的 $1/\sqrt{2}$网. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 M 的有限 ε 网,则称 M 为完全有界的. 显然,完全有界集作为有限个有界集的和必为有界集. 反之,一般说来不成立,如下面的例 2 说明了这一点.

下述明显的注常常是有用的:如果集 M 是完全有界的,那么它的闭包$[M]$也是完全有界的.

从完全有界性定义立即推得,如果度量空间 R 本身是完全有界的,那么它是可分的. 事实上,对每一个 n,在 R 中构造有限的 $1/n$ 网. 按所有的 n 求得的这些网的和乃是 R 中的可数处处稠紧集. 因为可分的度量空间具有可数基(§5 定理4),所以我们得到任一完全有界度量空间具有可数基.

例 1 n 维欧几里得空间中的完全有界性与通常的有界性一致,即与可以用充分大的立方体把给定的集包含在内一致. 事实上,如果把这样的立方体分成棱为 ε 的小立方体,那么这些小立方体的顶点在原立方体中构成有限的$(\sqrt{n}/2)\varepsilon$ 网. 自然这意味着它也构成位于这个立方体内部任一集的有限$(\sqrt{n}/2)\varepsilon$ 网.

例 2 在空间 l_2 的单位球 S 中,我们给出一个有界的但不是完全有界的例子. 事实上,我们来考察 S 中形如

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\cdots,0,0,\cdots), \\ e_2 &= (0,1,0,\cdots,0,0,\cdots), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (0,0,0,\cdots,1,0,\cdots), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

的点.

任何这样的两点 e_n 与 $e_m(n \neq m)$之间的距离都等于$\sqrt{2}$,由此可见,对于任意的 $\varepsilon < \sqrt{2}/2$,在 S 中不可能有有限的 ε 网.

例 3 考察空间 l_2 中满足条件

$$|x_1| \leqslant 1, \ |x_2| \leqslant 1/2, \cdots, \ |x_n| \leqslant 1/2^{n-1}, \cdots$$

的点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$所成的集 Π. 这个集称为空间 l_2 的基本平行六面体(希尔

伯特(Hilbert)砖). 它可以作为无限维完全有界集的例子. 我们用下面的方法来证明这个集的完全有界性.

设 $\varepsilon>0$ 已给定. 我们选取这样的 n,使得 $1/2^{n-1}<\varepsilon/2$. 对 Π 中的每一点

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots) \tag{1}$$

使同一个集中的点

$$x^*=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots) \tag{2}$$

与之对应. 这时

$$\rho(x,x^*)=\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{4^k}}<\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Π 中形如(2)的点所成的集 Π^* 是完全有界的(如 n 维空间中的有界集一样). 在 Π^* 中选取有限的 $\varepsilon/2$ 网,显然,它同时也是整个 Π 中的 ε 网.

2. 紧性与完全有界性

定理 1　如果度量空间 R 是可数紧的,那么它是完全有界的.

证明　假设 R 不是完全有界的. 这意味着对某一 $\varepsilon_0>0$ 在 R 中不存在有限的 ε_0 网. 在 R 中任取一点 a_1. 于是,在 R 中至少存在这样一点,比方说 a_2,使得 $\rho(a_1,a_2)>\varepsilon_0$(否则点 a_1 是 R 的 ε 网). 其次,在 R 中可以找到这样的点 a_3,使得 $\rho(a_1,a_3)>\varepsilon_0$ 及 $\rho(a_2,a_3)>\varepsilon_0$. 否则,一对点 a_1,a_2 是 R 的 ε_0 网. 如果点 $a_1,\cdots,a_k$ 已经固定,那么可以选取 $a_{k+1}\in R$,使得 $\rho(a_i,a_{k+1})>\varepsilon_0,i=1,2,\cdots,k$.

这一构造给出无限序列 $a_1,a_2,\cdots$,因为当 $i\neq j$ 时,$\rho(a_i,a_j)>\varepsilon_0$,所以这个序列连一个极限点也没有. 因而 R 不是可数紧的. 定理证毕.

于是,我们证得度量空间的可数紧性蕴涵完全有界性,可数紧性本身显然蕴涵可数基的存在.

根据 §6 定理 10,由此我们得到下面重要的结果.

推论　任一可数紧度量空间是紧度量空间.

我们证明了完全有界性是度量空间紧性的必要条件. 这个条件不是充分的. 例如,具有两点通常距离定义的闭区间[0,1]上的有理点集合是完全有界的,但它不是紧的:这个空间的点列

$$0,0.4,0.41,0.414,0.4142,\cdots,$$

即趋于数 $\sqrt{2}-1$ 的十进位小数序列,在有理点集中没有极限点. 但下面的定理成立.

定理 2　度量空间 R 是紧的当且仅当它同时满足:

1) R 是完全有界的;

2) R 是完备的.

证明　完全有界的必要性已经证明. 完备的必要性是明显的. 事实上,如果 $\{x_n\}$

是 R 中没有极限的基本序列,那么这个序列在 R 中连一个极限点也没有.

现在我们来证明,如果 R 是完全有界和完备的,那么 R 是紧的. 根据定理 1 的推论知道,为此只要证明 R 是可数紧的就可以了. 即证明 R 中的任一点列 $\{x_n\}$ 至少有一个极限点.

在 R 中所构成的 1 网中的每一点的周围作半径为 1 的闭球. 因为这些球覆盖全空间 R,而它们的个数是有限的,所以这有限个球中至少有一个,称它为 B_1,包含序列 $\{x_n\}$ 的某一无限子序列 $x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)},\cdots$. 其次,在 B_1 中选取 1/2 网并从这网中的每一点周围作半径为 1/2 的闭球. 这些球中至少有一个球,称它为 B_2,包含序列 $\{x_n^{(1)}\}$ 的无限子序列 $x_1^{(2)},\cdots,x_n^{(2)},\cdots$. 再次,存在中心在 B_2 中、半径为 1/4 的闭球 B_3,包含序列 $\{x_n^{(2)}\}$ 的无限子序列 $x_1^{(3)},\cdots,x_n^{(3)},\cdots$,等等. 现在考察与每一个球 B_n 具有相同的中心,但半径比它大两倍的闭球 A_n. 不难看出,球 A_n 一个嵌入到另一个中. 由于空间 R 完备,所以交 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 非空且由一点 x_0 组成. 这点就是原来序列 $\{x_n\}$ 的极限点,因为它的每一个邻域包含某一球 B_k,而这意味着包含序列 $\{x_n\}$ 的无限子序列 $\{x_n^{(k)}\}$.

3. 度量空间中的准紧子集 在上一节中,我们对任意拓扑空间的子集所引进的准紧概念可特别应用于度量空间. 同时,可数准紧概念在这里显然与准紧概念是一致的. 我们指出下面简单的重要事实.

定理 3 完备度量空间 R 中的集 M 是准紧的充要条件为它是完全有界的.

从定理 2 及明显事实,即完备度量空间的闭子集仍是完备的立即得到定理的证明.

这个定理的意义在于证明某集的完全有界性一般要比直接证明某集的准紧性容易. 此外,对于分析学中的应用,准紧性通常是重要的.

4. 阿尔采拉(Arzelà)定理 在度量空间中关于某集紧性的问题是分析学中相当普遍的问题. 然而,企图直接应用定理 2 却不是一件简单的事. 因此,对于具体空间的集给出紧性(或准紧性)在实际应用中更为方便的特殊的判别准则是有益的.

我们已经看到,n 维欧几里得空间中集的准紧性等价于它的有界性. 但对于更广的度量空间来说,这个断语不真.

在分析学中,空间 $C[a,b]$ 是最重要的度量空间之一. 对于它的子集来说,重要而常用的紧性判别法则是由所谓阿尔采拉定理给出的. 为了叙述这个定理,我们要用到以下概念.

设 Φ 为定义在某一闭区间 $[a,b]$ 上的函数 φ 所成的族. 如果存在数 K,使得对所有的 $x\in[a,b]$ 及一切 $\varphi\in\Phi$,不等式

$$|\varphi(x)| < K$$

成立,则称函数族 Φ 是一致有界的.

如果对于每一个 $\varepsilon>0$，可以找到 $\delta>0$，使得对于 $\rho(x_1,x_2)<\delta$ 的 $[a,b]$ 中的一切点 x_1 与 x_2 及一切 $\varphi\in\Phi$，不等式

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<\varepsilon$$

成立，则族 $\Phi=\{\varphi\}$ 称为等度连续的.

定理 4（阿尔采拉）　在闭区间 $[a,b]$ 上定义的连续函数族 Φ 在 $C[a,b]$ 中是准紧的充要条件为该族一致有界且等度连续.

证明　必要性. 设族 Φ 在 $C[a,b]$ 中是准紧的. 这时根据上一定理，对于每一个正数 ε，在族 Φ 中存在有限 $\varepsilon/3$ 网 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k$. 每一个函数 φ_i 作为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数是有界的，即 $|\varphi_i(x)|\leqslant K_i$.

令 $K=\max K_i+\varepsilon/3$. 按 $\varepsilon/3$ 网的定义，对任一 $\varphi\in\Phi$，至少有一 φ_i，使得

$$\rho(\varphi,\varphi_i)=\max_x|\varphi(x)-\varphi_i(x)|\leqslant\varepsilon/3.$$

因而，

$$|\varphi(x)|\leqslant|\varphi_i(x)|+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant K_i+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant K.$$

于是，Φ 是一致有界的.

其次，因为形成 $\varepsilon/3$ 网的每一个函数 φ_i 是连续的，从而在 $[a,b]$ 上是一致连续的. 所以对于给定的 $\varepsilon/3$，存在这样的 δ_i，使得当 $|x_1-x_2|<\delta_i$ 时，

$$|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)|<\varepsilon/3.$$

设 $\delta=\min\delta_i$. 对于任意函数 $\varphi\in\Phi$，可选取 φ_i 使得 $\rho(\varphi,\varphi_i)<\varepsilon/3$. 于是，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，就有

$$\begin{aligned}&|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\\&\leqslant|\varphi(x_1)-\varphi_i(x_1)|+|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)|+|\varphi_i(x_2)-\varphi(x_2)|\\&<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.\end{aligned}$$

Φ 的等度连续性也就得证.

充分性. 设 Φ 是一致有界且等度连续的函数族. 根据定理 3，欲证它在 $C[a,b]$ 中的准紧性，只需证明，对任意的 $\varepsilon>0$，在 $C[a,b]$ 中对于它存在有限 ε 网. 设对一切 $\varphi\in\Phi$ 有 $|\varphi(x)|\leqslant K$，并设 $\delta>0$ 是这样选取的，当 $|x_1-x_2|<\delta$，对于一切 $\varphi\in\Phi$ 都有 $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<\varepsilon/5$. 在 x 轴上，用点 $x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 把区间 $[a,b]$ 分成长度小于 δ 的小区间，并通过这些点引铅垂线. 在 y 轴上用点 $y_0=-K<y_1<y_2<\cdots<y_m=K$ 分闭区间 $[-K,K]$ 为长度皆小于 $\varepsilon/5$ 的小区间，并通过这些分点引水平直线. 于是，矩形 $a\leqslant x\leqslant b$，$-K\leqslant y\leqslant K$ 被分成水平边小于 δ 与竖直边小于 $\varepsilon/5$ 的小矩形. 现在使每一个函数 $\varphi\in\Phi$ 对应于顶点在 (x_k,y_l) 处（即在所构造的网的节

点处)且与函数 φ 的偏差小于 $\varepsilon/5$ 的折线 $\psi(x)$(这样的折线显然存在).

因为根据上面的构造,$|\varphi(x_k)-\psi(x_k)|<\varepsilon/5$,$|\varphi(x_{k+1})-\psi(x_{k+1})|<\varepsilon/5$,$|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})|<\varepsilon/5$,所以

$$|\psi(x_k)-\psi(x_{k+1})|<3\varepsilon/5.$$

由于点 x_k 与 x_{k+1} 之间的函数 $\psi(x)$ 是线性的,所以对一切 $x\in[x_k,x_{k+1}]$ 皆有 $|\psi(x_k)-\psi(x)|<3\varepsilon/5$.

现设 x 是闭区间 $[a,b]$ 的任意一点,而 x_k 是我们上面选取的分点中从左边最接近于 x 的一个分点. 这时

$$\begin{aligned}&|\varphi(x)-\psi(x)|\\ \leqslant\ &|\varphi(x)-\varphi(x_k)|+|\varphi(x_k)-\psi(x_k)|+|\psi(x_k)-\psi(x)|\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

因此,折线 $\psi(x)$ 关于 Φ 构成 ε 网. $\psi(x)$ 的个数显然是有限的. 于是 Φ 完全有界. 定理全部证毕.

5. 佩亚诺(Peano)定理 作为阿尔采拉定理应用的一个例子,我们来证明下述具有连续右端的常微分方程解的存在性定理.

定理 5(佩亚诺) 设给定微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \tag{3}$$

如果在某一有界闭区域 G 中函数 f 连续,那么方程(3)至少有一条积分曲线通过区域 G 的任一内点 (x_0,y_0).

证明 因为函数 f 在有界闭区域中连续,所以它有界:

$$|f(x,y)|<M=\text{const}.$$

通过点 (x_0,y_0) 我们分别引斜率为 M 与 $-M$ 的直线. 其次,引铅垂线 $x=a$ 及 $x=b$ 使得由它们截出的具有公共顶点 (x_0,y_0) 的两个三角形完全包含在 G 中.

这一对三角形构成 Δ 闭集.

现在我们对给定方程用下面的方法构造所谓欧拉(Euler)折线:从点 (x_0,y_0) 引斜率为 $f(x_0,y_0)$ 的直线. 在这条直线上选取某一点 (x_1,y_1),并通过该点引斜率为 $f(x_1,y_1)$ 的直线. 在此直线上取点 (x_2,y_2),引通过它且具斜率为 $f(x_2,y_2)$ 的直线,等等. 现在考察通过点 (x_0,y_0) 的欧拉折线序列 $L_1,L_2,\cdots,L_n,\cdots$,使得当 $k\to\infty$ 时折线 L_k 中最大的节段长趋于零. 设 φ_k 是以折线 L_k 为其图像的函数. 函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k,\cdots$ 具有以下性质:

1) 它们定义在同一闭区间 $[a,b]$ 上,

2) 它们是一致有界的,

3) 它们是等度连续的.

根据阿尔采拉定理,从序列 $\{\varphi_k\}$ 中可选出一致收敛的子序列. 设这个子序列是 $\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\cdots,\varphi^{(k)},\cdots$.

令 $\varphi(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi^{(k)}(x)$. 显然,$\varphi(x_0)=y_0$. 剩下验证 φ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足给定的微分方程.

为此需要证明,对任意 $\varepsilon>0$,当量 $|x''-x'|$ 充分小时,

$$\left|\frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}-f(x',\varphi(x'))\right|<\varepsilon.$$

为证明这一点,需要证明,当差 $|x''-x'|$ 充分小时,对充分大的 k,有

$$\left|\frac{\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')}{x''-x'}-f(x',\varphi^{(k)}(x'))\right|<\varepsilon.$$

因为 f 在区域 G 中连续,所以对任意 $\varepsilon>0$,可以找到 $\eta>0$,使得当 $|x-x'|<2\eta$ 及 $|y-y'|<4M\eta$ 时,有

$$f(x',y')-\varepsilon<f(x,y)<f(x',y')+\varepsilon,\quad y'=\varphi(x').$$

满足不等式 $|x-x'|<2\eta$ 及 $|y-y'|<4M\eta$ 的点 $(x,y)\in G$ 的全体乃是某一矩形 Q. 现设 K 如此大,使得对于一切 $k>K$,

$$|\varphi(x)-\varphi^{(k)}(x)|<2M\eta,$$

并且折线 L_k 的一切节段的长都小于 η. 这时,当 $|x-x'|<2\eta$ 时,对于 $k>K$ 的一切欧拉折线 $\varphi^{(k)}$ 完全位于 Q 的内部.

其次,设 $(a_0,b_0),(a_1,b_1),\cdots,(a_{n+1},b_{n+1})$ 为折线 L_k 的顶点,并且

$$a_0\leqslant x'<a_1<a_2<\cdots<a_n<x''\leqslant a_{n+1}$$

(为确定起见,我们认为 $x''>x'$;$x''<x'$ 的情形可类似地讨论). 这时,对于相应的函数 $\varphi^{(k)}$,我们有等式:

$$\varphi^{(k)}(a_1)-\varphi^{(k)}(x')=f(a_0,b_0)(a_1-x'),$$

$$\varphi^{(k)}(a_{i+1})-\varphi^{(k)}(a_i)=f(a_i,b_i)(a_{i+1}-a_i),\quad i=1,2,\cdots,n-1,$$

$$\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(a_n)=f(a_n,b_n)(x''-a_n).$$

由此可见,当 $|x''-x'|<\eta$ 时,便得

$$\begin{aligned}[f(x',y')-\varepsilon](a_1-x')&<\varphi^{(k)}(a_1)-\varphi^{(k)}(x')\\&<[f(x',y')+\varepsilon](a_1-x'),\\ [f(x',y')-\varepsilon](a_{i+1}-a_i)&<\varphi^{(k)}(a_{i+1})-\varphi^{(k)}(a_i)\\&<[f(x',y')+\varepsilon](a_{i+1}-a_i),\\&\qquad\qquad i=1,\cdots,n-1,\\ [f(x',y')-\varepsilon](x''-a_n)&<\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(a_n)\\&<[f(x',y')+\varepsilon](x''-a_n).\end{aligned}$$

把上面不等式加起来,得到

$$\begin{aligned}[f(x',y')-\varepsilon](x''-x')&<\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')\\&<[f(x',y')+\varepsilon](x''-x').\end{aligned}$$

这就是要证明的.

欧拉折线不同的子序列可能收敛于方程(3)不同的解. 所以,通过点(x_0,y_0)所得到的方程$y'=f(x,y)$的解一般说来不唯一.

6. 一致连续性. 度量紧统的连续映射 对于度量空间到度量空间内的映射,特别是对于在度量空间上的数值函数,除连续性概念外,对分析学来说,一致连续性概念具有重要的意义. 度量空间X到度量空间Y内的映射F叫做一致连续的,乃指对任意$\varepsilon>0$,可以找到$\delta>0$,使得当$\rho_1(x_1,x_2)<\delta$时$\rho_2(F(x_1),F(x_2))<\varepsilon$(这里$\rho_1$为$X$中的距离,而$\rho_2$为$Y$中的距离),并且$\delta$仅与$\varepsilon$有关而与$x_1,x_2$无关.

习题 证明:数值函数$F(x)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}x(t)$在空间$C[a,b]$上是一致连续的.

对于度量紧统的连续映射,下述定理成立;这个定理拓广了初等分析教程中大家所熟知的关于闭区间上连续函数的定理.

定理 6 度量紧统到度量空间内的连续映射是一致连续的.

证明 设度量紧统K到度量空间M内的映射F是连续的,但不一致连续. 这意味着对某一$\varepsilon>0$及每一个自然数n,在K中可以找到这样的点x_n与x'_n,使得$\rho_1(x_n,x'_n)<1/n$,而且同时有$\rho_2(F(x_n),F(x'_n))\geqslant\varepsilon$($\rho_1$为$K$中的距离,$\rho_2$为$M$中的距离). 由于$K$的紧性,从序列$\{x_n\}$中可选出收敛于某点$x\in K$的子序列$\{x_{n_k}\}$. 这时$\{x'_{n_k}\}$也收敛于$x$. 于是对每一$k$,不等式

$$\rho_2(F(x),F(x_{n_k}))\geqslant\varepsilon/2,\quad \rho_2(F(x),F(x'_{n_k}))\geqslant\varepsilon/2$$

中必然至少有一个成立,这与映射F在点x的连续性矛盾.

7. 拓广的阿尔采拉定理 设X,Y是两个度量紧统,而C_{XY}为紧统X到紧统Y内所有连续映射f所成的集. 在C_{XY}中利用公式

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in X}\rho(f(x),g(x))$$

引进距离.

这样,不难验证,C_{XY}变为度量空间.

定理 7(拓广的阿尔采拉定理) 集$D\subset C_{XY}$是准紧的充要条件为D中的函数f是等度连续的.

定理的后一部分表明,对任一$\varepsilon>0$必存在$\delta>0$,使得对D中的任何f与X中的任何x'与x'',从

$$\rho(x',x'')<\delta \tag{4}$$

推出

$$\rho(f(x'),f(x''))<\varepsilon. \tag{5}$$

证明 必要性像定理4那样证明.

我们来证明充分性. 为此把C_{XY}嵌入到空间M_{XY}中,其中M_{XY}是紧统X到紧统Y

内一切映射所成的集合,而且它具有在 C_{XY} 中引进的同一度量

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in X}\rho(f(x),g(x)),$$

并证明集 D 在 M_{XY} 中是准紧的. 因为 C_{XY} 在 M_{XY} 中是闭的[①],所以从集 D 在 M_{XY} 中的准紧性推出它在 C_{XY} 中的准紧性.

任给 $\varepsilon>0$ 并选取这样的 δ,使得对 D 中所有的 f 及 X 中所有的 x',x'' 从(4)推出(5). 容易看出,X 可表为有限个不相交集 E_i 的和,使得从 $x',x''\in E_i$ 推出 $\rho(x',x'')<\delta$. 事实上,为此只要选取点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得它们在 X 中构成 $\delta/2$ 网,并假定

$$E_i = B(x_i,\delta/2)\setminus\bigcap_{j<i}B(x_j,\delta/2),$$

其中 $B(x_i,\delta/2)$ 是中心为 x_i,$\frac{\delta}{2}$ 为半径的球.

现在我们考察紧统 Y 中某一有限的 ε 网 $y_1,y_2,\cdots,y_m$,并设 L 是函数 $g(x)$ 在集 E_i 上取值为 y_j 的集合. 这种函数的个数显然是有限的. 我们来证明,它们构成 M_{XY} 中关于集 D 的 2ε 网. 事实上,设 $f\in D$. 对 $x_1,\cdots,x_n$ 中的任一点 x_i 可以找到 $y_1,\cdots,y_m$ 中的点 y_j,使得 $\rho(f(x_i),y_j)<\varepsilon$.

设选取这样的函数 $g\in L$,使得 $g(x_i)=y_j$. 这时,如果选取 i 使得 $x\in E_i$,那么

$$\begin{aligned}&\rho(f(x),g(x))\\&\leqslant\rho(f(x),f(x_i))+\rho(f(x_i),g(x_i))+\rho(g(x_i),g(x))<2\varepsilon.\end{aligned}$$

由此推出,有限集 L 的确是 D 的 2ε 网. 于是,D 在 M_{XY} 中是准紧的,从而在 C_{XY} 中也是准紧的.

§8. 度量空间中的连续曲线[②]

设给定闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 到度量空间 R 内的连续映射

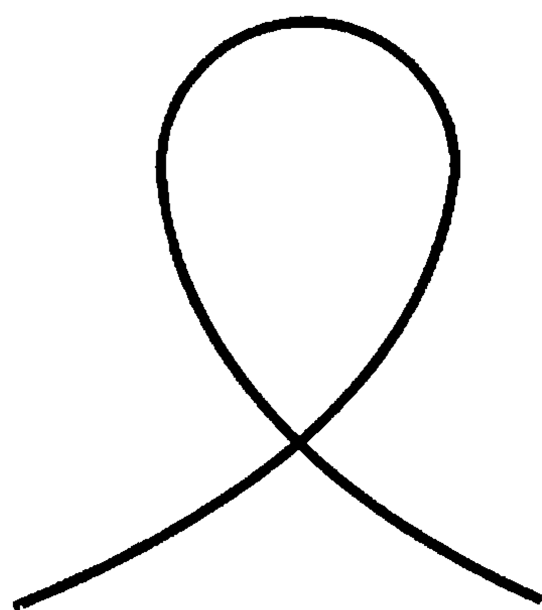
$$P=f(t).$$

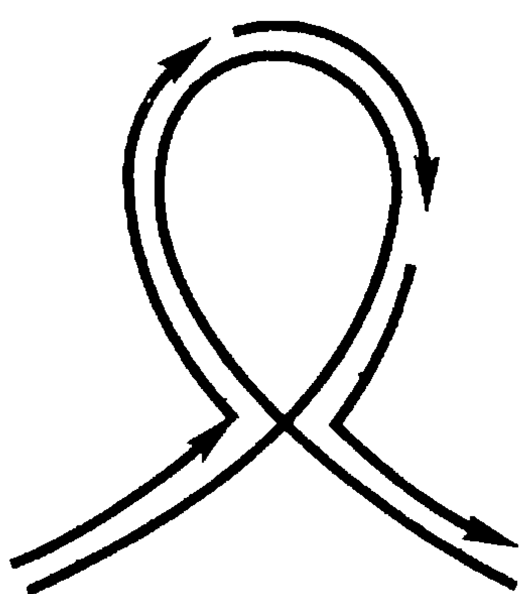
当 t 从 a 到 b“跑过”闭区间时,对应的点 P 就“跑过”空间 R 中的某一“连续曲线”. 我们将结合现在所说的粗略想法给出曲线精确的定义. 曲线上的点所处的次序对该曲线来说是本质的. 例如,图 12 所描绘的同一集合,若按图 13 与图 14 所指的走向遍历这个集合,我们就认为是不同的曲线. 作为另一个例子,我们来考虑图 15 所描绘的,定义在闭区间[0,1]上的实函数. 这个函数定义了一条位于 y 轴的闭区间[0,1]上的“曲线”,它与从点 O 到点 1 行进一次的上述闭区间这一条直线不同,因为前一曲线在区间[A,B]上通过三次(两次往上、一次往下).

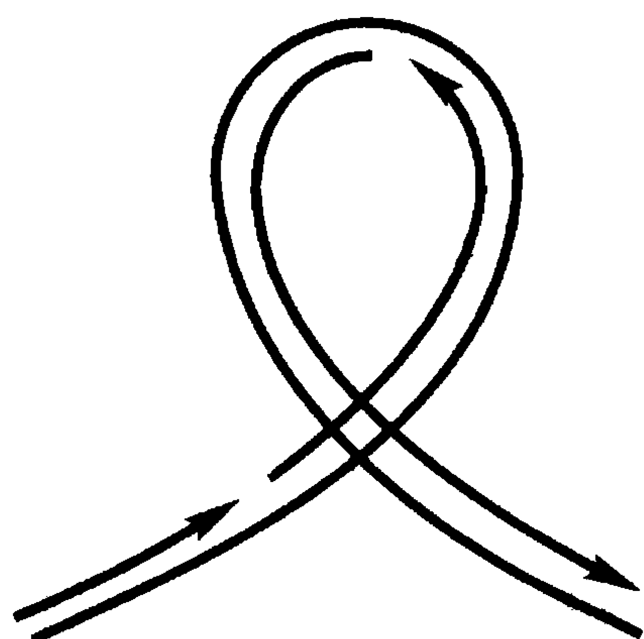
---

① 这是因为一致收敛的连续映射序列的极限仍是连续映射,上述命题乃是分析学中著名定理的直接拓广,并且证明也和这个定理一样.

② 这一节的内容与后面的讨论无关,读者根据自己的意愿可以略去不读.


图 12


图 13


图 14

但是,当空间的点以同样次序遍历时,我们将认为“参数”t 的选择是非本质的. 例如,在图 15 与图 16 中所描绘的函数都定义了位于 y 轴上的同一条“曲线”,虽然在图 15 与图 16 的情况下,对应于曲线上任意一点的参数值 t 可能不同. 例如,在图 15 的情况下,点 A 对应 t 轴上两个孤立点,而在图 16 的情况下对应 t 轴上一个孤立点以及位于这点右边的一线段(当 t 遍历这个线段时,曲线上的点停留在一个位置上). (在以后讨论曲线族的紧性时,允许 $P=f(t)$ 有这样的不动性区间是方便的.)

现在我们转到正式定义. 设

$$P=f'(t') \quad 与 \quad P=f''(t'')$$

是分别定义在闭区间

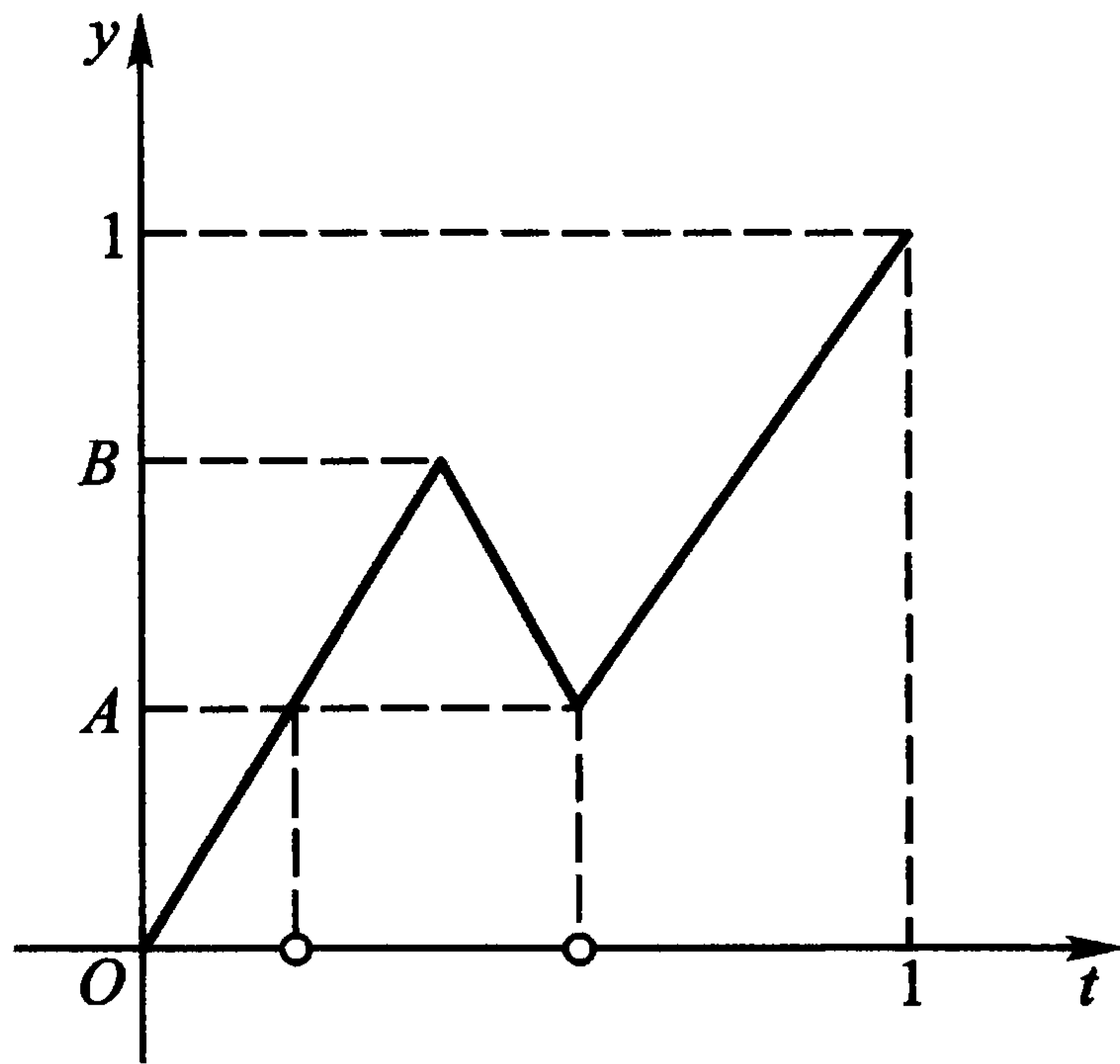


图 15

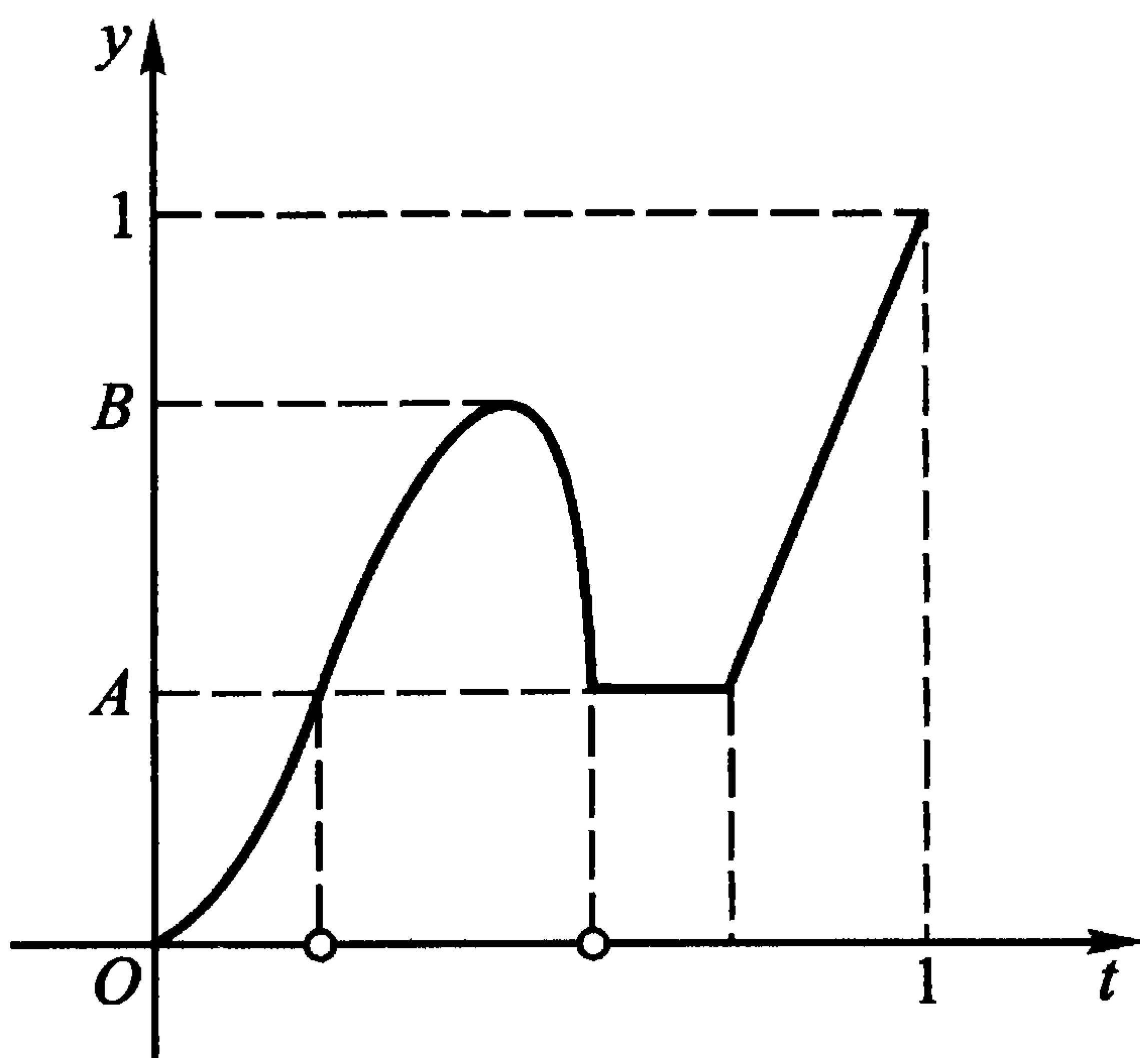


图 16

$$a'\leqslant t'\leqslant b' \quad 与 \quad a''\leqslant t''\leqslant b''$$

上且在度量空间 R 中取值的两个连续函数. 这两个函数称为等价的,乃指存在两个定义在某一闭区间

$$a\leqslant t\leqslant b$$

上的非递减连续函数:

$$t'=\varphi'(t) \quad 与 \quad t''=\varphi''(t),$$

具有以下性质:

$$\varphi'(a) = a', \qquad \varphi'(b) = b',$$

$$\varphi''(a) = a'', \qquad \varphi''(b) = b'',$$

且对一切 $t \in [a,b]$

$$f'[\varphi'(t)] = f''[\varphi''(t)].$$

不难看出,上面引进的等价关系是自反的(f 等价于 f)、对称的(如果 f' 等价于 f'',那么 f'' 等价于 f'). 可以证明,它还是传递的(从 f' 与 f'' 的等价性及 f'' 与 f''' 的等价性推出 f' 与 f''' 的等价性). 因此,上述类型的一切连续函数可以分成相互等价的函数类. 每一这样的类就在空间 R 中定义一条连续曲线.

对定义在任何闭区间 $[a',b']$ 上的任一函数 $P=f'(t')$,可以找到定义在闭区间 $[a'',b'']=[0,1]$ 上与 P 等价的函数. 事实上,只要设①

$$t' = \varphi'(t) = (b'-a')t + a', \quad t'' = \varphi''(t) = t.$$

这样,可以假定任一曲线是由定义在闭区间 $[0,1]$ 上的函数的参数式给出的.

因此,我们引入闭区间 $I=[0,1]$ 到具有度量

$$\rho(f,g) = \sup_t \rho(f(t),g(t))$$

的空间 R 内的连续映射 f 的空间 $C_{I,R}$,并在该空间中来研究是适宜的.

我们认为,曲线序列 $L_1,L_2,\cdots,L_n,\cdots$ 在下述情况下收敛于曲线 L:如果曲线 L_n 可以表为形如

$$P = f_n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

的参数式,而曲线 L 可以表为形如

$$P = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

的参数式,且使得当 $n \to \infty$ 时 $\rho(f,f_n) \to 0$.

应用拓广的阿尔采拉定理(§7 定理 7),不难证明下面的定理.

定理 1　如果紧统 K 中的曲线序列 $L_1,L_2,\cdots,L_n,\cdots$ 可以借助于闭区间 $[0,1]$ 上的等度连续函数的参数式表出,那么从曲线序列中可选出收敛的子序列.

设曲线是用函数的参数式

$$P = f(t), a \leqslant t \leqslant b$$

给出的. 现在我们把曲线的长定义为具有下面形式的和

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(f(t_{i-1}),f(t_i))$$

的上确界,其中点 t_i 只满足条件:

$$a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_i \leqslant \cdots \leqslant t_n = b.$$

---

① 我们总认为 $a<b$. 但也不排除由单独一个点组成的"曲线",要是在 $[a,b]$ 上所得到的函数 $f(t)$ 是常数的话. 这对于下面的讨论也是方便的.

不难看出,曲线的长不依赖于其参数表达式的选择. 如果曲线只限用给定在闭区间[0,1]上的函数的参数表达式,那么不难证明,曲线的长是f(在空间$C_{I,R}$中)的下半连续泛函. 用几何的语言,这个结果可叙述为下面关于半连续性的定理.

定理 2 如果曲线序列$\{L_n\}$收敛于曲线L,那么曲线L的长不大于曲线L_n的长的下极限.

现在我们专门考察有限长的曲线. 设曲线是用函数的参数式

$$P = f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

定义的. 我们只考察闭区间$[a,T]$(其中$a \leqslant T \leqslant b$)上的函数$f$,这个函数在曲线上定义了从点$P_a = f(a)$到点$P_T = f(T)$的“始截段”. 设$s = \varphi(T)$是始截段的长. 不难证明:

$$P = g(s) = f[\varphi^{-1}(s)]$$

是同一条曲线新的参数表示式. 这时s遍历闭区间$0 \leqslant s \leqslant S$,其中$S$是我们所研究的整条曲线的长. 这个表示式满足要求:

$$\rho(g(s_1), g(s_2)) \leqslant |s_2 - s_1|$$

(弧长不小于弦长).

现在转到闭区间[0,1]上,我们得到满足利普希茨条件

$$\rho(F(\tau_1), F(\tau_2)) \leqslant S|\tau_1 - \tau_2|$$

的参数表示式

$$P = F(\tau) = g(s), \tau = \frac{s}{S}.$$

于是,我们看到,对于长为$S \leqslant M$(其中M为某常数)的一切曲线来说,以给定在闭区间[0,1]上的等度连续函数的参数表示是可能的. 因而可把定理 1 应用到这些曲线上.

我们将用下面重要命题的证明为例来表明所得一般结果的效力.

定理 3 如果在紧统K中的两点A与B可以用有限长的连续曲线联结,那么在这些曲线中存在最短的曲线.

事实上,设Y是联结紧统K中A与B两点各曲线长的下确界. 并设联结A与B的曲线L_1, $L_2, \cdots, L_n, \cdots$的长趋于Y. 根据定理 1,从序列$\{L_n\}$中可选出收敛的子序列. 根据定理 2,这个子序列的极限曲线不可能有大于Y的长.

我们指出,甚至当K是欧几里得三维空间中的闭光滑(适当次数可微)曲面时,定理 3 也不能从微分几何教程中建立的结果直接推出. 因在微分几何教程中,通常局限于两点A与B彼此充分接近的情形.

如果我们把给定的度量空间R的一切曲线所成的集赋予度量空间的结构,那么上面所得到的一切论述就更为明显. 这个度量空间的结构可如下作出:设曲线L_1的参数表示式为$P = f_1(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$,曲线$L_2$的参数表示式为$P = f_2(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. 则曲线$L_1$与$L_2$之间的距离由公式

$$\rho(L_1, L_2) = \inf \rho(f_1, f_2)$$

定义,其中下确界按所有L_1与L_2的参数式偶来取.

这个距离满足度量空间的公理的证明很简单,但有一点除外,即证明由 $\rho(L_1,L_2)=0$ 推出曲线 L_1 与 L_2 全同时,就会引起某些困难.这个事实是下述情形的直接推论,即在适当选择参数表示式 f_1 与 f_2 的情况下便可达到我们上面定义的距离 $\rho(L_1,L_2)$ 公式中的下确界,但这一命题的证明同样不很简单.

第三章　赋范线性空间与线性拓扑空间

---

§1. 线性空间

线性空间的概念是数学中最基本的概念之一,它不仅在本章而且在以后各章的讨论中都起着重要的作用.

1. 线性空间的定义及例子

定义 1　元素 $x, y, z, \cdots$ 的非空集 L 叫做线性空间或向量空间,乃指它满足以下条件:

Ⅰ. 对于任意两个元素 $x, y \in L$,可唯一确定第三个元素 $z \in L$,z 称为它们的和并记作 $x+y$,并且

1) $x+y=y+x$　(交换律),

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$　(结合律),

3) 在 L 中存在这样的元素 0,使得对于所有的 $x \in L$,$x+0=x$(零元的存在性),

4) 对于任一 $x \in L$,存在这样的元素 $-x$,使得 $x+(-x)=0$(相反元素的存在性).

Ⅱ. 对于任一数 α 及任一元素 $x \in L$,可确定元素 $\alpha x \in L$(数 α 乘以元素 x 的乘积),并且

1) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$,

2) $1 \cdot x=x$,

3) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

4) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

区分复的与实的线性空间[1]，视所采用数是怎样的范围(所有复数或仅仅实数)而定. 在没有相反说明的那些地方，我们所叙述的不仅对于实空间，而且对于复空间都是正确的.

注意，对于每一个复线性空间，如果在其中仅限于用实数乘以向量的乘法，那么它就可以看作某一实空间.

我们研究线性空间的一些例子，请读者对这些例子用上述公理加以验证.

例 1　直线 $\mathbf{R}$，即具有通常加法与乘法算术运算的实数全体，是一线性空间.

例 2　一切可能的 n 个实数组 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体也是线性空间，其中加法与数乘的乘法按下列公式定义：

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n).$$

这种空间叫做实 n 维[2]算术空间并记作 $\mathbf{R}^n$. 类似地，复 n 维算术空间 $\mathbf{C}^n$ 定义为 n 个复数(具有任意复数数乘的乘法)组的全体.

例 3　在某一闭区间 $[a,b]$ 上，具有通常加法及数乘以函数乘法运算的连续(实或复)函数构成线性空间 $C[a,b]$，这是分析学中最重要的空间之一.

例 4　空间 l_2 为一线性空间，它的元素为满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty \tag{1}$$

并具有运算

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)+(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$$
$$=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n,\cdots)$$
$$\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n,\cdots)$$

的数列

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots).$$

从初等不等式 $(a_1+a_2)^2\leqslant 2a_1^2+2a_2^2$ 推出满足条件(1)的两个数列的和也满足这个条件.

例 5　按坐标进行加法和数乘乘法运算的收敛序列 $x=(x_1,x_2,\cdots)$ 构成线性空间. 记它为 c.

例 6　具有与例 5 同样的加法与乘法运算的收敛于 0 的序列也构成线性空间，

---

① 也可以在任意域上研究线性空间.

② 这个术语将在后面解释.

将它记作 c_0.

例 7 具有与例 4—例 6 同样的加法与数乘乘法运算的一切有界数列的全体 m 也是线性空间.

例 8 最后,具有与例 4—例 7 同样的加法与数乘乘法运算的所有可能数列的全体 $\mathbf{R}^\infty$ 也是线性空间.

由于线性空间的性质——元素的加法及数乘乘法运算这个性质,自然引入以下定义.

定义 2 线性空间 L 与 L^* 叫做同构的,乃指它们之间的元素可以建立一一对应,且在 L 与 L^* 中具有协调的运算. 这意味着从

$$x \longleftrightarrow x^*,$$

$$y \longleftrightarrow y^*$$

$(x, y \in L, x^*, y^* \in L^*)$ 推得

$$x + y \longleftrightarrow x^* + y^*$$

与

$$\alpha x \longleftrightarrow \alpha x^*$$

(α 为任意数).

同构的空间可以看作同一空间的不同实现. n 维算术空间(实或复)与具有通常多项式加法与多项式数乘乘法运算的、次数 $\leqslant n-1$ 的一切多项式组成的空间(对应地具有实或复系数),可以看作同构线性空间的例子(试证同构性!).

2. 线性相关性 线性空间 L 的元素 $x, y, \cdots, w$ 叫做线性相关的,乃指存在一组不全为 0 的数 $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$,使得

$$\alpha x + \beta y + \cdots + \lambda w = 0. \tag{2}$$

在相反的情形,这些元素就叫做线性无关的. 换言之,元素 $x, y, \cdots, w$ 线性无关,乃指从等式(2)推出 $\alpha = \beta = \cdots = \lambda = 0$.

空间 L 的元素 $x, y, \cdots$ 的无限组叫做线性无关的,乃指它的任意有限子组线性无关.

如果在空间 L 中可以找到 n 个线性无关的元素,而该空间的任意 $n+1$ 个元素线性相关,则说空间 L 有维数 n. 如果在 L 中可以指出由任意有限多个线性无关的元素构成的组,则说空间 L 是无限维的. n 个线性无关的元素的任意组叫做 n 维空间 L 的基. 不难验证,实空间 $\mathbf{R}^n$ 与复空间 $\mathbf{C}^n$ 都具有维数 n,从而说明维数名称的合理性.

有限维线性空间在线性代数教程中去研究. 与此相反,我们通常将只研究无限维空间,从分析学观点来看,无限维空间有基本的意义. 我们建议读者验证,在例 3

至例 8 中所指出的每一空间,都具有无限维数.

3. 子空间　线性空间 L 的非空子集 L',如果它本身对于 L 中定义的加法与数乘运算构成一线性空间,则 L'称为子空间.

换言之,$L'\subset L$ 是子空间,就是说从 $x\in L'$,$y\in L'$推出对于任意的 α 与 β,$\alpha x+\beta y\in L'$.

在任一线性空间 L 中,都有由唯一零元组成的子空间,即零子空间. 另一方面,整个 L 可以看作自身的子空间. 异于 L 且至少包含一个非零元素的子空间叫做真子空间.

我们给出真子空间的例子.

例 1　设 L 是任一线性空间,而 x 是其某一非零元素. 元素 $\{\lambda x\}$ 的全体显然构成一维子空间,其中 λ 取遍一切数(实数或复数). 如果 L 的维数大于 1,它是真子空间.

例 2　我们考察连续函数空间 $C[a,b]$(第 1 段例 3)与其中一切多项式的全体 $P[a,b]$. 显然,多项式构成 $C[a,b]$ 中的子空间(和 $C[a,b]$一样,具有无限维数). 同时,空间 $C[a,b]$本身可以看作$[a,b]$上由所有连续与间断函数组成的更广的空间的子空间.

例 3　最后,考察空间 l_2,c_0,c,m 及 $\mathbf{R}^\infty$(第 1 段例 4 至例 8). 其中每一个空间都是其后面一个空间的真子空间.

设$\{x_\alpha\}$是线性空间 L 的元素组成的任意非空集. 则在 L 中存在包含$\{x_\alpha\}$的最小的子空间(或许与 L 重合). 事实上,在 L 中至少存在一个包含$\{x_\alpha\}$的子空间,即全空间 L. 其次显然,子空间任何集$\{L_\gamma\}$的交仍然是子空间. 实际上,如果 $L^*=\bigcap\limits_\gamma L_\gamma$ 及 $x,y\in L^*$,则对于一切 α,β,也有 $\alpha x+\beta y\in L^*$. 现在取包含向量组$\{x_\alpha\}$的一切子空间,并考察它们的交. 这也是包含组$\{x_\alpha\}$的最小子空间. 这样的最小子空间我们称为由集$\{x_\alpha\}$生成的子空间,或称为集$\{x_\alpha\}$的线性包. 我们将这个子空间记为 $L(\{x_\alpha\})$.

习题　线性空间 L 的元素线性无关组$\{x_\alpha\}$叫做哈默尔(Hamel)基,乃指它的线性包与 L 重合. 试证以下命题:

1) 在每一个线性空间中存在哈默尔基.

提示　利用佐恩引理.

2) 如果$\{x_\alpha\}$是 L 中的哈默尔基,则每一向量 $x\in L$ 都以唯一的方式表为某一向量组$\{x_\alpha\}$的有限线性组合.

3) 线性空间的任何两个哈默尔基等势. 线性空间的哈默尔基的势有时称为该空间的代数维数.

4) 线性空间是同构的,当且仅当它们有相同的代数维数.

4. 商空间　设 L 是线性空间,而 L'是它的某一子空间. 我们说 L 中的两个元素 x 与 y 是等价的,乃指它们的差 $x-y$ 属于 L'. 这个关系是自反的、对称的、传递的,亦即确定了所有 $x\in L$ 的分类. 等价的元素的类叫做(关于子空间 L')剩余类. 所有这

样的类的全体称为 L 关于 L' 的商空间，并记作 L/L'.

在任何商空间中，自然就要引进加法和数乘运算. 设 ξ 与 η 是 L/L' 中的元素，即两个类. 在这两个类中我们分别取一个代表，比如说 x 与 y，并把包含元素 $x+y$ 的类 ζ 叫做类 ξ 与 η 的和，而把包含元素 αx 的类叫做数 α 与类 ξ 的乘积. 不难验证，这一断语不因代表 x 与 y 被同类任何其他代表 x' 与 y' 代换而改变. 于是，我们确实定义了商空间 L/L' 关于元素的线性运算. 直接验证表明，这些运算满足线性空间运算的所有要求（请加以验证！）. 换言之，任一商空间 L/L'（具有我们刚才定义的加法与数乘法）乃是一线性空间.

如果 L 为 n 维空间，而其子空间 L' 有维数 k，则商空间 L/L' 具有维数 $n-k$（请证之！）.

设 L 是任意线性空间而 L' 是它的某一子空间. 商空间 L/L' 的维数叫做空间 L 中的子空间 L' 的余维数.

如果子空间 $L'\subset L$ 具有有限余维数 n，则在 L 中可选取元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得任一元素 $x\in L$ 可（唯一地）表为

$$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n+y$$

的形式，其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是数而 $y\in L'$. 事实上，设商空间 L/L' 具有维数 n. 在这个商空间中选取基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 且从每一个类 ξ_k 按 x^k 来选取代表. 现设 x 是 L 中的任一元素而 ξ 是包含 x 的 L/L' 中的类，则

$$\xi=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\cdots+\alpha_n\xi_n.$$

按定义，这意味着对于 ξ 中的每一元素，特别对于元素 x，与元素 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性组合区别仅在于 L' 中的元素，即

$$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n+y.$$

请读者证明这种写法的唯一性.

5. 线性泛函 定义在某一线性空间 L 上的数值函数 f 称为泛函. 泛函 f 叫做可加的，乃指对于一切 $x,y\in L$，

$$f(x+y)=f(x)+f(y);$$

它称为齐次的，指的是

$$f(\alpha x)=\alpha f(x),$$

其中 α 是任意数.

在复线性空间定义的泛函 f 叫做共轭齐次的，是指 $f(\alpha x)=\overline{\alpha}f(x)$，其中 $\overline{\alpha}$ 是 α 的共轭复数.

可加齐次泛函叫做线性泛函. 可加共轭齐次泛函叫做共轭线性泛函，有时叫做

半线性泛函.

下面给出线性泛函的例子.

例 1　设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维算术空间,其中元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,而 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是 n 个确定数的任意数组. 则

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

是 $\mathbf{R}^n$ 中的线性泛函. 表示式

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i$$

乃是 $\mathbf{C}^n$ 中的共轭线性泛函.

例 2　积分

$$I[x] = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t \text{ 与 } \bar{I}[x] = \int_a^b \bar{x}(t)\,\mathrm{d}t$$

分别是空间 $C[a,b]$ 中的线性泛函与共轭线性泛函.

例 3　考虑更一般的例子. 设 y_0 是$[a,b]$上的某一确定的连续函数. 对于任意函数 $x\in C[a,b]$,命

$$F(x) = \int_a^b x(t)y_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

从积分运算的基本性质推出这个泛函的线性性质. 泛函

$$\bar{F}(x) = \int_a^b \bar{x}(t)y_0(t)\,\mathrm{d}t$$

(在复空间 $C[a,b]$ 中)是共轭线性的.

例 4　考虑同一空间 $C[a,b]$ 的另一类线性泛函,即命 $\delta_{t_0}(x)=x(t_0)$. 于是,泛函 δ_{t_0}在函数 x 上的值等于该函数在固定点 t_0 的值.

这个泛函通常写作

$$\delta_{t_0}(x) = \int_a^b x(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t$$

的形式. δ“函数”理解为,除点 $t=0$ 以外,它处处都等于零,而它的积分等于 1(狄拉克 δ 函数). 这个“函数”在广义函数理论范围中有严格的定义,广义函数论初步将在下一章 §4 中叙述.

例 5　我们给出空间 l_2 中线性泛函的例子. 设 k 是确定的正整数. 对 l_2 中的任一 $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$,令 $f_k(x)=x_k$. 这个泛函的线性性质是明显的. 此泛函可“推广”到其他序列空间,例如 $c_0,c,m,\mathbf{R}^\infty$ 空间(第 1 段例 5—例 8).

6. 线性泛函的几何意义 设 f 是线性空间 L 上某一不恒等于零的线性泛函. L 中满足条件

$$f(x)=0$$

的元素 x 的全体乃是空间 L 的子空间——零子空间或泛函 f 的核. 事实上,如果 $f(x)=f(y)=0$,则

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)=0.$$

这个子空间记作 $\operatorname{Ker} f$①.

子空间 $\operatorname{Ker} f$ 具有余维数 1. 事实上,取不属于 $\operatorname{Ker} f$ 的任一元素 x_0,即使 $f(x_0)\neq 0$ 的元素 x_0. 这样的元素可以找到,因为 $f(x)\not\equiv 0$. 不失一般性,可以认为 $f(x_0)=1$,否则我们把 x_0 换成 $\frac{x_0}{f(x_0)}$ $\left(\text{显然}, f\left(\frac{x_0}{f(x_0)}\right)=1\right)$. 对每一元素 x,命 $y=x-f(x)x_0$,则 $f(y)=f(x-f(x)x_0)=0$,即 $y\in\operatorname{Ker} f$. 元素 x 的表达式 $x=\alpha x_0+y$ 对于固定的元素 x_0 是唯一的,其中 $y\in\operatorname{Ker} f$. 事实上,设

$$x=\alpha x_0+y, y\in\operatorname{Ker} f, x=\alpha' x_0+y', y'\in\operatorname{Ker} f.$$

这时 $(\alpha-\alpha')x_0=y'-y$. 如果 $\alpha=\alpha'$,显然有 $y'=y$. 如果 $\alpha\neq\alpha'$,则 $x_0=\frac{y'-y}{\alpha-\alpha'}\in\operatorname{Ker} f$,这与 x_0 的选取矛盾.

由此推出,两个元素 x_1 与 x_2 关于子空间 $\operatorname{Ker} f$ 属于同一剩余类的充要条件为 $f(x_1)=f(x_2)$.

事实上,从 $x_1=f(x_1)x_0+y_1$, $x_2=f(x_2)x_0+y_2$ 推出 $x_1-x_2=(f(x_1)-f(x_2))x_0+(y_1-y_2)$. 由此看出,$x_1-x_2\in\operatorname{Ker} f$ 的充要条件为 x_0 的系数等于零,即 $f(x_1)-f(x_2)=0$.

每一关于子空间 $\operatorname{Ker} f$ 的类 ξ,都可从自己的代表中的任何一个代表来确定. 可取形如 αx_0 的元素作为这个代表. 由此可见,子空间 $L/\operatorname{Ker} f$ 实际上是一维的,即 $\operatorname{Ker} f$ 具有余维数 1.

子空间 $\operatorname{Ker} f$ 定义了一个在其上等于零的线性泛函,若不计常数因子,则这样定义的泛函是唯一的.

事实上,设泛函 f 与 g 具有同一核:$\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} g$. 取元素 x_0,使得 $f(x_0)=1$. 我们断定 $g(x_0)\neq 0$. 事实上,

$$x=f(x)x_0+y, y\in\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} g$$

及

① 出自英文单词 kernel(核).

$$g(x) = f(x)g(x_0) + g(y) = f(x)g(x_0).$$

若值 $g(x_0)$ 等于 0,则泛函 g 恒等于零. 由等式 $g(x) = g(x_0)f(x)$ 就推出泛函 g 与 f 成比例.

对于余维数为 1 的任一子空间 L',可以指出这样的泛函 f,使得 $\operatorname{Ker} f = L'$. 只要选取任意元素 $x_0 \notin L'$,并把每一元素 $x \in L$ 表为 $x = \alpha x_0 + y$ 的形式. 这个表示式是唯一的. 令 $f(x) = \alpha$,我们对某一 $\operatorname{Ker} f = L'$ 就得到线性泛函 f(证明之!).

设 L' 是线性空间 L 中余维数为 1 的任意子空间,则空间 L 关于子空间 L' 的任一剩余类叫做与子空间 L' 平行的超平面(特别,子空间 L' 本身是包含 0 的超平面,即"通过坐标原点"的超平面). 换言之,与子空间 L' 平行的超平面 M',是从 L' 平移(移动)任一向量 $x_0 \in L$ 所得到的这个集:

$$M' = L' + x_0 = \{y : y = x + x_0, x \in L'\}.$$

显然,如果 $x_0 \in L'$,则 $M' = L'$;如果 $x_0 \notin L'$,则 $M' \neq L'$. 如果 f 是空间 L 上的非平凡线性泛函,则集 $M_f = \{x : f(x) = 1\}$ 是与子空间 $\operatorname{Ker} f$ 平行的超平面(事实上,固定任一元素 x_0,使得 $f(x_0) = 1$,我们可以把任一向量 $x \in M_f$ 表为 $x = x_0 + y$ 的形式,其中 $y \in \operatorname{Ker} f$). 另一方面,如果 M' 是与子空间 L'(余维数为 1)平行的且不通过坐标原点的任一超平面,则存在唯一的线性泛函,使得 $M' = \{x : f(x) = 1\}$. 事实上,设 $M' = L' + x_0, x_0 \in L$,则任一元素 $x \in L$ 可唯一地表成 $x = \alpha x_0 + y$ 的形式,其中 $y \in L'$. 像前面一样,令 $f(x) = \alpha$,我们得到要求的线性泛函. 如果对于 $x \in M'$,$g(x) \equiv 1$,则对于 $y \in L'$,$g(y) \equiv 0$. 于是

$$g(\alpha x_0 + y) = \alpha = f(\alpha x_0 + y).$$

由此推得线性泛函 f 的唯一性.

这样一来,定义在 L 上的所有非平凡线性泛函与在 L 中不通过坐标原点的所有超平面建立了一一对应.

习题　设 $f, f_1, \cdots, f_n$ 是线性空间 L 上的线性泛函,使得由 $f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0$ 推得 $f(x) = 0$. 则存在常数 $a_1, \cdots, a_n$,使得对于一切 $x \in L$,$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$.

§2. 凸集与凸泛函. 哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理

1. 凸集与凸体　线性空间理论许多重要的部分以凸性概念为基础. 它凭借几何的直观概念,但同时也容许纯粹解析的叙述.

设 L 是某一实线性空间,x 与 y 是它的两个点. 我们把形如

$$\alpha x + \beta y, \text{其中 } \alpha, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta = 1$$

的所有元素的全体叫做 L 中连接点 x 与 y 的闭线段.

无端点 x 与 y 的线段称为开线段.

集 $M\subset L$ 叫做凸的,乃指它包含任意两点 x 与 y 的同时也包含连接它们的线段.

所谓任意集 $E\subset L$ 的核 $J(E)$ 是指这样一些它的点 x 的全体:对于任一 $y\in L$,可以找到数 $\varepsilon=\varepsilon(y)>0$,使得对于 $|t|<\varepsilon$,有

$$x+ty\in E.$$

其核非空的凸集称为凸体.

例 1 在三维欧几里得空间中,立方体、球、四面体、半空间都是凸体. 在同一空间中,线段、平面、三角形都是凸集,但不是凸体.

例 2 考察闭区间 $[a,b]$ 上连续函数空间中满足条件 $|f(t)|\leqslant 1$ 的函数所成的集. 这个集是凸的. 事实上,如果 $|f(t)|\leqslant 1$ 及 $|g(t)|\leqslant 1$,则对于 $\alpha+\beta=1,\alpha,\beta\geqslant 0$

$$|\alpha f(t)+\beta g(t)|\leqslant\alpha+\beta=1.$$

习题 试说明例 2 中的集是不是凸体.

例 3 在 l_2 中的单位球(满足 $\sum x_n^2\leqslant 1$ 的点 $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$ 组成的集)是凸体. 它的核由满足条件 $\sum x_n^2<1$ 的点 x 组成.

例 4 l_2 中的基本平行六面体 Π 是凸集,但不是凸体. 事实上,设 $x\in\Pi$,这表示对所有的 $n=1,2,\cdots,|x_n|\leqslant 1/2^{n-1}$. 令 $y_0=(1,1/2,\cdots,1/n,\cdots)$. 设 $x+ty_0\in\Pi$,即 $|x_n+t/n|\leqslant 1/2^{n-1}$,则

$$\left|\frac{t}{n}\right|\leqslant\left|x_n+\frac{t}{n}\right|+|x_n|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-2}}.$$

由此可见 $t=0$,即集 Π 的核是空的.

习题 1 设 Φ 是 l_2 中满足条件 $\sum n^2x_n^2\leqslant 1$ 的点 $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$ 组成的集. 证明 Φ 是凸集,但不是凸体.

习题 2 对于 l_2 中如下点集进行同样的证明:其中每一个点只具有有限个异于零的坐标.

若 M 是凸集,则它的核 $J(M)$ 也是凸的. 事实上,设 $x,y\in J(M)$ 且 $z=\alpha x+\beta y$, $\alpha,\beta\geqslant 0,\alpha+\beta=1$. 则对于给定的 $a\in L$,可以找到 $\varepsilon_1>0$ 及 $\varepsilon_2>0$,使得对于 $|t_1|<\varepsilon_1,|t_2|<\varepsilon_2$,点 $x+t_1a$ 及 $y+t_2a$ 属于集 M. 因而点 $\alpha(x+t_1a)+\beta(y+t_2a)=z+ta$ 对于 $|t|<\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 也属于 M,即 $z\in J(M)$.

下面我们给出凸集的重要性质.

定理 1 任意多个凸集的交仍是凸集.

证明 设 $M=\bigcap\limits_{\alpha}M_\alpha$ 并且所有 M_α 都是凸集. 其次,设 x 与 y 是 M 中两个任意点. 则连接点 x 与 y 的线段属于每一 M_α,因而也属于 M. 于是,M 的确是凸的.

注意,凸体的交(是凸集)不一定是凸体(试举例说明).

在线性空间 L 中,对于任意集 A,存在包含它的最小凸集;包含 A 的所有凸集的交是最小凸集(至少存在一个包含 A 的凸集,这就是全空间 L). 我们称包含 A 的最

小凸集为集 A 的凸包.

下面研究凸包的一个重要例子. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$是某一线性空间的点. 我们说这些点占有最广位置. 乃指向量 $x_2-x_1,x_3-x_1,\cdots,x_{n+1}-x_1$ 线性无关 $\left(\right.$这等价于从 $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i=0$ 与 $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=0$ 推出 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n+1}=0\left.\right)$. 占有最广位置的点 x_1, $x_2,\cdots,x_{n+1}$ 的凸包叫做 n－维单纯形,而点 $x_1,\cdots,x_{n+1}$ 本身是它的顶点. 零维单纯形就是一个点. 一维单纯形是线段,二维单纯形是三角形,三维单纯形是四面体.

如果点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$占有最广位置,则其中任何 $k+1(k<n)$个点也占有最广位置,从而生成某一 k－维单纯形,称之为给定 n－维单纯形的 k－维边界. 例如,以 e_1,e_2,e_3,e_4 为顶点的四面体具有分别用三个顶点(e_2,e_3,e_4),(e_1,e_3,e_4),(e_1,e_2,e_4),(e_1,e_2,e_3)确定的 4 个二维边界,6 个一维边界和 4 个零维边界.

定理 2　顶点为 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$的单纯形是所有可以表为形如

$$x=\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k x_k,\alpha_k\geqslant 0,\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k=1 \tag{1}$$

的点组成的.

证明　不难验证,形如(1)的点的全体 S 乃是包含点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$的凸集. 另一方面,任一包含这些点的凸集应当也包含形如(1)的点. 因而,S 是包含点 x_1, $x_2,\cdots,x_{n+1}$的最小凸集.

2. 齐次凸泛函　齐次凸泛函是与凸集概念紧密联系的重要概念. 设 L 是实线性空间. L 上定义的泛函 p 叫做凸的,乃指对于一切 $x,y\in L$ 及 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$,

$$p=(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha p(x)+(1-\alpha)p(y). \tag{2}$$

泛函 p 称为正齐次的,乃指对于一切 $x\in L$ 及一切 $\alpha>0$,

$$p(\alpha x)=\alpha p(x). \tag{3}$$

对于正齐次凸泛函,不等式

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y) \tag{2'}$$

成立.

事实上,

$$p(x+y)=2p\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant 2\left(p\left(\frac{x}{2}\right)+p\left(\frac{y}{2}\right)\right)=p(x)+p(y).$$

不难看出,条件(2′)与条件(3)一起保证泛函 p 的凸性. 我们将简称正齐次凸泛函为齐次凸泛函. 下面指出齐次凸泛函的一些简单性质.

1) 在等式(3)中令 $x=0$,得

$$p(0)=0. \tag{4}$$

2) 从(2′)及(4)推出,对于一切 $x\in L$,

$$0=p(x+(-x))\leqslant p(x)+p(-x). \tag{5}$$

该不等式意味着,特别当 $p(x)<0$ 时,则必有 $p(-x)>0$. 因此,非零齐次凸泛函可以是处处非负的,但如果处处 $p(x)\leqslant 0$,则 $p(x)\equiv 0$.

3) 对于任何 α

$$p(\alpha x)\geqslant \alpha p(x).$$

当 $\alpha>0$ 时这可由(3)推得;当 $\alpha=0$ 时可从(4)推得;如果 $\alpha<0$,则根据(5)得到

$$0\leqslant p(\alpha x)+p(|\alpha|x)=p(\alpha x)+|\alpha|p(x),$$

即

$$p(\alpha x)\geqslant -|\alpha|p(x)=\alpha p(x).$$

例 1 任一线性泛函显然是齐次凸的. 如果 f 是线性的,则泛函 $p(x)=|f(x)|$ 也是齐次凸的.

例 2 n 维欧几里得空间中的向量的长是齐次凸泛函. 这里条件(2′)表示,两向量和的长不大于它们的长的和(三角不等式),而(3)直接从 $\mathbf{R}^n$ 中向量长的定义推出.

例 3 设 m 是有界序列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 组成的空间. 泛函

$$p(x)=\sup_n |x_n|$$

是齐次凸的.

3. 闵可夫斯基泛函 设 L 是任意线性空间而 A 是 L 中的凸体,它的核包含点 0. 泛函

$$p_A(x)=\inf\left\{r:\frac{x}{r}\in A,r>0\right\} \tag{6}$$

叫做凸体 A 的闵可夫斯基泛函.

定理 3 闵可夫斯基泛函(6)是齐次凸的与非负的. 反之,如果 $p(x)$ 是线性空间 L 上任意齐次凸非负泛函,k 是正数,则

$$A=\{x:p(x)\leqslant k\} \tag{7}$$

是凸体,它的核是集 $\{x:p(x)<k\}$(包含点 0). 如果(7)中 $k=1$,则原泛函 $p(x)$ 是 A 的闵可夫斯基泛函.

证明 对每一 $x\in L$,如果 r 充分大,则元素 x/r 属于 A. 因此,由等式(6)定义的量 $p_A(x)$ 非负且有限. 我们来证明泛函(6)的正齐次性. 如果 $t>0$ 且 $y=tx$,则

$$\begin{aligned}p_A(y) &= \inf\{r>0: y/r\in A\} = \inf\{r>0: tx/r\in A\}\\ &= \inf\{tr'>0: x/r'\in A\} = t\inf\{r'>0: x/r'\in A\}\\ &= tp_A(x).\end{aligned} \tag{8}$$

再来验证 $p_A(x)$ 的凸性. 设 $x_1,x_2\in L$ 及 $\varepsilon>0$ 是任意的. 取数 $r_i(i=1,2)$ 使得 $p_A(x_i)<r_i<p_A(x_i)+\varepsilon$, 则 $x_i/r_i\in A$. 令 $r=r_1+r_2$, 则点 $(x_1+x_2)/r=r_1x_1/(rr_1)+r_2x_2/(rr_2)$ 属于具有端点 x_1/r_1 与 x_2/r_2 的线段. 由于 A 的凸性, 这条线段属于 A, 也就意味着点 $(x_1+x_2)/r$ 属于 A. 因此

$$p_A(x_1+x_2)\leqslant r=r_1+r_2<p_A(x_1)+p_A(x_2)+2\varepsilon.$$

因为这里 $\varepsilon>0$ 是任意的, 所以

$$p_A(x_1+x_2)\leqslant p_A(x_1)+p_A(x_2).$$

从而 $p_A(x)$ 满足条件(2′)与(3), 故它是非负齐次凸泛函.

现在考察集(7). 如果 $x,y\in A$ 且 $\alpha+\beta=1,\alpha,\beta\geqslant0$, 则

$$p(\alpha x+\beta y)\leqslant\alpha p(x)+\beta p(y)\leqslant k,$$

即 A 是凸的. 其次, 设 $p(x)<k,t>0$ 与 $y\in L$, 则

$$p(x\pm ty)\leqslant p(x)+tp(\pm y).$$

如果 $p(-y)=p(y)=0$, 则对于一切 t, $x\pm ty\in A$; 如果非负数 $p(y),p(-y)$ 中至少有一个异于 0, 则对于

$$t<\frac{k-p(x)}{\max[p(y),p(-y)]},$$

$x\pm ty\in A$.

由引进的定义直接看出, p 是集 $\{x:p(x)\leqslant1\}$ 的闵可夫斯基泛函.

于是, 引进闵可夫斯基泛函概念后, 我们建立了非负齐次凸泛函与其核含点 0 的凸体之间的一一对应关系.

例 1 当 $A=L$ 时, 显然

$$p_L(x)\equiv0.$$

例 2 设 A 是 R^n 中具有中心 0 与半径 r 的球, 则

$$p_A(x)\equiv\|x\|/r,$$

其中 $\|x\|$ 是向量 x 的长.

例 3 设 A 是空间 l_2 中序列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 的"一层" $-1\leqslant x_1\leqslant1$, 则

$$p_A(x)=|x_1|.$$

注 1　讨论不仅可以取有限值,而且也可以取值 $+\infty$(但不能取 $-\infty$)的齐次凸泛函有时是方便的. 这时从等式 $p(\alpha x)=\alpha p(x)$(其中 $\alpha>0$)可推出 $p(0)=0$ 或 $p(0)=+\infty$. 不难验证,在后一情况下改变它在一点的值,令 $p(0)=0$ 代换 $p(0)=+\infty$,可不破坏泛函的齐次凸性. 通常就是这样作的.

如果 $p(x)$ 是齐次凸的,但不是有限的泛函,则 $A=\{x:p(x)\leqslant k\}$ 是凸集,但不一定是凸体. 反之,如果 A 是包含点 0 的任意凸集,则对它可以用公式(6)定义闵可夫斯基泛函,但这时对 r 应当也允许取值 $+\infty$.

注 2　如果 $p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 是齐次凸泛函,则 $p_1(x)+p_2(x)$ 与 $\alpha p_1(x)(\alpha>0)$ 也是齐次凸泛函. 其次,如果 $\{p_s(x)\}_{s\in S}$ 是齐次凸泛函的任意族,则泛函 $p(x)=\sup\limits_{s\in S}p_s(x)$ 也是齐次凸的. 特别,L 上线性泛函的任意非空集的上确界 $p(x)=\sup\limits_{s\in S}f_s(x)$ 是齐次凸泛函. 利用哈恩－巴拿赫定理,不难证明,任一(有限的)齐次凸泛函都可以这样表示.

习题　线性空间 L 中的集 A 叫做吸收的,乃指对任一 $x\in L$ 存在这样的 $\alpha>0$,使得对于一切 $\lambda\geqslant\alpha$,$x\in\lambda A$. 证明:凸集 A 是吸收的,当且仅当它的核包含点 0.

4. 哈恩－巴拿赫定理　设 L 是实线性空间而 L_0 是它的某一子空间,又设子空间 L_0 上给定某一线性泛函 f_0. 在全空间 L 上定义的线性泛函 f 叫做泛函 f_0 的延拓,乃指对于一切 $x\in L_0$,

$$f(x)=f_0(x).$$

关于线性泛函延拓的问题经常在分析学中碰到,在问题的整个范围内下面的定理起着重要的作用.

定理 4(哈恩－巴拿赫)　设 p 是定义在实线性空间 L 上的齐次凸泛函,L_0 是 L 中的线性子空间. 如果 f_0 是 L_0 上的线性泛函,它从属于 L_0 上的泛函 $p(x)$,即如果在 L_0 上

$$f_0(x)\leqslant p(x),\tag{9}$$

则 f_0 可以延拓为 L 上的线性泛函 f,而 f 在全 L 上从属于 $p(x)$.

证明　我们来证明,如果 $L_0\neq L$,则泛函 f_0 可以从 L_0 延拓到保持条件(9)的某一更广的子空间 L' 上. 事实上,设 z 是不属于 L_0 的 L 中的任意元素,L' 是 L_0 与 z 生成的子空间. 对于 L' 中的每一元素都具有 $tz+x$ 的形式,其中 $x\in L_0$.

如果 f' 是 L' 上的泛函 f_0 所求的延拓,则

$$f'(tz+x)=tf'(z)+f_0(x),$$

如果令 $f'(z)=c$,则

$$f'(tz+x)=tc+f_0(x).$$

现在选取 c 使得在 L' 上保持从属条件(9),即使得对于一切 $x\in L_0$ 及一切实数 t 满

足不等式$f_0(x)+tc\leqslant p(x+tz)$. 当 $t>0$ 时,不等式等价于条件

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right)+c\leqslant p\left(\frac{x}{t}+z\right)$$

或

$$c\leqslant p\left(\frac{x}{t}+z\right)-f_0\left(\frac{x}{t}\right);$$

当 $t<0$ 时,不等式等价于条件

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right)+c\geqslant -p\left(-\frac{x}{t}-z\right)$$

或

$$c\geqslant -p\left(-\frac{x}{t}-z\right)-f_0\left(\frac{x}{t}\right).$$

我们来证明,恒存在满足上述两个条件的数 c. 设 y'与 y''是 L_0 中的任意元素,则

$$-f_0(y'')+p(y''+z)\geqslant -f_0(y')-p(-y'-z). \tag{10}$$

这可由下述不等式推得:

$$\begin{aligned} f_0(y'')-f_0(y') &\leqslant p(y''-y')=p((y''+z)-(y'+z)) \\ &\leqslant p(y''+z)+p(-y'-z). \end{aligned}$$

令

$$c''=\inf_{y''}(-f_0(y'')+p(y''+z)),$$

$$c'=\sup_{y'}(-f_0(y')-p(-y'-z)).$$

由于 y'与 y''的任意性,从(10)推出 $c''\geqslant c'$. 选取 c 使得 $c''\geqslant c\geqslant c'$,在 L'上用公式

$$f'(tz+x)=tc+f_0(x)$$

定义泛函f'. 这个泛函满足从属条件(9).

于是,我们证得,如果泛函f_0 定义在某一子空间 $L_0\subset L$ 上并满足 L_0 上的条件(9),则f_0 可以保持这个条件延拓到某一更大的子空间 L'上.

如果在 L 中可以选取生成全空间 L 的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$的可数组,则考虑子空间的递增序列

$$L^{(1)}=\{L_0,x_1\},L^{(2)}=\{L^{(1)},x_2\},\cdots,$$

可按归纳法构造 L 上的泛函(这里$\{L^{(k)},x_{k+1}\}$表示 L 中包含 $L^{(k)}$ 与 x_{k+1}的最小线性

子空间). 这时每一元素 $x\in L$ 属于某 $L^{(k)}$,从而泛函可延拓到全空间 L.

在一般情况下(即当生成 L 的可数集不存在时),我们利用佐恩引理来完成本证明. 满足从属条件(9)的泛函 f_0 的所有可能延拓的全体 $\mathscr{F}$是偏序的,并且它的每一线性有序子集 $\mathfrak{F}_0$ 都有上确界. 在泛函 $f'\in\mathfrak{F}_0$ 的定义域的并上定义的,且与在它的定义域上的每一这样的 f'重合的泛函可作为这个上确界. 根据佐恩引理,在全空间 $\mathfrak{F}$ 中存在极大元 f. 这个极大元 f 就是要求的泛函. 事实上,它是原泛函 f_0 的延拓,在其定义域上满足条件(9),且给定在全空间 L 上. 因为不然的话,我们可用上面所说延拓它的方法,从在它有定义的真子空间上延拓到更大的子空间上,且 f 不是极大元.

定理证毕.

我们再给出哈恩 - 巴拿赫定理复的形式.

复线性空间 L 上的非负泛函 p 叫做齐次凸的,乃指对于一切 $x,y\in L$ 及一切复数 λ

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),$$
$$p(\lambda x)\leqslant|\lambda|p(x).$$

定理 4a 设 p 是复线性空间 L 上的齐次凸泛函,而 f_0 是定义在某一线性子空间 $L_0\subset L$ 上且在 L_0 上满足条件

$$|f_0(x)|\leqslant p(x),x\in L_0$$

的线性泛函. 则存在定义在全 L 上并满足条件

$$|f(x)|\leqslant p(x),x\in L,\quad f(x)=f_0(x),x\in L_0$$

的线性泛函 f.

证明 我们记被看作实线性空间的空间 L 与 L_0 为 L_R 与 L_{0R}. 显然,p 是 L_R 上的齐次凸泛函,而 $f_{0R}(x)=\mathrm{Re}\,f_0(x)$ 是 L_{0R}上满足条件

$$|f_{0R}(x)|\leqslant p(x)$$

且更满足条件

$$f_{0R}(x)\leqslant p(x)$$

的实线性泛函.

根据定理 4,存在实线性泛函 f_R,它定义在全 L_R 上并满足条件

$$f_R(x)\leqslant p(x),x\in L_R(=L),$$

$$f_R(x)=f_{0R}(x),x\in L_{0R}(=L_0).$$

显然, $-f_R(x)=f_R(-x)\leqslant p(-x)=p(x)$,所以

$$|f_R(x)|\leqslant p(x),x\in L_R(=L). \tag{11}$$

令

$$f(x) = f_R(x) - if_R(ix),$$

我们定义了 L 上的泛函 f(这里我们用到了 L 是复线性空间,故在其中定义了乘以复数的乘法). 直接验证表明,f 是 L 上的复线性泛函,并且

$$f(x) = f_0(x) \quad 当 x \in L_0,$$

$$\mathrm{Re}\, f(x) = f_R(x) \quad 当 x \in L.$$

剩下证明,对一切 $x \in L$, $|f(x)| \leqslant p(x)$. 假定相反,则对于某一 $x_0 \in L$ 有 $|f(x_0)| > p(x_0)$. 我们表复数 $f(x_0)$ 为 $f(x_0) = \rho e^{i\varphi}$ 的形式,其中 $\rho > 0$,并令 $y_0 = e^{-i\varphi}x_0$. 这时

$$f_R(y_0) = \mathrm{Re}\, f(y_0) = \mathrm{Re}\,[e^{-i\varphi}f(x_0)] = \rho > p(x_0) = p(y_0),$$

这与条件(11)矛盾. 定理证毕.

习题 证明:在哈恩-巴拿赫定理中泛函 p 的有限性条件可以略去.

5. 线性空间中凸集的可分离性 设 L 是实线性空间,而 M 与 N 是它的子集. 我们说定义在 L 上的线性泛函 f 分离这两个集,乃指存在这样的数 C,使得对于 $x \in M$

$$f(x) \geqslant C$$

及对于 $x \in N$

$$f(x) \leqslant C,$$

即指

$$\inf_{x \in M} f(x) \geqslant \sup_{x \in N} f(x).$$

泛函 f 叫做严格分离集 M 与 N,乃指严格不等式

$$\inf_{x \in M} f(x) > \sup_{x \in N} f(x)$$

成立.

从分离性定义直接推出以下两个命题.

1) 线性泛函 f 分离集 M 与 N,当且仅当它分离集 $M-N$ 与 $\{0\}$(即形如 $x-y(x \in M, y \in N)$ 所有元素的集与点 0 的集).

2) 线性泛函 f 分离集 M 与 N,当且仅当对于每一 $x \in L$ 它分离集 $M-x$ 与 $N-x$.

从哈恩-巴拿赫定理容易得到以下关于线性空间中凸集分离性定理,它有着众多的应用.

定理 5 设 M 与 N 是实线性空间 L 中的凸集,并且至少其中之一的核,比如说

M 的核非空且与另一个集不相交. 则存在分离 M 与 N 的 L 上非零线性泛函.

证明 不失一般性可以认为点 0 属于集 M 的核 $\mathring{M}$.(否则我们研究集 $M-x_0$ 与 $N-x_0$,其中 $x_0\in\mathring{M}$.)设 $y_0\in N$,则点 $-y_0$ 属于集 $M-N$ 的核,而 0 属于集 $K=M-N+y_0$ 的核 $\mathring{K}$. 因为 $\mathring{M}\cap N=\varnothing$,所以 0 不属于 $M-N$ 的核且 $y_0\notin\mathring{K}$. 设 p 是 $\mathring{K}$ 的闵可夫斯基泛函,因为 $y_0\notin\mathring{K}$,所以 $p(y_0)\geqslant 1$. 引入线性泛函

$$f_0(\alpha y_0)=\alpha p(y_0).$$

它定义在由形如 αy_0 的元素组成的一维空间上,并满足条件

$$f_0(\alpha y_0)\leqslant p(\alpha y_0).$$

因为当 $\alpha\geqslant 0$ 时,$p(\alpha y_0)=\alpha p(y_0)$;当 $\alpha<0$ 时,$f_0(\alpha y_0)=\alpha f_0(y_0)<0<p(\alpha y_0)$. 根据哈恩-巴拿赫定理,$f_0$ 可以延拓为线性泛函 f,它定义在全 L 上,并且在 L 上满足条件 $f(y)\leqslant p(y)$. 由此推出,当 $y\in K$ 时,$f(y)\leqslant 1$ 并且同时 $f(y_0)\geqslant 1$. 于是,f 分离集 K 与 $\{y_0\}$,从而分离 $M-N$ 与 $\{0\}$. 因此 f 分离集 M 与 N. 定理证毕.

§3. 赋范空间

在第二章中我们已经学习了拓扑空间,特别是度量空间,即在其中用某种方法引进元素邻近概念的集,而在本章前两节中我们又讨论了线性空间. 迄今为止这些概念互不联系. 但在分析学中,需要研究在其中既引进元素加法与数乘运算,又引进某一拓扑的空间,即讨论所谓线性拓扑空间. 在线性拓扑空间当中,赋范空间构成重要一类空间. 这些空间的理论是在巴拿赫与另外一些著者的工作中发展起来的.

1. 赋范空间的定义与例子

定义 1 设 L 是线性空间. 在 L 上定义的齐次凸泛函 p 叫做范数,乃指它满足以下补充条件(除凸性外):

1) $p(x)=0$ 仅当 $x=0$,

2) 对一切 α,$p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$.

于是,我们回忆 §2 第 2 段的定义时可以说,满足以下三个条件的泛函称为 L 中的范数:

1) $p(x)\geqslant 0$,并且 $p(x)=0$ 仅当 $x=0$,

2) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$,$x,y\in L$,

3) 对任一数 α,$p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$.

定义 2 我们称在其中给定某一范数的线性空间 L 为赋范空间,并用记号 $\|x\|$ 表示元素 $x\in L$ 的范数.

如果在任一赋范空间中引进距离

$$\rho(x,y) = \|x-y\|,$$

则它就成为度量空间. 从范数的性质 1)—3) 立即推得度量空间公理的正确性. 于是,在第二章中对于度量空间叙述过的所有那些概念和事实,都可以搬到赋范空间.

完备的赋范空间叫做巴拿赫空间,或简称为 B 空间.

赋范空间的例　在第二章中作为度量空间(而在本章 §1 中是线性空间)的例子来研究的许多空间,实际上可以赋予赋范空间的自然结构.

例 1　若对任一数 $x \in \mathbf{R}^1$,令 $\|x\| = |x|$,则直线 $\mathbf{R}^1$ 为赋范空间.

例 2　若在元素为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 n 维实空间 $\mathbf{R}^n$ 中,令

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \tag{1}$$

则范数的一切公理是满足的. 公式

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中定义了它本身的度量,该度量我们曾在 $\mathbf{R}^n$ 中讨论过.

在这个线性空间中还可以引进范数

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{2}$$

或范数

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|. \tag{3}$$

这两个范数在 $\mathbf{R}^n$ 中定义了度量,这两个度量我们已经在第二章 §1 第 1 段的例 4 与例 5 中研究过了. 验证它们确实满足范数公理不会产生困难.

在复 n 维空间 $\mathbf{C}^n$ 中可以引进范数

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

或范数(2)与(3)中的任何一个.

例 3　在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数空间 $C[a,b]$ 中,用公式

$$\|f\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t)| \tag{4}$$

定义范数. 在第二章 §1 第 1 段的例 6 中已经研究了相应的距离.

例 4　设 m 是有界数列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 组成的空间. 令

$$\|x\| = \sup_n |x_n|. \tag{5}$$

在这里范数定义的条件 1)—3)显然满足. 在 m 中由这个范数诱导的度量与我们已经讨论的度量(第二章 §1 第 1 段例 9)一致.

2. 赋范空间的子空间 我们曾经定义了(不赋予任意拓扑的)线性空间 L 的子空间为具有这样性质的非空集 L_0:如果 $x,y \in L_0$,则 $\alpha x+\beta y \in L_0$. 在赋范空间中,我们主要感兴趣的是闭线性子空间,即包含其所有极限点的子空间. 在有限维赋范空间中的任一子空间自然是闭的(试证明之!). 在无限维的情形却不然. 例如,在连续函数空间 $C[a,b]$ 中,具有范数(4)的多项式构成子空间,但不是闭子空间①.

另一个例:在有界序列空间 m 中,仅含有限个异于零的项的序列构成子空间. 但按范数(5)它不是闭的,例如,它的闭包含有序列$(1,1/2,\cdots,1/n,\cdots)$.

通常我们仅研究闭子空间,所以自然要修改 §1 中已经给出的术语. 现在,我们将仅仅把闭的子空间叫做赋范空间的子空间. 特别,包含元素组 $\{x_\alpha\}$ 的最小闭子空间叫做由给定元素组 $\{x_\alpha\}$ 生成的子空间. 我们将把该子空间看作组 $\{x_\alpha\}$ 的线性闭包. 我们称包含 x 和 y 以及它们的任意线性组合 $\alpha x+\beta y$ 的元素的集(不一定是闭的)为线性流形.

称位于赋范空间 E 中的元素组为完备的,乃指以元素组生成的(闭的!)子空间是全空间 E. 例如,根据魏斯特拉斯定理,所有函数 $1,t,t^2,\cdots,t^n,\cdots$的集合在连续函数空间 $C[a,b]$ 中是完备的.

3. 赋范空间的商空间 设 R 是赋范空间而 M 是它的某一子空间. 考虑商空间 $P=R/M$,由本章 §1 第 4 段中所谈到的内容知道,P 是一线性空间. 在空间 P 中这样来定义范数:对每一剩余类 ξ,令

$$\|\xi\| = \inf_{x\in\xi}\|x\|, \tag{6}$$

我们来证明,第 1 段中所叙述的赋范空间的公理这时都满足. 显然,$\|\xi\|\geqslant 0$ 恒成立. 如果 ξ_0 是商空间 P 的零元素(即 ξ_0 与子空间 M 重合),则可以取空间 R 的零作为 $x\in\xi_0$. 于是得到 $\|\xi_0\|=0$. 反之,如果 $\|\xi\|=0$,则由范数(6)的定义推出存在类 ξ 中收敛于零的序列. 但因为 M 是闭的,所以每一个剩余类也是闭的,故 $0\in\xi$. 于是 $\xi=M$,即 ξ 是 P 中的零元素. 因此,$\|\xi\|\geqslant 0$,且 $\|\xi\|=0$ 仅当 ξ 是空间 P 的零元素.

其次,对每一 $x\in R$ 及任一 α 有

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\|.$$

在这个等式的两端中,按 $x\in\xi$ 取下确界,得

$$\|\alpha\xi\| = |\alpha|\cdot\|\xi\|.$$

① 根据魏斯特拉斯(Weierstrass)定理所说的,在闭区间上的任一连续函数是多项式序列一致收敛的极限,在 $C[a,b]$ 中的多项式子空间的闭包是全空间 $C[a,b]$.

最后,设$\xi,\eta \in P$且$x \in \xi, y \in \eta$. 则

$$\|\xi+\eta\| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

对此不等式右端,按所有的$x \in \xi, y \in \eta$取下确界,得

$$\|\xi+\eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\|.$$

于是,赋范空间的一切公理对P成立. 现在我们证明,如R完备,则$P=R/M$也完备. 事实上,对于每一$\xi \in R/M$,按照(6)可以找到元素$x \in \xi$,使得

$$\|\xi\| \geqslant \frac{1}{2}\|x\|.$$

设$\{\xi_n\}$是P中的基本序列. 如果需要的话,我们就转到子序列. 于是可以假定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_{n+1}-\xi_n\|$$

收敛. 将ξ_0(空间P的零元素)添加到$\{\xi_n\}$,选取$x_n \in \xi_{n+1}-\xi_n (n=0,1,2,\cdots)$使得

$$\|\xi_{n+1}-\xi_n\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_n\|.$$

因此级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|x_n\|$收敛. 这就意味着,根据空间$R$的完备性,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$也就收敛. 令$x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$并记包含$x$的类为$\xi$,得$\left(因为对每一n, \sum\limits_{k=0}^{n}x_k \in \xi_n\right)$

$$\|\xi-\xi_n\| \leqslant \left\|x-\sum_{k=0}^{n}x_k\right\| \to 0 \quad 当 n\to\infty 时,$$

即$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$. 于是:

巴拿赫空间关于其任何(闭)子空间的商空间是巴拿赫空间.

习题 1　设R是巴拿赫空间,$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$是$R$中的闭球套序列. 证明它具有非空的交(不假定这些球的半径趋于0,与第二章§3第2段的习题3比较). 举一个有空交的某一B空间中的非空有界闭凸集套序列的例子.

习题 2　设R是无限维B空间,则它的代数维数(参见§1第3段的习题3)是不可数的.

习题 3　设R是线性赋范空间. 证明下列命题的正确性:

1) 任一有限维线性流形在R中是闭的.

2) 如果M是R中的子空间,而N是R中的有限维子空间,则它们的和

$$M+N=\{x: x=y+z, y\in M, z\in N\}$$

是闭的. 举出l_2中两个(闭)线性子空间的和非闭的例子.

3) 设Q是R中的开凸集,又设$x_0 \notin Q$,则存在通过点x_0与Q不相交的超平面.

习题 4　线性空间R中的两个范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$叫做等价的,乃指存在常数$a,b>0$,使

得对于所有的 $x \in R, a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b\|x\|_1$. 证明:如果空间 R 是有限维的,则在 R 中任何两个范数等价.

§4. 欧几里得空间

1. 欧几里得空间的定义 在线性空间中引入范数熟知的方法之一就是在其中给出内积. 我们记得,在实线性空间 R 中,对于每一对元素 $x, y \in R$ 定义的实函数 (x,y),如果它满足以下条件:

1) $(x,y)=(y,x)$,

2) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$,

3) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$,

4) $(x,x)\geqslant 0$,并且 $(x,x)=0$ 仅当 $x=0$,

则称 (x,y) 为 R 中的内积.

在其中具有确定内积的线性空间叫做欧几里得空间. 在欧几里得空间 R 中,借助于公式

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

引进范数. 从内积的性质 1)—4) 推得所有范数公理这时是满足的.

事实上,范数的公理 1) 与 3) (§3 第 1 段) 显然成立. 而公理 2) (三角形不等式) 的成立可从柯西 - 布尼雅可夫斯基不等式

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \tag{1}$$

推出. 现在我们来证明上式.

考虑一个对一切实变量 λ 值非负的二次三项式:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= (\lambda x+y, \lambda x+y) = \lambda^2(x,x)+2\lambda(x,y)+(y,y)\\ &= \|x\|^2\lambda^2+2(x,y)\lambda+\|y\|^2.\end{aligned}$$

因为此式乃是某一向量的纯量平方,所以恒有 $\varphi(\lambda)\geqslant 0$. 从而,这个三项式的判别式小于或等于零.

柯西 - 布尼雅可夫斯基不等式(1)刚好就表示这个二次三项式 $\varphi(\lambda)$ 的判别式的非正性.

我们指出,欧几里得空间中的和,数乘与内积都是连续的,即如果 $x_n \to x, y_n \to y$ (按范数收敛意义), $\lambda_n \to \lambda$ (理解为数列),则

$$x_n + y_n \to x + y,$$

$$\lambda_n x_n \to \lambda x,$$

$$(x_n,y_n)\to(x,y).$$

这些事实的证明主要利用柯西－布尼雅可夫斯基不等式(1),作为习题请读者证明.

在 R 中存在内积,使得在此空间中不仅可引进向量的范数(即向量的长),而且还可引进向量之间的夹角,即用公式

$$\cos\varphi=\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}\tag{2}$$

确定向量 x 与 y 之间的夹角 φ. 这时从柯西－布尼雅可夫斯基不等式(1)推出:位于(2)中右边的表示式按模不超过 1. 从而公式(2)对于任何非零的 x 与 y 的确确定了某一个角 φ, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

如果 $(x,y)=0$,则从(2)得到 $\varphi=\pi/2$. 在这种情况下,向量 x 与 y 叫做正交的.

R 中非零向量系 $\{x_\alpha\}$ 叫做正交的,乃指当 $\alpha\neq\beta$ 时,

$$(x_\alpha,x_\beta)=0.$$

如果向量系 $\{x_\alpha\}$ 正交,则它们线性无关. 事实上,设

$$a_1x_{\alpha_1}+a_2x_{\alpha_2}+\cdots+a_nx_\alpha=0.$$

因为 $\{x_\alpha\}$ 是正交系,所以有

$$(x_{\alpha_i},a_1x_{\alpha_1}+\cdots+a_nx_{\alpha_n})=a_i(x_{\alpha_i},x_{\alpha_i})=0.$$

但 $(x_{\alpha_i},x_{\alpha_i})\neq0$,于是对所有的 $i=1,2,\cdots,n$, $a_i=0$.

如果正交系 $\{x_\alpha\}$ 是完备的(即包含它的最小闭子空间是全空间 R),则它叫做正交基. 这时如果每一元素的范数都等于 1,则系 $\{x_\alpha\}$ 叫做标准正交基. 一般地说,如果系 $\{x_\alpha\}$(完备的或不完备的)使得

$$(x_\alpha,x_\beta)=\begin{cases}0, & \text{当 }\alpha\neq\beta,\\ 1, & \text{当 }\alpha=\beta,\end{cases}$$

则 $\{x_\alpha\}$ 叫做标准正交系. 显然,如果 $\{x_\alpha\}$ 是正交系,则 $\left\{\dfrac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}$ 是标准正交系.

2. 例子　我们考察欧几里得空间以及其中的正交基的一些例子.

例 1　以实数组 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为元素,具有通常的加法与乘法运算及内积

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\tag{3}$$

的 n 维算术空间 $\mathbf{R}^n$ 乃是一个熟知的欧几里得空间的例子. 向量

$$e_1 = (1,0,0,\cdots,0),$$

$$e_2 = (0,1,0,\cdots,0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_n = (0,0,0,\cdots,1)$$

构成上述空间 $\mathbf{R}^n$ 中(无限多个中可能的一个)标准正交基.

例 2 元素为

$$x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),$$

其中 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$,以及内积为

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{4}$$

的空间 l_2 是欧几里得空间. 事实上,从第二章 §1 不等式(4)推出(4)中右端级数的收敛性. 内积性质 1)—4)可直接验证. 向量

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\cdots),\\ e_2 &= (0,1,0,\cdots),\\ e_3 &= (0,0,1,\cdots),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

构成 l_2 中最简单的标准正交基. 这个系的正交性与标准性是明显的. 同时系(5)是完备的:设 $x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 是 l_2 中的任意向量而 $x^{(n)} = (x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots)$. 则 $x^{(n)}$ 是向量 $e_1,\cdots,e_n$ 的线性组合,且当 $n\to\infty$ 时 $\| x^{(n)} - x \| \to 0$.

例 3 在 $[a,b]$ 上由实连续函数组成的,内积为

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

的空间 $C_2[a,b]$ 也是欧几里得空间. 在其中指出的各种各样的正交基中,由函数

$$\frac{1}{2},\cos n\frac{2\pi t}{b-a},\sin n\frac{2\pi t}{b-a} \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{7}$$

组成的三角函数系是最重要的正交基. 该系的正交性可直接验证.

如果在长为 2π 的线段上,比如说在 $[-\pi,\pi]$ 上研究连续函数,则相应的三角函数系为 $1/2,\cos nt,\sin nt(n=1,2,\cdots)$.

系(7)是完备的. 事实上,根据魏斯特拉斯定理,在闭区间 $[a,b]$ 上于点 a 和 b

上取同一值的任一连续函数 φ，可以表为三角函数多项式序列（即系(7)元素的线性组合）一致收敛的极限. 这个序列更按空间 $C_2[a,b]$ 的范数收敛于 φ. 如果 f 是 $C_2[a,b]$ 中的任意函数，则它可以（按空间 $C_2[a,b]$ 的范数）表为函数序列 φ_n 的极限，其中每一 φ_n 在闭区间 $\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$ 上与 f 重合，而在 $[b-1/n,b]$ 上是线性的，且在点 b 与在点 a 取同样的值（图 17）. 从而，对于 $C_2[a,b]$ 中的每一元素，都可以（在这个空间的度量下）用系(7)的元素的线性组合任意逼近，而这就表示系(7)的完备性.

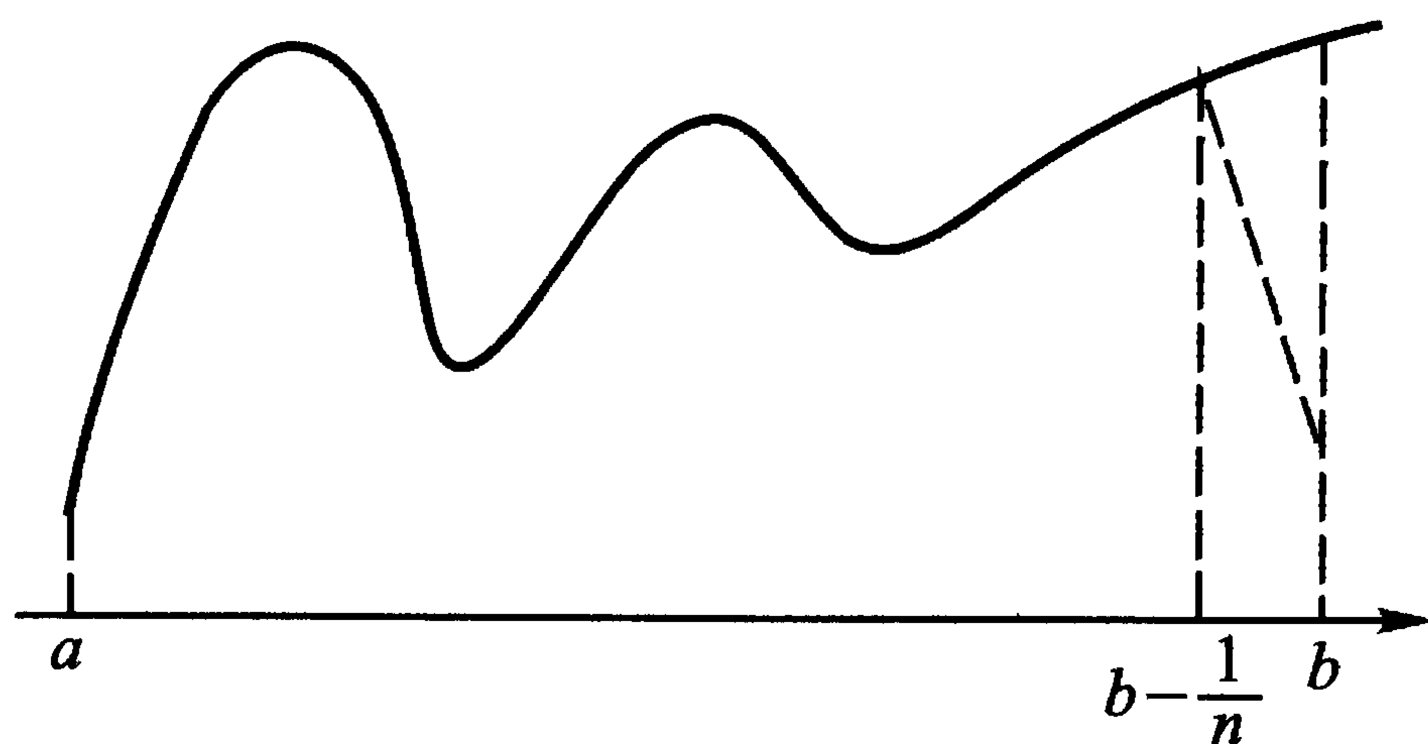


图 17

3. 正交基的存在性，正交化 在这一节剩下的部分，我们仅限于讨论可分的欧几里得空间（即包含可数处处稠密集）. 上一段所举出的每一个空间都是可分的（试证之!），不可分的欧几里得空间的例子可以构造如下. 考虑直线上所有可能的函数 x，对于其中每一个函数，使其异于零的点集 $t_1,t_2,\cdots$ 至多是可数的，而按所有这些点来取的和 $\sum x^2(t)$ 是有限的. 像通常函数的加法和乘法一样，我们定义了这个空间中的加法与数乘运算，而内积由公式

$$(x,y)=\sum x(t)y(t)$$

来定义，其中和是对使得 $x(t)y(t)\neq 0$ 这些点 t 的集来取. 我们请读者证明，这个空间中没有可数处处稠密的子集. 我们指出，这个空间是完备的.

于是，设 R 是可分的欧几里得空间. 我们来证明，在此空间中的任一正交系至多是可数的.

事实上，不失一般性，可以认为所考虑的系 $\{\varphi_\alpha\}$ 不仅是正交的，而且是标准的 $\left(\text{否则，我们可以用系}\left\{\frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right\}\text{代替系}\{\varphi_\alpha\}\right)$. 这时，如果 $\alpha\neq\beta$，则

$$\|\varphi_\alpha-\varphi_\beta\|=\sqrt{2}.$$

考察球 $B(\varphi_\alpha,1/2)$ 的全体. 这些球都不相交. 如果 R 中可数集 $\{\psi_n\}$ 处处稠密，则每一个球中至少有 $\{\psi_n\}$ 中的一个元素. 因而，这些球的个数（亦即元素 φ_α 的个数）至多是可数的.

在上面所举的欧几里得空间每一个例子中，我们分别指出了它们的正交基. 现

在证明下面的一般定理,它类似于 n 维欧几里得空间中关于正交基存在的定理.

定理 1(关于正交化的定理) 设

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots \tag{8}$$

为欧几里得空间 R 中线性无关元素系. 则在 R 中存在元素系

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots \tag{9}$$

它满足以下条件:

1) 系(9)是正交且标准的;

2) 每一元素 φ_n 是元素 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的线性组合:

$$\varphi_n = a_{n1}f_1 + \cdots + a_{nn}f_n,$$

并且 $a_{nn} \neq 0$;

3) 每一元素 f_n 可表为

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \cdots + b_{nn}\varphi_n$$

的形式,并且 $b_{nn} \neq 0$.

系(9)的每一个元素,除相差因数 ± 1 外,由条件 1)—3)唯一确定.

证明 寻求表为 $\varphi_1 = a_{11}f_1$ 这种形式的元素 φ_1. 这时由条件

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2(f_1, f_1) = 1$$

可确定 a_{11}. 由此得到

$$a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}.$$

显然,φ_1 由上式唯一确定(除相差一个符号外). 设满足条件 1)—3)的元素 φ_k($k < n$)已经作出. 则 f_n 可表为

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \cdots + b_{n,n-1}\varphi_{n-1} + h_n$$

的形式,其中当 $k < n$ 时,

$$(h_n, \varphi_k) = 0.$$

事实上,由条件

$$\begin{aligned}(h_n, \varphi_k) &= (f_n - b_{n1}\varphi_1 - \cdots - b_{n,n-1}\varphi_{n-1}, \varphi_k) \\ &= (f_n, \varphi_k) - b_{nk}(\varphi_k, \varphi_k) = 0\end{aligned}$$

唯一确定对应的系数 b_{nk},而这也就意味着唯一确定 h_n.

显然,$(h_n, h_n) > 0$(假定$(h_n, h_n) = 0$,与系(8)线性无关性矛盾). 令

$$\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}.$$

从归纳的构造显然可知，h_n，即 φ_n，可通过 $f_1, \cdots, f_n$ 来表示，也就是说 $\varphi_n = a_{n1}f_1 + \cdots + a_{nn}f_n$，其中

$$a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \neq 0.$$

此外，

$$(\varphi_n, \varphi_n) = 1, \quad (\varphi_n, \varphi_k) = 0 \quad (k < n)$$

及

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \cdots + b_{nn}\varphi_n \quad (b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0).$$

这表明 φ_n 满足定理的条件.

从系(8)变换到满足条件 1)—3)的系(9)，这称为正交化过程.

显然，以系(8)和以系(9)生成的子空间相互重合. 从而，这两个系同时完备或同时不完备.

推论　在可分的欧几里得空间 R 中存在标准正交基.

事实上，设 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, \cdots$ 是 R 中可数处处稠密的集合. 从这个集合中选取线性无关元素 $\{f_n\}$ 的完备系. 为此只要从序列 $\{\psi_n\}$ 中去掉所有可以表为 ψ_i 的线性组合的元素 ψ_k，其中 $i < k$. 因此，把正交化过程应用到所得到的完备线性无关元素系上，我们就构造出标准正交基.

习题 1　举一个(不可分的)欧几里得空间的例子，在其中一个正交基也没有. 证明：在完备的欧几里得空间(不一定可分)中存在标准正交基.

习题 2　证明：在完备的欧几里得空间(不一定可分)中，任一非空凸闭有界集套序列具有非空的交(参见第二章 §3 第 2 段与本章 §3 第 3 段中的习题).

4. 贝塞耳(Bessel)不等式. 封闭正交系　在 n 维欧几里得空间中已选取标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，每一向量 $x \in \mathbf{R}^n$ 都可写成

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \tag{10}$$

的形式，其中

$$c_k = (x, e_k). \tag{11}$$

下面我们来讨论展开式(10)怎样推广到无限维欧几里得空间的情形. 设

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots \tag{12}$$

是欧几里得空间 R 的标准正交系，f 是 R 中任意的元素. 使数列

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \cdots \tag{13}$$

与元素 $f \in R$ 对应，c_k 称为坐标或元素 f 关于系 $\{\varphi_k\}$ 的傅里叶（Fourier）系数，而（暂时还是形式）级数

$$\sum_k c_k \varphi_k \tag{14}$$

称作元素 f 关于系 $\{\varphi_n\}$ 的傅里叶级数.

自然产生一个问题：级数(14)是否收敛，即它的部分和序列是否收敛于（在空间 R 度量的意义下）某一极限，且如果它收敛，则它的和是否与原来的元素 f 相等?

为了回答上述问题，我们首先考虑下面的问题：对于给定的 n，选取系数 $\alpha_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 使得 f 与和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \tag{15}$$

之间的距离最小. 我们来计算这个距离. 因为系(12)是正交的与标准的，所以

$$\begin{aligned}
\| f - S_n \|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) \\
&= (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j \right) \\
&= \| f \|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \\
&= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2.
\end{aligned}$$

显然，这个表示式仅当最后一加项等于 0 时取得最小值，即当

$$\alpha_k = c_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{16}$$

时取得最小值.

在这种情况下

$$\| f - S_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{17}$$

我们证明了形如(15)的所有和当中，对于给定的 n，元素 f 的傅里叶级数的部分和与 f 的偏差最小. 这个结果在几何上可以用下列方式来阐明. 元素

$$f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

与所有形如

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varphi_k$$

的线性组合正交，即与由元素 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 生成的子空间正交，当且仅当条件(16)成立(试证之!). 于是，上面所得到的结果乃是初等几何著名定理的推广：从已知点到直线上或平面上所引的垂线长小于从同一点所引的任一斜线长.

因为恒有 $\|f-S_n\|^2\geqslant 0$，所以从等式(17)推出

$$\sum_{k=1}^{n}c_k^2\leqslant\|f\|^2.$$

这里 n 是任意的，而右端不依赖于 n. 因此，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k^2$ 收敛且

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\leqslant\|f\|^2. \tag{18}$$

这个不等式叫做贝塞耳不等式. 它在几何上表示向量 f 在相互正交的方向上的投影平方和不超过向量 f 本身长的平方.

我们引进以下重要的概念.

定义 1　标准正交系(12)叫做封闭的，乃指对任何 $f\in R$ 等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2 \tag{19}$$

均成立，上式称为帕塞瓦尔(Parseval)等式.

从恒等式(17)推出，系(12)的封闭性等价于如下论断：对于每一个 $f\in R$，傅里叶级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n$ 的部分和收敛于 f.

标准正交系的封闭性概念与上面引进完备系的概念有着密切的联系.

定理 2　在可分的欧几里得空间 R 中，任一完备标准正交系是封闭的，反之也成立.

证明　设系 $\{\varphi_n\}$ 是封闭的，则对于任一元素 $f\in R$，它的傅里叶级数的部分和序列收敛于 f. 这意味着元素系 $\{\varphi_n\}$ 的线性组合在 R 中处处稠密，即系 $\{\varphi_n\}$ 完备. 反之，设系 $\{\varphi_n\}$ 完备，即任何元素 $f\in R$ 都可用元素系 $\{\varphi_n\}$ 的线性组合 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_k$ 任意逼近；对于 f 的傅里叶级数的部分和 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\varphi_k$ 给出同样准确的逼近. 从而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k$ 收敛于 f，且帕塞瓦尔等式成立.

在上一段我们证明了可分的欧几里得空间中存在完备的标准正交系. 因为对 R 中的标准正交系来说，封闭的概念与完备的概念一致，所以不需要重新证明 R 中封闭正交系的存在性. 而在上一节引进的完备标准正交系的例子同时也是封闭系的

例子.

上面我们总假定所考虑的正交系是标准的. 对于任何正交系也可以重新叙述傅里叶系数、傅里叶级数等概念. 设$\{\varphi_n\}$是任意的正交系. 关于它可以构造由元素$\psi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$组成的标准系. 对于任何$f \in R$,有

$$c_n = (f,\psi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|}(f,\varphi_n)$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\|\varphi_n\|}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n,$$

其中

$$a_n = \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}. \tag{20}$$

由公式(20)定义的系数a_n,我们称为元素f关于正交(非标准)系$\{\varphi_n\}$的傅里叶系数. 把(20)中c_n的表示式$c_n = a_n\|\varphi_n\|$代替不等式(18)中的c_n,我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 a_n^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{21}$$

它是任意正交系的贝塞耳不等式.

5. 完备的欧几里得空间. 里斯-费希尔(Riesz-Fisher)定理 从第3段开始,我们研究了可分的欧几里得空间;并且,从现在起,我们将假定所研究的空间是完备的.

于是,设R是完备可分的欧几里得空间,$\{\varphi_n\}$是R中某一标准正交系(不一定完备). 从贝塞耳不等式推出,欲使数$c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$成为任何元素$f \in R$的傅里叶系数,使级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

收敛是必要的,实际上在完备空间中. 上述条件不仅是必要的,而且也是充分的. 这就是说下面的定理成立.

定理 3 (里斯-费希尔) 设$\{\varphi_n\}$是完备欧几里得空间R中任意的标准正交系,并设数

$$c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$$

使得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{22}$$

收敛. 则存在元素 $f \in R$,使得

$$c_k = (f, \varphi_k)$$

及

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \| f \|^2.$$

证明　令

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k.$$

则

$$\| f_{n+p} - f_n \|^2 = \| c_{n+1}\varphi_{n+1} + \cdots + c_{n+p}\varphi_{n+p} \|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

因为级数(22)收敛,所以根据 R 的完备性,由此推出序列 $\{f_n\}$ 收敛于某一元素 $f \in R$. 其次

$$(f, \varphi_i) = (f_n, \varphi_i) + (f - f_n, \varphi_i). \tag{23}$$

并且当 $n \geqslant i$ 时,上式右端第一项等于 c_i;而第二项当 $n \to \infty$ 时趋于零. 这是由于

$$|(f - f_n, \varphi_i)| \leqslant \| f - f_n \| \cdot \| \varphi_i \|.$$

等式(23)的左端与 n 无关. 因此,在(23)式两端当 $n \to \infty$ 时取极限,得到

$$(f, \varphi_i) = c_i.$$

根据 f 的定义,当 $n \to \infty$ 时

$$\| f - f_n \| \to 0.$$

因此,当 $n \to \infty$ 时,

$$\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\right) = (f, f) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \to 0.$$

由此得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f).$$

最后,我们给出以下有用的定理.

定理 4　完备可分的欧几里得空间 R 中的标准正交系 $\{\varphi_n\}$ 是完备的,当且仅当

R 中不存在与系 $\{\varphi_n\}$ 的所有元素正交的非零元素.

证明 设系 $\{\varphi_n\}$ 是完备的,从而 $\{\varphi_n\}$ 是封闭的. 如果 f 与系 $\{\varphi_n\}$ 的所有元素正交,则 f 的所有傅里叶系数都等于零. 则从帕塞瓦尔等式得到

$$(f,f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = 0,$$

即 $f=0$.

反之,设系 $\{\varphi_n\}$ 不是完备的. 则在 R 中存在元素 $g\neq 0$,使得

$$(g,g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \quad (\text{其中 } c_k = (g,\varphi_k)).$$

根据里斯 - 费希尔定理,存在元素 $f\in R$,使得

$$(f,\varphi_k) = c_k \quad \text{与} \quad (f,f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

由于元素 $f-g$ 与所有 φ_i 正交,因此从不等式

$$(f,f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g,g)$$

推出 $f-g\neq 0$.

习题 1 设 H 是完备欧几里得空间(不一定可分),则在 H 中存在完备标准正交系 $\{\varphi_\alpha\}$ (参阅第 3 段中的习题 1). 证明:对任一向量 $f\in H$,以下两式

$$f = \sum_\alpha (f,\varphi_\alpha)\varphi_\alpha, \qquad \|f\|^2 = \sum_\alpha (f,\varphi_\alpha)^2$$

成立,其中位于右端的和具有至多可数个异于 0 的加项.

习题 2 欧几里得空间 R 的向量系 $\{\varphi_\alpha\}$ 叫做完全的,乃指在 R 中不存在与所有 φ_α 正交的、异于 0 的向量. 定理 4 表明,在完备欧几里得空间中向量系的完全性等价于它的完备性. 试证明,在非完备空间中可以存在完全但非完备的系.

6. 希尔伯特空间. 同构定理 我们继续讨论完备的欧几里得空间. 迄今为止,我们感兴趣的是无限维空间,而不是线性代数教程中给出详尽描述的有限维空间. 通常我们仍假定在所考虑的空间中存在可数处处稠密的集合. 下面给出一个定义.

定义 2 无限维完备的欧几里得空间叫做希尔伯特空间①.

于是,满足以下条件(公理)的任意性质的元素 $f,g,\cdots$ 的全体 H 叫做希尔伯特空间:

Ⅰ. H 是欧几里得空间(即在其中具有给定内积的线性空间).

Ⅱ. 空间 H 在度量 $\rho(f,g) = \|f-g\|$ 的意义下是完备的.

① 以引进这个概念的著名德国数学家希尔伯特(1862—1943)而命名.

Ⅲ. 空间 H 是无限维的,即在 H 中对于任何 n 皆可找到 n 个线性无关的元素.

通常我们研究的是可分的希尔伯特空间,即还满足下一公理的空间.

Ⅳ. H 是可分的,即在 H 中存在可数处处稠密集.

实空间 l_2 可以作为可分的希尔伯特空间的例子.

在下面我们只研究可分的情形.

类似于§1 中的定义 2,两个欧几里得空间 R 与 R^* 叫做同构的,乃指它们的元素间可以建立一一对应,使得当

$$x \leftrightarrow x^*, y \leftrightarrow y^*$$

$$(x, y \in R; x^*, y^* \in R^*)$$

时,有

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*,$$

$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

及

$$(x, y) = (x^*, y^*).$$

换言之,欧几里得空间的同构是这样的一一对应,它既保持这两个空间中定义的线性运算,又保持内积.

如所周知,任何两个 n 维欧几里得空间彼此同构,从而,每一这样的空间同构于算术空间 $\mathbf{R}^n$(第 2 段例 1). 无限维欧几里得空间不一定彼此同构. 例如,空间 l_2 与 $C_2[a,b]$ 彼此不同构. 因为空间 l_2 是完备的,而空间 $C_2[a,b]$ 却不完备.

然而以下事实成立.

定理 5 任何两个可分的希尔伯特空间彼此同构.

证明 我们来证明,每一希尔伯特空间 H 与空间 l_2 同构,从而证明定理的断言. 我们在 H 中选取任意的完备标准正交系 $\{\varphi_n\}$,且使元素 $f \in H$ 关于这个系的傅里叶系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 的全体与 f 对应. 因为 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$,所以序列 $(c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots)$ 是 l_2 中某一元素. 反之,根据里斯 - 费希尔定理,具有数 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 为其傅里叶系数的某一元素 $f \in H$ 与 l_2 中的每一元素 $(c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots)$ 对应. 因此,从 H 到 l_2 中元素之间建立的对应是一一的. 其次,如果

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots)$$

及

$$g \leftrightarrow (d_1, d_2, \cdots, d_n, \cdots),$$

则

$$f+g\leftrightarrow(c_1+d_1,c_2+d_2,\cdots,c_n+d_n,\cdots)$$

及

$$\alpha f\leftrightarrow(\alpha c_1,\alpha c_2,\cdots,\alpha c_n,\cdots),$$

即和变为对应元素之和,而数乘变为该同一数乘以对应元素的乘积. 最后,从帕塞瓦尔等式推出

$$(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nd_n. \tag{24}$$

事实上,从

$$(f,f)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2,(g,g)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2$$

与

$$\begin{aligned}(f+g,f+g)&=(f,f)+2(f,g)+(g,g)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n+d_n)^2\\&=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty}c_nd_n+\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2\end{aligned}$$

推出(24). 因此,上面建立的空间 H 与 l_2 元素之间的对应关系实际上是同构的.

定理5表明,精确到同构,仅仅存在一个(可分的)希尔伯特空间(即公理系统Ⅰ—Ⅳ是完备的),并且空间 l_2 可以看作它的“坐标实现”,这正像具有内积 $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ 的 n 维算术空间是用公理给定的 n 维欧几里得空间的坐标实现.

取泛函空间 $C_2[a,b]$ 并考虑其完备化便可得到希尔伯特空间的另一实现. 事实上,不难验证,任一欧几里得空间 R 的完备化 R^* (在第二章§3中我们定义度量空间完备化的意义下)成为线性欧几里得空间,这只要在 R 中定义线性运算与内积,并且按空间 R 的连续性延拓线性运算与内积,即令

$$x+y=\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n),\qquad \alpha x=\lim_{n\to\infty}\alpha x_n$$

与

$$(x,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n),$$

其中 $x_n\to y,y_n\to y,x_n,y_n\in R$(容易证明上述极限都存在且它们都不依赖于序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的选择). 于是空间 $C_2[a,b]$ 的完备化是完备的欧几里得空间,显然它是无限维的,也是可分的,即它是希尔伯特空间. 第七章中我们将回到这个问题并指

明,为了得到完备空间,应该添加到 $C_2[a,b]$ 中的那样的元素也可以看作函数,但只是不连续了(也就是说,在勒贝格意义下的平方可和函数).

7. 子空间. 正交补. 直和　根据 §3 的一般定义,我们称希尔伯特空间 H 中这样的元素组成的集合 L 为 H 中的线性流形,系指如果 $f,g \in L$,则对于任何数 α 与 β, $\alpha f + \beta g \in L$. 闭的线性流形叫做 H 的子空间. 我们给出希尔伯特空间的子空间的一些例子.

例 1　设 h 是 H 中的任意元素. 与 h 正交的所有元素 $f \in H$ 的全体构成 H 的子空间.

例 2　设 H 的实现为 l_2,即 l_2 的元素是使得 $\sum_k x_k^2 < \infty$ 的数列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$. 满足条件 $x_1 = x_2$ 的元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 构成 H 的子空间.

例 3　设 H 的实现仍为空间 l_2. 使得当 $n = 2,4,6,\cdots$ 时 $x_n = 0$(且当 $n = 1,3,5,\cdots$ 时 x_n 任意)的元素 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 构成子空间.

请读者验证,在例 1—例 3 中,向量的集合的确是子空间.

任一希尔伯特空间的子空间,或者是有限维的欧几里得空间,或者本身就是希尔伯特空间. 事实上,对于每一个这样的子空间,公理 Ⅰ—Ⅲ 的正确性是显然的,而公理Ⅳ的正确性可由以下引理推得.

引理　可分度量空间 R 的任何子集 R' 本身是可分的.

证明　设

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$$

是 R 中可数处处稠密集,而

$$a_n = \inf_{\eta \in R'} \rho(\xi_n, \eta).$$

对于任何自然数 n 与 m,可以找到这样的点 $\eta_{n,m} \in R'$,使得

$$\rho(\xi_n, \eta_{n,m}) < a_n + 1/m.$$

设 $\varepsilon > 0$ 且 $1/m < \varepsilon/3$. 对于任何 $\eta \in R'$,可以找到这样的 n,使得 $\rho(\xi_n, \eta) < \varepsilon/3$. 从而

$$\rho(\xi_n, \eta_{n,m}) < a_n + 1/m < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = 2\varepsilon/3.$$

所以 $\rho(\eta, \eta_{n,m}) < \varepsilon$,即至多可数集 $\{\eta_{n,m}\}$ 在 R' 中处处稠密.

希尔伯特空间的子空间具有某些特殊的性质(对任意赋范空间的子空间却不成立). 这些性质与希尔伯特空间中存在内积和以它为基础的正交性概念有关.

对希尔伯特空间的任意子空间的元素的任何可数处处稠密序列应用正交化过程,我们便得到以下定理.

定理 6　空间 H 中的每一子空间 M 都包含标准正交系 $\{\varphi_n\}$,它的线性闭包与 M 重合.

设 M 为希尔伯特空间 H 的子空间. 用

$$M^{\perp} = H \ominus M$$

表示与所有元素 $f \in M$ 正交的元素 $g \in H$ 的集合,并且我们来证明 $M^{\perp}$ 也是空间 H 的子空间. $M^{\perp}$ 的线性性质是显然的,因为从 $(g_1, f) = (g_2, f) = 0$ 推出 $(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f) = 0$. 为了证明封闭性,假设 $g_n \in M^{\perp}$ 且收敛于 g. 则对于任何 $f \in M$

$$(g, f) = \lim_{n \to \infty} (g_n, f) = 0,$$

所以 g 也属于 $M^{\perp}$.

子空间 $M^{\perp}$ 叫做子空间 M 的正交补.

从定理 6 容易得到下面的定理.

定理 7 如果 M 是空间 H 的(闭的!)线性子空间,则任何元素 $f \in H$ 可唯一地表为 $f = h + h'$ 的形式,其中 $h \in M$ 及 $h' \in M^{\perp}$.

证明 现在我们来证明这种表示式的存在性. 为此在 M 中寻求完备标准正交系 $\{\varphi_n\}$,并令

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad c_n = (f, \varphi_n).$$

因为(按照贝塞耳不等式)级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_k^2$ 收敛,所以元素 h 存在且属于 M. 令

$$h' = f - h.$$

显然,对于所有的 n, $(h', \varphi_n) = 0$. 又因为 M 中任意的元素 ζ 可表为

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$$

的形式,所以有

$$(h', \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (h', \varphi_n) = 0,$$

即 $h' \in M^{\perp}$.

现在假设,除了上面构造的分解式 $f = h + h'$ 外,还存在另一个分解式:

$$f = h_1 + h'_1, \quad h_1 \in M, h'_1 \in M^{\perp}.$$

则对所有的 n

$$(h_1, \varphi_n) = (f, \varphi_n) = c_n,$$

由此得到

$$h_1 = h, \quad h'_1 = h'.$$

由定理 7 推出几个有用的推论.

推论 1 线性子空间 M 的正交补之正交补与 M 本身重合.

因此,我们可以谈论空间 H 的互补的子空间. 如果 M 与 $M^{\perp}$ 是互补的两个子空间,而$\{\varphi_n\}$,$\{\varphi'_n\}$是(分别在 M 与 $M^{\perp}$ 中)完备的正交系,则系$\{\varphi_n\}$与$\{\varphi'_n\}$的并给出全空间 H 中完备正交系. 因此下面的推论成立:

推论 2 任一标准正交系可以扩张为 H 中的完备系.

如果系$\{\varphi_n\}$有限,则属于它的元素的个数等于由$\{\varphi_n\}$生成的子空间 M 的维数,也与子空间 $M^{\perp}$ 的余维数相同. 于是,又得到一个推论.

推论 3 对于有限维数 n 的空间来说,它的正交补具有余维数 n,反之亦然.

如果每一向量$f \in H$可表为$f=h+h'$的形式,其中 $h \in M, h' \in M^{\perp}$($M^{\perp}$是 M 的正交补),则称 H 是彼此正交的子空间 M 与 $M^{\perp}$ 的直和,并记作

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

显然,直和的概念可直接推广到任意有限个或甚至可数个的子空间上. 也就是说,H 是其子空间 $M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$的直和:

$$H = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus \cdots,$$

乃是指

1) 子空间 M_i 两两正交,即当 $i \neq k$ 时,M_i 中任一向量与 M_k 中任一向量正交.

2) 每一元素$f \in H$可表为

$$f = h_1 + h_2 + \cdots + h_n + \cdots, \quad h_n \in M_n$$

的形式,并且如果子空间 M_n 的个数无限,则 $\sum\limits_n \|h_n\|^2$ 是收敛级数. 不难验证,如果元素f的这种表示式存在,则它是唯一的且

$$\|f\|^2 = \sum_n \|h_n\|^2.$$

与子空间的直和一样,我们可以谈论有限个或可数个任意希尔伯特空间的直和. 这就是说,如果 H_1 与 H_2 是两个希尔伯特空间,则它们的直和用下面的方式来定义;空间 H 的元素是这样所有可能的对(h_1, h_2),其中 $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$,而这样的两个对的内积等于:

$$((h_1, h_2), (h'_1, h'_2)) = (h_1, h'_1) + (h_2, h'_2).$$

在空间 H 中显然包含分别由形如$(h_1, 0)$与$(0, h_2)$的对组成的、彼此正交的子空间,其中第一个子空间可用自然方式与空间 H_1 等同起来,而第二个子空间与空间 H_2 等同.

类似地定义任意有限个空间的和. 可数个空间 $H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots$ 的和 $H = \sum \oplus H_n$ 这样定义:空间 H 的元素是使得 $\sum_n \|h_n\|^2 < \infty$ 的所有形如

$$h = (h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots) \quad (h_n \in H_n)$$

的序列. H 中元素 f 与 g 的内积 (h,g) 等于

$$\sum_n (h_n, g_n).$$

8. 欧几里得空间的特性 我们研究以下问题. 设 R 是赋范空间. R 中定义的范数应当满足怎样的补充条件,使得 R 成为欧几里得空间(即使得 R 中的范数用某一内积来定义)? 换言之,在所有赋范空间类中,怎样描述欧几里得空间的特征? 以下定理给出了这个特征.

定理 8 赋范空间 R 是欧几里得空间的充要条件为对于任何两个元素 f 与 g,满足等式

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2). \tag{25}$$

因为 $f+g$ 与 $f-g$ 是以 f 与 g 为边所构成的平行四边形的对角线,所以等式(25)表示欧几里得空间中平行四边形熟知的性质:平行四边形对角线的平方和等于其各边的平方和. 因此,必要性是显然的. 我们来证明它的充分性. 令

$$(f,g) = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2). \tag{26}$$

并且证明,如果等式(25)成立,则函数(26)满足内积的所有公理. 因为当 $f=g$ 时,有

$$(f,f) = \frac{1}{4}(\|2f\|^2 - \|f-f\|^2) = \|f\|^2, \tag{27}$$

这就是在空间 R 中生成范数的内积.

首先,从(26)立即看出,

$$(f,g) = (g,f),$$

即内积的性质 1)成立. 此外,由于(27),性质 4)也成立. 为了证明性质 2),我们考虑三个向量的函数

$$\Phi(f,g,h) = 4[(f+g,h) - (f,h) - (g,h)],$$

即

$$\Phi(f,g,h) = \|f+g+h\|^2 - \|f+g-h\|^2 - \|f+h\|^2 + \|f-h\|^2 - \|g+h\|^2 + \|g-h\|^2, \tag{28}$$

并证明它恒等于零. 由于(25),有

$$\|f+g\pm h\|^2 = 2\|f\pm h\|^2 + 2\|g\|^2 - \|f\pm h-g\|^2.$$

将它代入(28)的相应表达式中,得

$$\Phi(f,g,h) = -\|f+h-g\|^2 + \|f-h-g\|^2 + \|f+h\|^2 - \|f-h\|^2 - \|g+h\|^2 + \|g-h\|^2. \tag{29}$$

取(28)与(29)和的一半,有

$$\Phi(f,g,h) = \frac{1}{2}(\|g+h+f\|^2 + \|g+h-f\|^2) - \frac{1}{2}(\|g-h+f\|^2 + \|g-h-f\|^2) - \|g+h\|^2 + \|g-h\|^2.$$

根据(25),第一加项等于

$$\|g+h\|^2 + \|f\|^2,$$

第二加项等于

$$-\|g-h\|^2 - \|f\|^2.$$

于是,

$$\Phi(f,g,h) \equiv 0.$$

最后,我们证明性质3),即内积的齐次性. 为此对任意固定的f与g,考虑函数

$$\varphi(c) = (cf,g) - c(f,g).$$

从(26)立即推得

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}(\|g\|^2 - \|g\|^2) = 0$$

及$\varphi(-1)=0$,后一式是因为$(-f,g)=-(f,g)$. 因此,对任何整数n,

$$(nf,g) = (\operatorname{sgn} n(f+\cdots+f),g) = \operatorname{sgn} n[(f,g)+\cdots+(f,g)] = |n|\operatorname{sgn} n(f,g) = n(f,g),$$

即$\varphi(n)=0$. 对于整数p,q且$q\neq 0$

$$\left(\frac{p}{q}f,g\right) = p\left(\frac{1}{q}f,g\right) = \frac{p}{q}q\left(\frac{1}{q}f,g\right) = \frac{p}{q}(f,g),$$

即对于所有有理数c,$\varphi(c)=0$. 因为函数φ连续,所以

$$\varphi(c) \equiv 0.$$

于是我们证明了函数(f,g)具有内积的一切性质.

例 1 考察 n 维空间 $\mathbf{R}_p^n$,它的范数由公式

$$\| x \|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

定义. 当 $p \geqslant 1$ 时,所有范数公理都满足,但仅当 $p=2$ 时 $\mathbf{R}_p^n$ 是欧几里得空间. 事实上,考虑 $\mathbf{R}_p^n$ 中的两个向量:

$$f = (1,1,0,0,\cdots,0),$$

$$g = (1,-1,0,0,\cdots,0).$$

我们有

$$f+g = (2,0,0,\cdots,0),$$

$$f-g = (0,2,0,\cdots,0).$$

从而

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f+g\|_p = \|f-g\|_p = 2.$$

因此,当 $p \neq 2$ 时,平行四边形恒等式(25)不成立.

例 2 考察闭区间$[0,\pi/2]$上的连续函数空间. 令

$$f(t) = \cos t, \quad g(t) = \sin t.$$

我们有

$$\|f\| = \|g\| = 1$$

及

$$\|f+g\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi/2} |\cos t + \sin t| = \sqrt{2},$$

$$\|f-g\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi/2} |\cos t - \sin t| = 1.$$

由此可见,

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \neq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

因此,空间 $C[0,\pi/2]$不能借助于任何内积给出其范数. 不难看出,在任何闭区间$[a,b]$上的连续函数空间 $C[a,b]$也不是欧几里得空间.

9. 复欧几里得空间

和实欧几里得空间一样,也可以引进复欧几里得空间(即在其中具有内积的复线性空间). 但在这节开始叙述的公理 1)—4),在复空间中不能同时成立. 事实上,

从 1) 与 3) 推出

$$(\lambda x,\lambda x) = \lambda^2(x,x).$$

由此当 $\lambda = i$ 时有

$$(ix,ix) = -(x,x),$$

即向量 x 与 ix 的纯量平方不能同时为正. 换言之,公理 1) 与 3) 和公理 4) 不相容. 因此,在复情形借以定义内积的各个公理,与实情形相比,应做某些修改. 我们定义复空间中的内积为满足以下条件的两个向量(复值)的数值函数:

1) $(x,y) = \overline{(y,x)}$,

2) $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$,

3) $(x_1 + x_2,y) = (x_1,y) + (x_2,y)$,

4) $(x,x) \geqslant 0$,并且当 $x \neq 0$ 时,$(x,x) > 0$.

(由此可见,我们在第一个公理中作了修改,其余三个公理没有修改.) 由公理 1) 与 2) 推出 $(x,\lambda y) = \bar{\lambda}(x,y)$. 事实上

$$(x,\lambda y) = \overline{(\lambda y,x)} = \overline{\lambda(y,x)} = \bar{\lambda}(x,y).$$

线性空间 $\mathbf{C}^n$ 是大家熟知的 n 维复欧几里得空间的例子(§1 例 2),在 $\mathbf{C}^n$ 中元素

$$x = (x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad 与 \quad y = (y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

的内积由公式

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k\bar{y}_k$$

定义.

大家知道,任一 n 维复欧几里得空间与 $\mathbf{C}^n$ 同构.

可以看作无限维复欧几里得空间的例:

1) 复空间 l_2,它的元素是满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

的复数序列

$$x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),$$

而内积由公式

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\bar{y}_n$$

定义.

2）在闭区间$[a,b]$上具有内积

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

的复连续函数空间 $C_2[a,b]$.

在复欧几里得空间中向量长(范数)像实空间情形一样,由公式

$$\| x \| = \sqrt{(x,x)}$$

定义.

在复情形通常不引进向量之间夹角的概念$\left(\text{因为量}\dfrac{(x,y)}{\| x \| \cdot \| y \|}\text{一般说来是}\right.$复的,它可能不是任何实角的余弦$\Big)$,但保持正交的概念:元素 x 与 y 叫做彼此正交的,乃指$(x,y)=0$.

如果$\{\varphi_n\}$是复欧几里得空间 R 中的任一正交系,而f是 R 中的任意元素,那么,像实空间情形那样,数

$$a_n = \frac{1}{\| \varphi_n \|^2}(f,\varphi_n)$$

叫做傅里叶系数,而级数

$$\sum_n a_n\varphi_n$$

叫做元素f关于正交系$\{\varphi_n\}$的傅里叶级数. 贝塞耳不等式

$$\sum_n \| \varphi_n \|^2 \,|\, a_n \,|^2 \leqslant (f,f)$$

成立. 特别,如果系$\{\varphi_n\}$是正交与标准的,则关于这个系的傅里叶级数由公式

$$c_n = (f,\varphi_n)$$

定义,而贝塞耳不等式具有

$$\sum_n |\, c_n \,|^2 \leqslant (f,f)$$

的形式. 无限维完备复欧几里得空间叫做复希尔伯特空间. 关于希尔伯特空间同构的定理可以搬到复的情形:

定理 9 所有可分复希尔伯特空间彼此同构.

复空间 l_2 是复希尔伯特空间最简单的实现. 另一个复希尔伯特空间的泛函实现将在第七章中介绍.

请读者证明,上面对于实欧几里得空间,特别对于希尔伯特空间证明过的所有

定理,对于复空间也成立(考虑到内积复性需对定理的文字稍加修改).

§5. 线性拓扑空间

1. 定义与例子　在线性空间中给定范数只是引进拓扑的所有可能方法之一.泛函分析这方面的发展,像广义函数论(将在下一章讨论),表明在很多情形下不利用范数,而利用任何其他方法给出拓扑来研究线性空间是有益的.

定义 1　集 E 叫做拓扑空间,乃指

Ⅰ. E 是线性空间(具有元素乘以实数或复数的乘法).

Ⅱ. E 是拓扑空间.

Ⅲ. E 中的加法与数乘法运算关于给定在 E 中的拓扑是连续的. 更详细地说这一条件相当于以下的条件:

1) 如果 $z_0 = x_0 + y_0$,则对于点 z_0 的任一邻域 U,可以分别求出点 x_0 与 y_0 的邻域 V 与 W,使得当 $x \in V, y \in W$ 时,$x + y \in U$;

2) 如果 $\alpha_0 x_0 = y_0$,则对于点 y_0 的任何邻域 U,存在点 x_0 的邻域 V 及数 $\varepsilon > 0$,使得当 $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ 及 $x \in V$ 时,$\alpha x \in U$.

从线性拓扑空间中代数运算与拓扑之间存在的联系推知,这种空间的拓扑完全可以用给定零邻域系的方法定义. 事实上,设 x 是线性拓扑空间 E 的点,U 是 E 中的某一零邻域. 则 $U + x$(这个邻域在 x 上的"位移")是点 x 的邻域. 显然,任意点 $x \in E$ 的任何邻域都可用这样的方法得到.

从线性拓扑空间 E 中加法与数乘法的连续性直接推得以下论断.

1) 如果 U, V 是 E 中开集,则集 $U + V$(即形如 $x + y, x \in U, y \in V$ 的所有元素的全体)也是开的.

2) 如果 U 是开的,则对于任何 $\lambda \neq 0$,集 λU(即所有形如 $\lambda x, x \in U$ 元素的全体)也是开的.

3) 如果 F 是 E 中闭集,则 λF 对于任何 λ 也是闭的.

例 1　首先,所有赋范空间属于线性拓扑空间之列. 事实上,从范数的性质立即推得,赋范空间中向量的加法与数乘向量的乘法运算在由范数定义的拓扑中是连续的.

例 2　在所有可能数列 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 的空间 $\mathbf{R}^\infty$ 中,如此给出确定零邻域系:每一个邻域 $U(k_1, \cdots, k_r; \varepsilon)$ 用整数 $k_1, \cdots, k_r$ 与数 $\varepsilon > 0$ 确定并由满足条件

$$|x_{k_i}| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

的一切 $x \in \mathbf{R}^\infty$ 组成. 不难验证,给出这样的邻域系变 $\mathbf{R}^\infty$ 为线性拓扑空间. (与 $\mathbf{R}^\infty$ 一样,可以讨论所有复序列的空间 $\mathbf{C}^\infty$.)

例 3 设$K[a,b]$是闭区间$[a,b]$上无穷次可微[①]函数的空间. 我们利用以下零邻域系来定义$K[a,b]$中的拓扑:每一个邻域$U_{m,\varepsilon}$用下标m与数$\varepsilon>0$确定并由所有满足不等式

$$|\varphi^{(k)}(x)|<\varepsilon,\quad k=0,1,2,\cdots,m$$

的函数φ组成,其中$\varphi^{(k)}$是函数φ的k阶导数.

在线性拓扑空间中的拓扑与在其中定义的线性运算有关这一事实,把相当强的限制加在空间的拓扑上. 即,在线性拓扑空间E中,点x与不包含它的闭集具有不相交的邻域.

在证明这个命题时,考虑点$x=0$及不包含它的任何闭集F就够了. 令$U=E\setminus F$. 根据E中减法运算的连续性,存在使得$W-W\subset U$的零邻域W. 可以取这样的零邻域W_1与W_2的交作为W,使当$x\in W_1$及$y\in W_2$时,$x-y\in U$. 我们来验证,邻域W的闭包含于U中. 设$y\in[W]$,则点y的每一个邻域,特别是$y+W$,包含W中任意一点z. 从而$z-y\in W$,即$y\in W-W\subset U$,所以W的闭包含于U中. 这时W和$E\setminus[W]$分别是所求的点0与集F的邻域.

拓扑空间叫做T_1空间,乃指它满足分离性公理T_1,即指它的任何单点子集是闭的. 显然,线性拓扑空间是T_1空间,当且仅当所有零邻域的交不包含非零元素. 我们在第二章中称满足分离性公理T_1与T_3的拓扑空间为正则的. 从前一段证明可推出,线性拓扑T_1空间是正则的.

有界集的概念在赋范空间中起着重要的作用. 虽然那里借助于范数引入这个概念,但它对于任意的线性拓扑空间,也可以自然地叙述.

在线性拓扑空间E中的集M叫做有界的,乃指对于每一个零邻域U,存在$n>0$,使得对于所有$|\lambda|\geqslant n$,$\lambda U\supset M$.

显然,对于赋范空间,这个有界性概念与按范数有界(即可把给定集置于某一个球$\|x\|\leqslant R$内部)一致. 空间E叫做局部有界的,乃指在E中至少存在一个非空有界开集. 任一赋范空间都是局部有界的. 例2中指出的空间$\mathbf{R}^\infty$,可以作为非局部有界空间的例(试证之!).

习题 1 设E是线性拓扑空间,证明以下命题成立:

(a) 集$M\subset E$是有界的当且仅当对于任何序列$\{x_n\}\subset M$及任何趋于零的正数列$\{\varepsilon_n\}$,序列$\varepsilon_n x_n$趋于零;

(b) 如果$\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset E$且$x_n\to x$,则$\{x_n\}$是有界集;

(c) 如果E局部有界,则在E中第一可数性公理成立.

在空间$\mathbf{R}^\infty$中第一可数性公理是否成立?

习题 2 我们说线性拓扑空间E的集M被零邻域U吸收,乃指存在$\lambda>0$,使得$\lambda U\supset M$. 证明,在局部有界空间中,存在彼此相互吸收的基本零邻域系. 在赋范空间中什么可以选作这样

① 即具有一切阶的导数.

的系?

2. 局部凸性　任意线性拓扑空间可能具有的性质与欧几里得空间或赋范空间熟知的性质有显著的差异. 比赋范空间更一般但保持赋范空间众多性质的重要一类空间构成所谓局部凸空间.

定义 2　线性拓扑空间叫做局部凸的,乃指其中每一非空开集含有非空凸开子集.

注意,如果空间 E 是局部凸的,则对于任意一点 $x \in E$ 与它的任何邻域 U,可以找到 x 的凸邻域 V,使得 $x \in V \subset U$. 事实上,只要证明这个命题对点 $x = 0$ 为真. 设 U 是任一零邻域. 我们可以找到这样的零邻域 V,使得 $V - V \subset U$. 因为 E 是局部凸的,所以可以找到非空凸开集 $V' \subset V$. 设 $y \in V'$,则 $V' - y$ 是含于 U 中的凸零邻域.

任一赋范空间都是局部凸的. 事实上,在此空间中任何非空开集包含有某一个球. 于是,任一赋范空间是局部有界且局部凸的. 可以证明,就实质来说,赋范空间穷尽了具有这两个性质的空间类. 换言之,我们称线性拓扑空间 E 是可赋范的,乃指 E 中具有的拓扑可以用某一范数给出. 以下定理成立:任何可分离局部凸与局部有界线性拓扑空间是可赋范的.

习题 1　证明:线性拓扑空间中开集 U 是凸集,当且仅当 $U + U = 2U$.

习题 2　设 E 是线性空间. 集 $U \subset E$ 叫做对称的,乃指从 $x \in U$ 推出 $-x \in U$. 设 $\mathscr{B}$ 是空间 E 的、与自己的核(参见 §2)重合的一切凸对称子集组成的族. 证明以下断言正确.

(a) 在空间 E 中,对于某一局部凸可分离的拓扑(这个拓扑叫凸核拓扑),族 $\mathscr{B}$ 是一确定的零邻域族.

(b) 凸核拓扑是局部凸拓扑中最强的,局部凸拓扑中的线性运算在 E 中是连续的.

(c) E 上任一线性泛函关于凸核拓扑是连续的.

3. 可数赋范空间　对分析学来说,所谓可数赋范空间是线性拓扑空间的很重要一类. 为了叙述相应的定义,我们需要一个辅助概念.

设在线性空间 E 中给定两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 它们叫做一致的,乃指 E 中任何一个序列 $\{x_n\}$,当它关于这两个范数的任何一个为基本序列且按其中一个范数收敛于某一极限 $x \in E$ 时,则它也按另一个范数收敛于同一极限 x.

所谓范数 $\|\cdot\|_1$ 不弱于范数 $\|\cdot\|_2$,乃指存在常数 $c > 0$,使得对于一切 $x \in E$, $\|x\|_1 \geqslant c\|x\|_2$.

如果第一范数不弱于第二范数,而第二范数不弱于第一范数,则这两个范数叫做等价的. 两个范数叫做可比较的,乃指它们中的一个不弱于另一个.

定义 3　在线性空间 E 中给定了两两一致范数 $\|\cdot\|_n$ 的可数系,则 E 称为可数赋范空间. 如果用下标 r、正数 ε 以及满足条件

$$\|x\|_1 < \varepsilon, \cdots, \|x\|_r < \varepsilon$$

的所有 $x \in E$ 来定义每一个集 $U_{r,\varepsilon}$,取这样的集的总和作为任一可数赋范空间的确定零邻域系,则该空间成为线性拓扑空间.

我们请读者验证,上面的零邻域系的确在 E 中定义了一个拓扑,其中元素的加法与数乘元素的乘法运算是连续的.

注意,任一可数赋范空间满足第一可数性公理,因为零邻域系 $U_{r,\varepsilon}$ 可以用 ε 只取值 $1,1/2,\cdots,1/n,\cdots$ 的(不改变拓扑的)可数子系来代替. 此外,可数赋范空间中的拓扑可以利用某一度量给出,例如:

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n},x,y\in E. \tag{1}$$

请读者证明,函数 $\rho(x,y)$ 满足距离的所有公理且关于平移(即 $\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y),x,y,z\in E$)是不变的,并且由它产生的拓扑与原来的拓扑一致. 于是,接上面引进的度量来理解这完备性时,我们可以谈论可数赋范空间的完备性. 还要注意,序列 $\{x_k\}$ 关于度量(1)是基本的,当且仅当 $\{x_n\}$ 关于范数 $\|\cdot\|_n$ 中的每一个都是基本的,且 $\{x_n\}$(按这个度量)收敛于元素 $x\in E$ 当且仅当它按每一个范数 $\|\cdot\|_n$ 都收敛于 x. 换言之,可数赋范空间的完备性意味着其中任一序列按每一个范数 $\|\cdot\|_n$ 都是基本的,收敛的.

例 1 如果用公式

$$\|f\|_m=\sup_{\substack{a\leqslant t\leqslant b\\0\leqslant k\leqslant m}}|f^{(k)}(t)|$$

作为上面讨论过的闭区间上无穷次可微函数空间 $K[a,b]$ 的范数,则它是可数赋范空间重要的例子. 显然所有这些范数彼此之间是一致的,而且它们定义了正是上面已经叙述的 $K[a,b]$ 中的拓扑.

例 2 设 S_∞ 是由直线上所有这样的无穷次可微函数组成的空间,这种函数连同其一切导数在无穷大处趋于零比 $1/|t|$ 的任何幂次都快(即对于任何固定的 k 与 q,当 $|t|\to\infty$ 时,满足条件 $t^kf^{(q)}(t)\to 0$ 的函数). 在这个空间中,我们定义可数范数系为

$$\|f\|_m=\sup_{\substack{k,q\leqslant m\\-\infty<t<\infty}}|t^kf^{(q)}(t)|,\quad m=0,1,2,\cdots.$$

不难证明,这些范数彼此之间是一致的. 于是,S_∞ 是可数赋范空间.

例 3 可数赋范空间重要的特殊情形,即所谓可数希尔伯特空间. 设 H 是线性空间,其中给出内积的可数系 $(\varphi,\psi)_n$,并且假设与这些内积对应的范数 $\|\varphi\|_n=\sqrt{(\varphi,\varphi)_n}$ 彼此之间是一致的. 如果这样的空间是完备的,则它叫做可数希尔伯特空间.

例 4 以下空间可以作为可数希尔伯特空间的具体例子. 设 Φ 是所有使得对于每一个整数 $k\geqslant 0$,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^kx_n^2$$

收敛的数列$\{x_n\}$的集合. 设

$$\|x\|_k = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n^2}$$

为这个空间的范数系. 不难证明,这些范数彼此之间是一致的,并且在上面所指的意义下 Φ 是完备的. 显然,每一个范数$\|\cdot\|_k$可以借助于内积

$$(x,y)_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n y_n$$

给出,即 Φ 是可数希尔伯特空间,称它为速降序列空间.

如果 E 是可数赋范空间,则在其中所给的范数$\|\cdot\|_k$,可以认为当 $k<l$ 时,它们满足条件

$$\|x\|_k \leqslant \|x\|_l. \tag{2}$$

因为不然的话,我们可以像原来的范数系一样,用 E 中定义同一拓扑的范数

$$\|x\|'_k = \sup(\|x\|_1, \|x\|_2, \cdots, \|x\|_k)$$

以代替范数$\|x\|_k$. 使空间 E 按每一个范数$\|\cdot\|_k$完备化,我们便得到完备赋范空间系 E_k. 这时从关系式(2)及范数的一致性推得,当 $k<l$ 时,自然的嵌套关系

$$E_k \supset E_l$$

成立. 于是,可以使完备赋范空间的下降链

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots; \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \supset E$$

与每一可数赋范空间 E 对应. 可以证明,空间 E 是完备的当且仅当 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$(试证之!). 例如,在闭区间$[a,b]$上无穷次可微函数空间 $K[a,b]$ 是完备赋范空间 $C^n[a,b]$($n=0,1,2,\cdots$)的交,其中 $C^n[a,b]$ 由具有直到 n 阶连续导数的函数组成,而在 $C^n[a,b]$ 中的范数由公式

$$\|f\|_n = \sup_{\substack{a\leqslant t\leqslant b \\ 0\leqslant k\leqslant n}} |f^{(k)}(t)|$$

定义.

在三十年代中,当巴拿赫的工作中基本上建立了线性赋范空间理论时形成了一个印象,对服务于整个分析学的具体需要来说,这一类空间是足够广泛的. 然而,后来才弄清楚,事实并非如此. 实际上,在一系列问题中如下的空间是重要的,像无穷次可微函数空间,所有数列组成的空间 $\mathbf{R}^{\infty}$ 以及对于不能用任何范数给出其自然拓扑的其他空间. 这样一来,线性空间——拓扑的,但不是可赋范的——这完全不一定是"怪异"或"病态". 相反,这些空间中的某些空间乃是有限维欧几里得空间自然和重要的推广,比如说,这种推广并不亚于希尔伯特空间.

第四章　线性泛函与线性算子

§1. 线性连续泛函

1. 线性拓扑空间中的线性连续泛函　在第三章 §1 我们已经研究了定义在线性空间上的泛函. 如果所说的是给定在线性拓扑空间上的泛函，那么连续泛函具有基本的重要性. 通常，定义在空间 E 上的泛函 f，如果对于任意 $x_0 \in E$ 及任意 $\varepsilon > 0$，存在元 x_0 的一个邻域 U，使得对 $x \in U$ 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \tag{1}$$

则称泛函 f 是连续的. 特别，这个定义与线性泛函有关.

如果 E 是有限维的线性拓扑空间，那么 E 中的任何线性泛函自然是连续的. 在一般情况下，由线性泛函不能推出它的连续性.

下述论断虽然几乎是显然的，但对以后非常重要：

如果线性泛函 f 在任何一点 $x \in E$ 连续，那么它在 E 上处处连续.

事实上，设 y 是 E 中的任意一点且设 $\varepsilon > 0$. 选择点 x 的邻域 U，使其满足条件 (1)，则这个邻域的位移

$$V = U + (y - x)$$

是所求的点 y 的邻域. 因为如果 $z \in V$，那么 $z + x - y \in U$. 因此，

$$|f(z) - f(y)| = |f(z - y + x) - f(x)| < \varepsilon.$$

这样一来，验证线性泛函的连续性只需在一点，譬如在点 0 来进行就可以了.

如果 E 是满足第一可数性公理的空间，则在 E 上线性泛函的连续性可用序列的

语言来叙述:如果由 $x_n \to x(x \in E)$ 推出 $f(x_n) \to f(x)$,则称线性泛函 f 在点 $x \in E$ 连续. 检验连续性的这一定义与前面所引入的定义的等价性(在第一可数性公理成立时)的工作,我们留给读者去作.

定理 1　为使线性泛函 f 在 E 上连续,必须且只需在 E 中存在这样的零邻域,在该邻域上泛函 f 有界.

证明　如果泛函 f 在点 0 连续,那么对任意 $\varepsilon > 0$,存在零的邻域,在该邻域上

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

反之,设 U 是如此的零邻域,使得对 $x \in U$,

$$|f(x)| < C,$$

并设 $\varepsilon > 0$. 则 $\frac{\varepsilon}{C}U$ 就是这样的零邻域,在其上 $|f(x)| < \varepsilon$. 这就证明了 f 在点 0 的连续性,这也意味着在 E 上处处连续.

习题　设 E 是线性拓扑空间,证明下述论断的正确性:

(a) E 上的线性泛函 f 连续当且仅当存在这样的开集 $U \subset E$ 及这样的数 t,使得 $t \notin f(U)$,其中 $f(U)$ 是 f 在 U 上的值集.

(b) E 上的线性泛函 f 连续当且仅当其核 $\{x : f(x) = 0\}$ 在 E 中是闭的.

(c) 如果 E 上的任意线性泛函连续,则在 E 中的拓扑与凸核拓扑重合(参看第三章 §1 第 3 段中的习题 2).

(d) 如果 E 是无穷维的且是可赋范的,则在 E 上存在不连续的线性泛函(利用 E 中哈默尔基的存在性,参看第三章 §1 第 3 段中的习题).

(e) 设在 E 中存在确定零邻域系,该系的势不超过空间 E 的代数维数(即 E 中哈默尔基的势. 参看第三章 §1 第 3 段中的习题). 于是在 E 上存在不连续的线性泛函.

(f) 为使线性泛函 f 在 E 上连续,必须 f 在每一个有界集合上有界;而在 E 满足第一可数性公理的情况下,必须且只需 f 在每一个有界集合上有界.

2. 赋范空间上的线性泛函　设所考虑的空间 E 是赋范空间. 按照定理 1,任何线性连续泛函 f 在某一个零邻域中有界. 但是在赋范空间中任何零邻域都含有一个球,这意味着 f 在某一个球上有界. 由于泛函的线性性质,这等价于它在任意一个球上的有界性,特别,等价于在单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 上的有界性. 反之,由泛函 f 在单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 上的有界性,根据定理 1,推出 f 的连续性(因为这个球的内部乃是一个零邻域).

这样,在赋范空间中线性泛函是连续的当且仅当其在单位球中的值总体有界.

设 f 是赋范空间 E 中的线性连续泛函. 数

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|, \tag{2}$$

即在空间 E 的单位球上值 $|f(x)|$ 的上确界,称为泛函 f 的范数. 我们指出 $\|f\|$ 的如下几乎是显然的性质:

1)
$$\|f\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

这一点可立即由下述事实推出,即对任何 $x\neq 0$ 有

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|.$$

2) 对任何 $x \in E$

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|. \tag{3}$$

事实上,如果 $x\neq 0$,那么元素 $\frac{x}{\|x\|}$ 属于单位球,因此依照泛函范数的定义

$$\left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| = \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|f\|,$$

由此推出(3). 如果 $x=0$,那么在(3)式中左边与右边都是零.

习题 设 $C\geqslant 0$ 是这样的数,它使

$$|f(x)| \leqslant C\|x\| \tag{4}$$

对任何 x 成立. 试证明 $\|f\| = \inf C$,其中 inf 是对所有满足不等式(4)的 C 取的.

我们来研究赋范空间中线性泛函的例子.

例 1 设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧几里得空间,a 是该空间内任意一个固定的向量. 内积

$$f(x) = (x,a)$$

(其中 x 遍历整个 $\mathbf{R}^n$)显然是 $\mathbf{R}^n$ 中的线性泛函. 根据柯西–布尼雅可夫斯基不等式

$$|f(x)| = |(x,a)| \leqslant \|x\| \cdot \|a\|, \tag{5}$$

因此这个泛函是有界的,这意味着它在 $\mathbf{R}^n$ 上连续. 由不等式(5)得

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|a\|.$$

因为这个不等式的右边不依赖于 x,所以

$$\sup\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|a\|,$$

即 $\|f\| \leqslant \|a\|$. 如令 $x=a$,得

$$|f(a)| = (a,a) = \|a\|^2, \quad 即\frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\|.$$

所以 $\|f\| = \|a\|$.

例 2　积分

$$I(x) = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$$

(其中 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数)是空间 $C[a,b]$ 中的线性泛函. 这个泛函有界,其范数等于 $b-a$. 实际上,

$$|I(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \max|x(t)|(b-a) = \|x\|(b-a),$$

同时,当 $x \equiv \mathrm{const}$ 时等号成立.

例 3　研究更一般的例子,设 $y_0(t)$ 是 $[a,b]$ 上某个确定的连续函数. 对任意函数 $x(t) \in C[a,b]$,令

$$F(x) = \int_a^b x(t) y_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

这个泛函是线性的. 它又是有界的,因为

$$|F(x)| = \left|\int_a^b x(t) y_0(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|x\| \int_a^b |y_0(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

根据线性性质与有界性,这个泛函是连续的. 由(6)式可推出其范数的估计:

$$\|F\| \leqslant \int_a^b |y_0(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(试证明,事实上这里成立精确的等式!)

例 4　考虑前面已提到的,空间 $C[a,b]$ 中的线性泛函

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$$

(第三章 §1 第 5 段). 这个线性泛函在函数 $x(t)$ 的值由函数 $x(t)$ 在已知点 t_0 的值确定. 显然

$$|x(t_0)| \leqslant \|x\|,$$

同时,对 $x \equiv \mathrm{const}$ 等式成立. 由此立即得出泛函 $\delta_{t_0}(t)$ 的范数等于 1.

例 5　在任意欧几里得空间 X 中可以如在 $\mathbf{R}^n$ 中那样定义线性泛函,选择某个

确定的元素 $a \in X$,并对任意 $x \in X$,令

$$F(x) = (x,a).$$

像在 $\mathbf{R}^n$ 中的情形一样,容易验证同时有

$$\| F \| = \| a \|.$$

今后,我们仅研究线性连续泛函,而为了简明,"连续"一词将略去.

对线性泛函范数的概念可给如下一个直观的解释. 我们已经看到(第三章 §1),任意一个非零线性泛函都可有一个由方程

$$f(x) = 1$$

确定的超平面 L 与之对应. 我们来求由这个超平面到点 0 的距离 d. 按照定义 $d = \inf\limits_{f(x)=1} \| x \|$,由在超平面 $f(x)=1$ 上的估计

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$$

有 $\|x\| \geqslant 1/\|f\|$. 这意味着 $d \geqslant 1/\|f\|$. 另一方面,根据 f 的范数的定义,对任意 $\varepsilon>0$ 可找到这样的元素 x_ε,它满足条件 $f(x_\varepsilon)=1$,使得

$$1 > (\|f\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|.$$

所以

$$d = \inf_{f(x)=1} \|x\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的,得

$$d = 1/\|f\|,$$

即线性泛函 f 的范数等于超平面 $f(x)=1$ 到点 0 的距离的倒数.

3. 赋范空间中的哈恩-巴拿赫定理 在第三章 §2 中,我们已经证明了一般情形下的哈恩-巴拿赫定理. 根据这个定理,任何定义在线性空间 E 的某个子空间 L 上的线性泛函 f_0,且该泛函满足条件

$$|f_0(x)| \leqslant p(x) \tag{7}$$

(p 是 E 上固定的齐次凸泛函),那么可将这个泛函 f_0 保持上述条件延拓到整个 E 上. 相应于赋范空间,这个定理可叙述成下列形式:

设 E 是实的赋范空间,L 是其子空间,而 f_0 是 L 上的有界线性泛函. 这个线性泛函可保范地延拓成整个空间 E 上的某一线性泛函 f,即

$$\|f_0\|_{L上} = \|f\|_{E上}.$$

实际上,设

$$\|f_0\|_{L上} = k.$$

显然 $k\|x\|$ 是齐次凸范函. 把它取为 p 并应用一般情形下的哈恩 - 巴拿赫定理便得所求结果.

哈恩 - 巴拿赫定理的这一形式可作如下的几何解释:
方程

$$f_0(x) = 1 \tag{8}$$

在子空间 L 中确定一位于距零点为 $1/\|f_0\|$ 的超平面,把泛函 f_0 保范地延拓为整个 E 上的泛函时,我们经过这个部分的超平面画出在整个 E 内的“大”超平面,并且“不许”这个超平面靠近零.

哈恩 - 巴拿赫定理的复的形式(第三章 §2 定理 4a)给出上述定理的复的变形:

设 E 是复赋范空间,f_0 是有界线性泛函,它定义在子空间 $L\subset E$ 上. 则存在定义在整个 E 上的有界线性泛函 f,f 满足条件:

$$f(x) = f_0(x) \qquad x \in L,$$

$$\|f\|_{E上} = \|f_0\|_{L上}.$$

我们来指出对于赋范空间由哈恩 - 巴拿赫定理推出的若干重要事实. 首先作如下注解. 线性空间中的凸集,如果它有非空的核则称为凸体. 可以证明,在赋范空间中,集的核与其内点的全体显然是重合的. 于是,在赋范空间中凸体是至少有一个内点的凸集. 由此并由第三章 §2 定理 5 推出下列事实:

推论 1(分离性第一定理) 设 A 与 B 是赋范空间 X 中的凸集,同时二者中至少有一个,比如说 A,是凸体且其核与 B 不交. 则存在把 A,B 分离的非零线性连续泛函.

分离 A 与 B 的非零泛函的存在性由第三章 §2 定理 5 本身保证. 我们来证明相应的泛函一定连续. 事实上,如果

$$\sup_{x\in A} f(x) \leqslant \inf_{x\in B} f(x), \tag{9}$$

那么泛函 f 在 A 上是上有界的. 设 x_0 是集 A 的内点,而 $U(x_0)$ 是 x_0 的完全含于 A 内的球形邻域. 根据(9)式,泛函 f 在 $U(x_0)$ 上是上有界的. 于是 f 在 $U(x_0)$ 上也是下有界的(请读者证明之!). 因为在任意一个球上有界的线性泛函是连续的. 于是论断得到证明.

推论 2(分离性第二定理) 设 A 是赋范空间 X 中的闭集,$x_0 \in X$ 是不属于 A 的

点,则存在严格分离 x_0 与 A 的线性连续泛函.

实际上,只要取 x_0 点的某一个凸邻域 U,使其与 A 不交,并考虑分离 U 与 A 的泛函.(试证明,分离 U 与 A 的非零连续泛函严格分离 x_0 与 A.)

推论 3(零化子引理) 对巴拿赫空间 X 的任意(闭的)特征子空间 L,存在一个在 L 上等于零的非零线性连续泛函 f.

实际上,设 $x_0 \notin L$ 且 f 是严格分离 x_0 与 L 的线性连续泛函:

$$f(x_0) > \sup_{x\in L} f(x).$$

于是在 L 上 $f\equiv 0$,因为否则右边的上确界将等于 $+\infty$.

在给定的子空间上等于零的泛函的总体称为这个子空间的零化子并记为 $L^{\perp}$①.

推论 4 如果 x_0 是赋范空间 X 中的非零元素,那么在 X 上存在这样的线性连续泛函 f,使得

$$\|f\| = 1 \quad 且 \quad f(x_0) = \|x_0\|. \tag{10}$$

事实上,在由形如 αx_0 的元素所组成的一维子空间上,以公式 $f(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|$ 首先定义泛函 f,然后保范地将 f 延拓到整个 X 上,我们便得到了满足条件(10)的泛函.

注 对任意局部凸空间,推论 1—3 勿需修改仍保持有效,但是推论 4 则由下述论断代替:对任何 $x_0\neq 0$ 存在这样的线性连续泛函 f,$f(x_0)\neq 0$.

4. 在可数赋范空间中的线性泛函 设 E 是具有范数 $\|\cdot\|_k(k=1,2,\cdots)$ 的可数赋范空间. 不失一般性,可以认为(参看第三章 §5 第 3 段中的例 4),对任意 $x\in E$

$$\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \cdots \leqslant \|x\|_n \leqslant \cdots. \tag{11}$$

设 f 是 E 上的线性连续泛函. 那么在 E 中存在零邻域 U,在 U 上 f 有界. 根据在可数范数空间中拓扑的定义,存在这样的自然数 k 及 $\varepsilon>0$,使得球 $B_{k,\varepsilon}=\{x: \|x\|_k<\varepsilon\}$ 完全在 U 内. 于是泛函 f 在这个球上有界,所以对范数 $\|\cdot\|_k$ 有界且连续. 即存在这样的 $C>0$,使得对 $x\in E$

$$|f(x)| \leqslant C\|x\|_k.$$

另一方面,显然如果线性泛函按诸范数 $\|\cdot\|_n$ 中任何一个有界,则它在 E 上连续. 于是如果 E_n^* 是 E 上所有对于范数 $\|\cdot\|_n$ 连续的线性泛函的一个族,而 E^* 是 E 上所有线性连续泛函的一个族,那么

① 在第三章 §4 我们以此表示欧几里得空间中子空间的正交补. 在下一节我们可看到,在欧几里得空间中正交补的概念与零化子的概念等价,所以表示法的重合是有根据的.

$$E^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^*. \tag{12}$$

此外,由条件(11)得

$$E_1^* \subset E_2^* \subset \cdots \subset E_n^* \subset \cdots.$$

如果f是E上的线性连续泛函,即$f \in E^*$,则称使$f \in E_n^*$的数n中最小的数为f的阶. 根据(12)式,E上每一个线性连续泛函都有有限阶.

§2. 共轭空间

1. 共轭空间的定义 对于线性泛函可以定义加法和数乘. 设f_1与f_2是某个线性空间E上的两个线性泛函. 线性泛函

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad x \in E$$

称为f_1与f_2的和$f_1 + f_2$.

泛函

$$f(x) = \alpha f_1(x), \quad x \in E$$

称为线性泛函f_1与数α的数乘αf_1.

定义$f_1 + f_2$与αf_1的等式也可记为:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x).$$

显然,和$f_1 + f_2$与数乘αf_1是线性泛函. 此外,如果空间E是拓扑空间,那么由泛函f_1与f_2的连续性可知$f_1 + f_2$与αf_1也是在E上连续的.

易于验证,如此定义的泛函加法与泛函的数乘两个运算满足线性空间的所有公理. 换句话说,定义在某个线性拓扑空间E上的全体线性连续泛函构成一个线性空间,称为与E共轭的空间,并记为E^*.

习题 E上所有并不一定连续的线性泛函的全体称为代数共轭空间,记为$E^{\#}$. 试举出这样的拓扑向量空间E的例子,它有

$$E^* \neq E^{\#}.$$

在共轭空间E^*中可用各种不同的方法引入拓扑,其中最重要的是强拓扑与弱拓扑.

2. 共轭空间中的强拓扑 我们从最简单的情况开始,即原来的空间E是赋范空间. 对给定在赋范空间上的线性连续泛函,令

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

而引入范数概念. 这个量满足赋范空间定义中所有的要求. 实际上,

1) 对任意非零线性泛函f, $\|f\|\geqslant 0$,

2) $\|\alpha f\| = |\alpha|\cdot\|f\|$,

3)
$$\|f_1+f_2\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|f_1(x)+f_2(x)|}{\|x\|}$$
$$\leqslant \sup_{x\neq 0}\frac{|f_1(x)|}{\|x\|}+\sup_{x\neq 0}\frac{|f_2(x)|}{\|x\|} = \|f_1\|+\|f_2\|.$$

这样一来,与赋范空间共轭的空间E^*可赋予赋范空间的自然结构. 在E^*中与引入的范数对应的拓扑称为E^*中的强拓扑. 希望强调把E^*作为赋范空间考虑时,我们将其写成$(E^*,\|\cdot\|)$来代替E^*.

我们来建立与赋范空间共轭的空间的下述重要性质.

定理1 共轭空间$(E^*,\|\cdot\|)$是完备的.

证明 设$\{f_n\}$是线性泛函的基本序列. 那么对任意$\varepsilon>0$存在这样的N,使得对所有的$n,m>N$有$\|f_n-f_m\|<\varepsilon$. 由此,对于任意$x\in E$得到

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant \|f_n-f_m\|\cdot\|x\| < \varepsilon\|x\|,$$

即对任意的$x\in E$,数列$\{f_n(x)\}$收敛.

令

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

我们验证,f是线性连续泛函. 线性性质可直接验证:

$$f(\alpha x+\beta y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x+\beta y) = \lim_{n\to\infty}[\alpha f_n(x)+\beta f_n(y)]$$
$$=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

为了证明泛函f的连续性,回到不等式$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon\|x\|$,并在不等式中令$m\to\infty$而取极限,得

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon\|x\|.$$

由此推出泛函$f-f_n$有界. 于是泛函$f=f_n+(f-f_n)$有界,这意味着f连续. 此外,由上面不等式推出对所有$n\geqslant N$, $\|f-f_n\|\leqslant\varepsilon$,即$\{f_n\}$收敛于$f$.

应再次强调,这个定理的成立与原来空间是否完备无关.

注 如果赋范空间E不完备,而$\overline{E}$是E的完备化空间,则空间E^*与$(\overline{E})^*$同构.

实际上,如果E作为处处稠密的子空间被嵌入到$\overline{E}$中,那么任一E中的线性连续泛函f被从E连续延拓到整个$\overline{E}$,用$\bar{f}$表示这个(唯一的!)延拓. 显然$\bar{f}\in$

$(\overline{E})^*$, $\|\overline{f}\| = \|f\|$,且任一$(\overline{E})^*$中的泛函是E^*中某个泛函的延拓(即E上自己的收缩). 因此,映射$f \to \overline{f}$ 是空间E^*到整个空间$(\overline{E})^*$的同构映射.

现在定义在与任意线性拓扑空间共轭的空间中的强拓扑. 在与赋范空间共轭的空间中我们已定义了零邻域为满足条件

$$\|f\| < \varepsilon$$

的泛函的集合. 换句话说,我们把E中当x遍历单位球$\|x\| \leqslant 1$时使$|f(x)| < \varepsilon$的线性泛函取作与赋范空间E共轭的空间E^*中的零邻域. 取所有可能的ε,我们便得到确定零邻域系. 当E不是赋范空间而是线性拓扑空间时,自然是在E中取任意的有界集A代替单位球. E^*中的零邻域$U_{\varepsilon,A}$定义为满足下列条件的线性泛函的集合:对所有$x \in A$,

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

采用不同的ε与A,我们便得到E^*中的确定零邻域系.

于是,E^*中的强拓扑由依赖于正数ε与有界集$A \subset E$的零邻域的集合给定. 在这里我们不准备验证如此得到的邻域系实际上把E^*变成线性拓扑空间,虽然这并不复杂(参看[9]). 显然,在E为赋范空间的情形,刚才所说的E^*中的强拓扑才与由范数定义的拓扑重合.

我们指出,E^*中的强拓扑必定满足分离性公理T_1与(不依赖于E中拓扑的)局部凸性. 事实上,如果$f_0 \in E^*$且$f_0 \neq 0$,则有在这样的元$x_0 \in E$,使得$f_0(x_0) \neq 0$. 令$\varepsilon = \frac{1}{2}|f_0(x_0)|$且$A = \{x_0\}$,那么$f_0 \notin U_{\varepsilon,A}$,即$E^*$是$T_1$空间. 为了证明$E^*$中强拓扑的局部凸性,只需指出,对任意$\varepsilon > 0$与任意有界的$A \subset E$,邻域$U_{\varepsilon,A}$在$E$中是凸的. E^*中的强拓扑用记号b表示,当要强调是在强拓扑中考虑E^*时,我们将E^*记为(E^*, b).

3. 共轭空间的例子

(1) 设E是n维(实的或复的)线性空间. 在E中取任意的基$e_1, \cdots, e_n$,则任意向量$x \in E$可唯一地表为$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$的形式. 如果$f$是$E$上的线性泛函,那么显然

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) x_i. \tag{1}$$

因此线性泛函被它在基向量$e_1, \cdots, e_n$上的值唯一地确定,同时这些值可以任意地给定. 令

$$g_j(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } i = j, \\ 0, & \text{如果 } i \neq j, \end{cases}$$

就可确定线性泛函 $g_1,\cdots,g_n$. 显然这些线性泛函是线性无关的. 很清楚, $g_j(x)=x_j$, 所以公式(1)可改写成

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) g_i(x)$$

的形式. 于是,泛函 $g_1,\cdots,g_n$ 组成空间 E^* 中的基,即 E^* 是 n 维线性空间. E^* 中的基 $g_1,\cdots,g_n$ 称为关于 E 中的基 $e_1,\cdots,e_n$ 的对偶基.

空间 E 中不同的范数诱导出 E^* 中不同的范数. 下面就是在 E 与 E^* 中相互对应的范数对的一些例子(建议读者认真地进行相应的证明):

(a) $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}, \quad \|f\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|^2\right)^{1/2};$

(b) $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \|f\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{1/q};$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 < p < \infty;$$

(c) $\|x\| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|, \quad \|f\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|;$

(d) $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|f\| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|.$

在这些公式中, $x_1,\cdots,x_n$ 是向量 $x\in E$ 在基 $e_1,\cdots,e_n$ 中的坐标,而 $f_1,\cdots,f_n$ 是泛函 $f\in E^*$ 在对偶基 $g_1,\cdots,g_n$ 中的坐标.

习题 证明所列举的所有范数在 n 维空间中确定同一个拓扑.

(2) 考虑范数为 $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$, 收敛于零的序列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 的空间 c_0, 我们来证明与这个空间共轭的空间 $(c_0^*, \|\cdot\|)$ 是与范数为 $\|f\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ 的所有绝对可和序列 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots)$ 的空间 l_1 同构的空间. 任意序列 $f\in l_1$ 在空间 c_0 中按照公式

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n \tag{2}$$

确定线性有界泛函 $\tilde{f}$. 显然 $|\tilde{f}(x)| \leqslant \|x\| \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$, 所以

$$\|\tilde{f}\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \leqslant \|f\|.$$

在 c_0 中考虑向量

$$e_1=(1,0,0,\cdots,0,0,\cdots),$$
$$e_2=(0,1,0,\cdots,0,0,\cdots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0,0,0,\cdots,1,0,\cdots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

且令 $x^{(N)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{f_n}{|f_n|}e_n\left(\text{如果} f_n=0,\text{那么认为}\frac{f_n}{|f_n|}=0\right)$. 于是 $x^{(N)}\in c_0$, $\|x^{(N)}\|\leqslant 1$ 且

$$\tilde{f}(x^{(N)})=\sum_{n=1}^{N}\frac{f_n}{|f_n|}\tilde{f}(e_n)=\sum_{n=1}^{N}|f_n|.$$

因此 $\lim\limits_{N\to\infty}\tilde{f}(x^{(N)})=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|=\|f\|$. 于是, $\|\tilde{f}\|\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$. 将此不等式与前面所证明的相反的不等式比较一下,便知, $\|\tilde{f}\|=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|=\|f\|$.

于是,我们构造了从空间 l_1 到空间 c_0^* 内的线性同构映射 $f\to\tilde{f}$. 留下要验证的是空间 l_1 在此映射下的象与整个 c_0^* 重合,即任一泛函 $\tilde{f}\in c_0^*$ 可表为(2)式,其中 $f=\{f_n\}\in l_1$. 对任意 $x=\{x_n\}\in c_0$ 有 $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n$, 同时右端的级数在 c_0 中收敛于元 x,因为当 $N\to\infty$ 时 $\left\|x-\sum_{n=1}^{N}x_ne_n\right\|=\sup\limits_{n>N}|x_n|\to 0$. 因为泛函 $\tilde{f}\in c_0^*$ 连续, 则 $\tilde{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\tilde{f}(e_n)$,所以只要验证 $\sum_{n=1}^{\infty}|\tilde{f}(e_n)|<\infty$. 设 $x^{(N)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\tilde{f}(e_n)}{|\tilde{f}(e_n)|}e_n$ 并注意到 $x^{(N)}\in c_0$, $\|x^{(N)}\|\leqslant 1$, 便有

$$\sum_{n=1}^{N}|\tilde{f}(e_n)|=\sum_{n=1}^{N}\frac{\tilde{f}(e_n)}{|\tilde{f}(e_n)|}\tilde{f}(e_n)=\tilde{f}(x^{(N)})\leqslant\|\tilde{f}\|.$$

由此根据 N 的任意性断定 $\sum_{n=1}^{\infty}|\tilde{f}(e_n)|<\infty$.

(3) 不难证明,与空间 l_1 共轭的空间 l_1^* 是与空间 m 同构的,其中空间 m 由所有的有界序列 $x=\{x_n\}$ 组成,x 的范数为 $\|x\|=\sup\limits_{n}|x_n|$.

(4) 设 $p>1$, l_p 是所有这样的序列 $x=\{x_n\}$ 的空间:

$$\| x \| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

可以证明,与 l_p 共轭的空间 l_p^* 与空间 l_q 同构,$1/p + 1/q = 1$. l_p 中线性连续泛函的一般形式为:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n; \quad x = \{x_n\} \in l_p, \quad f = \{f_n\} \in l_q.$$

证明中用到赫尔德不等式.

(5) 我们来说明与希尔伯特空间共轭的空间的结构.

定理 2 设 H 是实希尔伯特空间,对 H 上任意线性连续泛函 f,存在唯一的元 $x_0 \in H$,使得

$$f(x) = (x, x_0), \quad x \in H, \tag{3}$$

并且 $\|f\| = \|x_0\|$. 反之,如果 $x_0 \in H$,那么公式(3)确定这样一个线性连续泛函 f,使得 $\|f\| = \|x_0\|$. 于是等式(3)确定 H^* 与 H 之间的同构 $f \to x_0$.

证明 显然对任意 $x_0 \in H$,公式(3)确定 H 上的线性泛函. 因为 $|f(x)| = |(x, x_0)| \leq \|x\| \cdot \|x_0\|$,所以这个泛函是连续的. 因为 $f(x_0) = \|x_0\|^2$,则 $\|f\| = \|x_0\|$. 我们来证明,H 上的任意线性连续泛函可以表为(3)的形式. 如果 $f = 0$,那么令 $x_0 = 0$. 现在设 $f \neq 0$ 及 $H_0 = \{x : f(x) = 0\}$ 是泛函 f 的核. 因为 f 连续,所以 H_0 是 H 中的闭线性子空间. 在第三章 §1 第 6 段已经证明任意线性泛函的核的余维数等于 1,所以考虑到第三章 §4 定理 7 的推论 3,我们断言子空间 H_0 的正交补 $H_0^{\perp}$ 是一维的,即存在这样的(非零)向量 y_0,它与 H_0 正交,使得任意向量 $x \in H$ 可唯一地表为 $x = y + \lambda y_0$,其中 $y \in H_0$. 显然,可以假定 $\|y_0\| = 1$. 令 $x_0 = f(y_0) y_0$,则对任意 $x \in H$ 有

$$x = y + \lambda y_0, \quad y \in H_0,$$

$$f(x) = \lambda f(y_0),$$

$$(x, x_0) = \lambda (y_0, x_0) = \lambda f(y_0)(y_0, y_0) = \lambda f(y_0).$$

于是对所有的 $x \in H$, $f(x) = (x, x_0)$. 如果 $f(x) = (x, x_0')$, $x \in H$,则 $(x, x_0 - x_0') = 0$. 由此,令 $x = x_0 - x_0'$,得 $x_0 = x_0'$.

注 1 设 E 是不完备的欧几里得空间,而 H 是希尔伯特空间,是 E 的完备化空间. 因为 E^* 与 H^* 同构(参看第 2 段中的注),而 H^* 与 H 同构,于是下述论断是正确的:与不完备的欧几里得空间 E 共轭的空间 E^* 同构于空间 E 的完备化空间 H.

注 2 定理 2 对复希尔伯特空间也成立(除了用 $x_0 = \overline{f(y_0)} y$ 代替 $x_0 = f(y_0) y_0$ 之外,证明完全一样). 复的情形与实的情形唯一的区别在于:现在使与 $x_0 \in H$ 对应线性泛函 $f(x) = (x, x_0)$ 的从 H 到 H^* 内的映射是共轭线性同构,即元 λx_0 对应于泛

函 $\bar{\lambda}f$.

（6）在例1—5中研究了赋范空间. 现在研究可数赋范空间. 设 Φ 是实可数希尔伯特空间,它是由所有满足

$$\|x\|_k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n^2\right)^{1/2} < \infty \quad 对所有 \quad k = 1,2,\cdots$$

的序列 $x = \{x_n\}$ 构成的. Φ 中的内积是

$$(x,y)_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n y_n, \quad k = 1,2,\cdots.$$

具有内积 $(\cdot,\cdot)_k$ 的空间 Φ 是欧几里得空间. 设 Φ_k 是 Φ 的完备化空间. 易见,Φ_k 可与由 $\|x\|_k < \infty$ 的所有序列 $x = \{x_n\}$ 所构成的希尔伯特空间等同起来. 根据定理2,与 Φ_k 共轭的空间 Φ_k^* 和 Φ_k 同构. 在这个同构下,与每个线性连续泛函 $f \in \Phi_k^*$ 对应的是这样一个序列 $\tilde{f} = \{f_n\}$:

$$\|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^k |f_n|^2\right)^{1/2} < \infty,$$

$$f(x) = (x,\tilde{f})_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n f_n, \quad x = \{x_n\} \in \Phi_k.$$

反之,每一个这样的序列确定 Φ_k^* 中的一个元. 现在我们不用序列 $\{f_n\}$ 而用序列 $\{g_n\}$ 来确定泛函 $f \in \Phi_k^*$,其中 $g_n = n^k f_n$. 那么

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n \quad 且 \quad \|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} g_n^2\right)^{1/2}.$$

于是 Φ_k^* 可以和满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} g_n^2 < \infty \tag{4}$$

的序列 $\{g_n\}$ 的希尔伯特空间等同起来,该空间的内积为

$$(g^{(1)},g^{(2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} g_n^{(1)} g_n^{(2)}.$$

因为 $\Phi^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k^*$,那么 Φ^* 便是所有这样的序列 $\{g_n\}$ 的空间,对这些序列的每一个都存在一个 k,使序列满足(4).

每一个这样的泛函在任一元 $x = \{x_n\} \in \Phi$ 处的值是确定的且等于 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$.

这样,如果空间 Φ 是希尔伯特空间下降链的交:

$$\Phi = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi_k, \quad \Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \cdots \supset \Phi_k \supset \cdots,$$

那么 Φ^* 是希尔伯特空间上升链的和:

$$\Phi^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k^*, \quad \Phi_1^* \subset \Phi_2^* \subset \cdots \subset \Phi_k^* \subset \cdots.$$

引入记号 $\Phi_k^* = \Phi_{-k}$是方便的. 如果还以 Φ_0 表示空间 l_2,那么便得到在两个方向上都是无穷的希尔伯特空间链:

$$\cdots \subset \Phi_k \subset \cdots \subset \Phi_1 \subset \Phi_0 \subset \Phi_{-1} \subset \cdots \subset \Phi_{-k} \subset \cdots,$$

其中对每个 $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$有 $\Phi_k^* = \Phi_{-k}$.

4. 二次共轭空间 因为线性拓扑空间 E 上的线性连续泛函本身构成一个线性拓扑空间,即与 E 共轭的空间(E^*, b),于是也可谈 E^* 上的线性连续泛函的空间 E^{**},即 E 的二次共轭空间,如此等等.

我们指出,E 中的任一元 x_0 在 E^* 上确定某一个线性泛函. 事实上,令

$$\psi_{x_0}(f) = f(x_0), \tag{5}$$

其中 x_0 是 E 中的固定元素,而 f 遍历整个 E^*. 等式(5)使每一个 f 对应于某个数 $\psi_{x_0}(f)$,即确定了 E^* 上的泛函. 同时因为

$$\psi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha \psi_{x_0}(f_1) + \beta \psi_{x_0}(f_2),$$

那么这个泛函是线性的.

其次,任意一个这样的泛函在 E^* 上连续. 事实上,设 $\varepsilon > 0$,又 A 是 E 中包含 x_0 的有界集. 在 E^* 中考虑零邻域 $U(\varepsilon, A)$. 按照 $U(\varepsilon, A)$ 的定义,当 $f \in U(\varepsilon, A)$ 时有

$$|\psi_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

而这就意味着泛函 ψ_{x_0}在点 0 连续,因此它也在整个空间 E^* 上连续.

这样一来我们便得到了整个空间 E 到其某个子空间 E^{**} 内的映射. 显然这个映射是线性的. 这个 E 到 E^{**} 内的映射被称为空间 E 到二次共轭空间内的自然映射,并用 π 来表示这个映射. 如果在 E 上有充分多的线性泛函(例如,如果 E 是赋范空间或者那怕是局部凸与可分离的空间),那么这个映射是一对一的. 因为此时对任何两个不同的 $x', x'' \in E$ 存在这样的泛函 $f \in E^*$,使得 $f(x') \neq f(x'')$,即 $\psi_{x'}$ 与 $\psi_{x''}$ 是 E^* 上不同的泛函. 如果且有 $\pi(E) = E^{**}$,那么(可分离的局部凸)空间 E 称为半自反的. 在空间 E^{**} 中(作为空间(E^*, b)的共轭空间)可以引入强拓扑,我们将其记为 b^*. 如果空间 E 是半自反的且映射 $\pi: E \to E^{**}$ 是连续的,则 E 称为自反空间. 可以证明映射 π^{-1} 总是连续的. 所以如果 E 是自反的,则自然映射 $\pi: E \to E^{**}$ 是线性拓扑空

间 E 与 $E^* = (E^{**}, b^*)$ 之间的同构.

由于现在我们还可把 E 中的每个元看作是空间 E^{**} 中的元,对线性泛函 $f \in E^*$ 的值引入更为对称的表示

$$f(x) = (f, x) \tag{6}$$

以代替 $f(x)$ 就更方便. 对固定的 $f \in E^*$,(f,x) 可看作是 E 上的泛函,而对固定的 x,它可看作 E^* 上的泛函(同时 x 已经显出 E^{**} 中元的作用).

如果 E 是赋范空间(因此空间 E^*,E^{**} 等也是赋范的),则空间 E 到 E^{**} 内的自然映射是等距映射.

事实上,设 x 是 E 中的元,以 $\|x\|$ 表示它在 E 中的范数,而以 $\|x\|_2$ 表示它在 E^{**} 中的范数. 我们来证明 $\|x\| = \|x\|_2$. 设 f 是 E^* 中任意非零元. 于是

$$|(f,x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|, \text{即} \ \|x\| \geqslant \frac{(f,x)}{\|f\|},$$

且因为第二个不等式的左边不依赖于 f,

$$\|x\| \geqslant \sup \frac{|f,x|}{\|f\|} = \|x\|_2.$$

另一方面(赋范空间的哈恩 - 巴拿赫定理推论 4),对任一 $x_0 \in E$ 存在这样的非零线性泛函 f_0,使

$$|(f_0, x_0)| = \|f_0\| \cdot \|x_0\|. \tag{7}$$

所以

$$\|x\|_2 = \sup_{f \in E^*} \frac{|(f,x)|}{\|f\|} \geqslant \|x\|,$$

即 $\|x\| = \|x\|_2$,这就是所要证明的. 于是赋范空间 E 与在 E^{**} 中的(一般说来不是闭的)线性流形 $\pi(E)$ 等距. 将 E 和 $\pi(E)$ 等同起来,即可认为 $E \subset E^{**}$.

由对赋范空间的自然映射 $\pi: E \to E^{**}$ 的等距性推出:半自反性的概念与自反性概念对于赋范空间来说是相同的.

由于与赋范空间共轭的空间是完备的,任何自反的赋范空间 E 都是完备的.

有限维欧几里得空间与希尔伯特空间是自反空间的最简单的例子(对它们甚至有 $E = E^*$).

收敛于零的序列的空间 c_0 是完备的非自反空间的例子. 事实上,正如我们在前面已经证明的(§2 例2),所有绝对收敛数列的空间 l_1 是与 c_0 共轭的,而 l_1 又与所有有界序列的空间 m 共轭.

在某个闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数空间 $C[a,b]$ 也是非自反的. 然而,我们对这

个论断不进行证明了①.

当 $1<p\neq 2$ 时的空间 l_p 是不与具共轭空间重合的自反空间的例子(因为 $l_p^*=l_q$,其中 $1/p+1/q=1$,于是 $l_p^{**}=l_q^*=l_p$).

习题 证明自反空间的闭子空间是自反的.

§3. 弱拓扑与弱收敛

1. 在线性拓扑空间中的弱拓扑与弱收敛 考虑线性拓扑空间 E 及 E 上所有连续泛函的总和. 如果 $f_1,\cdots,f_n$ 是这样的泛函的任意有限组,且 ε 是正数,那么集

$$\{x:|f_i(x)|<\varepsilon;\ i=1,2,\cdots,n\} \tag{1}$$

在 E 中是开的,并且包含点 0,即是某个零邻域. 两个这样的邻域的交总包含形如(1)的集,因此在 E 中可引入拓扑. 对这个拓扑,形如(1)的集的总和是确定零邻域系. 这个零邻域系称为空间 E 的弱拓扑. 弱拓扑在 E 中是最弱的拓扑,在这个拓扑中所有在这个空间原先的拓扑中连续的线性泛函是连续的.

显然,E 中在弱拓扑意义下为开的任意集合,在空间 E 的原先的拓扑中是开的. 但是,一般说来,反过来是不对的(形如(1)的集在原先的拓扑中不一定构成确定零邻域系). 按照我们在第二章 §5 中所采取的术语,这意味着空间 E 中的弱拓扑比 E 中原先的拓扑弱. 因而证实了对它所取的这个名字是正确的.

如果在 E 中存在充分多的线性连续泛函(例如,如果 E 是赋范的),那么 E 中的弱拓扑满足豪斯多夫分离性公理. 同样容易验证,在 E 中定义的加法与数乘运算对于这个空间的弱拓扑是连续的.

甚至在赋范空间的情况,E 中的弱拓扑也可能不满足第一可数性公理. 因此,一般说来,这个拓扑不用收敛序列的语言来描述. 但是,用这个拓扑定义的 E 中的收敛性是重要的概念,称为弱收敛. 为了区别,在空间 E 中用原先的拓扑(如果 E 是赋范空间,就用范数)定义的收敛性称为强收敛.

弱收敛的概念可以用下述方式叙述:设 $\{x_n\}$ 是 E 中元的序列,$x_0\in E$. 如果对 E 上任意的线性连续泛函 $\varphi(x)$,数列 $\{\varphi(x_n)\}$ 收敛于 $\varphi(x_0)$,则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0.

实际上,为了简单,设 $x_0=0$,假定对任意 $\varphi\in E^*$,$\varphi(x_n)\to 0$. 那么对点 0 的任意弱邻域

$$U=\{x:|\varphi_i(x)|<\varepsilon,i=1,2,\cdots,k\}$$

存在这样的 N,使得对所有的 $n\geqslant N$,$x_n\in U$(为此只需选 N_i,使当 $n\geqslant N_i$ 时 $|\varphi_i(x_n)|<\varepsilon$,然后令 $N=\max N_i$). 反之,如果对每一个弱零邻域 U 存在这样的 N,使

① 甚至可以证明如下更强的论断:不存在任何以 $C[a,b]$ 为共轭空间的赋范空间.

得对所有的 $n \geqslant N$ 有 $x_n \in U$，那么当 $n \to \infty$ 时 $\varphi(x_n) \to 0$ 这个条件显然对每一个固定的 $\varphi \in E^*$ 都是满足的. 由空间 E 的弱拓扑比 E 的强拓扑弱推出，所有的强收敛序列都是弱收敛的. 一般地说，其逆是不成立的（参看下面的例子）.

2. 赋范空间中的弱收敛　我们对于赋范空间来更详细地研究弱收敛概念.

定理 1　如果 $\{x_n\}$ 是赋范空间中的弱收敛序列，那么存在这样的常数 C，使

$$\|x_n\| \leqslant C.$$

换句话说，赋范空间中的任一弱收敛序列有界.

证明　在 E^* 中考虑集合

$$A_{kn} = \{f : |(f, x_n)| \leqslant k\}, \quad k, n = 1, 2, \cdots.$$

根据 (f, x_n) 当固定 x_n 时作为 f 的函数的连续性，这些集合是闭集. 因此集 $A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn}$（作为闭集的交）也是闭的. 根据 $\{x_n\}$ 的弱收敛性，序列 (f, x_n) 对每一个 $f \in E^*$ 是有界的，所以

$$E^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

因为空间 E^* 完备，则按照贝尔定理（第二章 §3）诸 A_k 的集中至少有一个，比如说是 A_{k_0}，在某个球 $B[f_0, \varepsilon]$ 中稠密，而因为 A_{k_0} 是闭集，则这意味着

$$B[f_0, \varepsilon] \subset A_{k_0}.$$

但是这就意味着序列 $\{x_n\}$ 在球 $B[f_0, \varepsilon]$ 上有界，因此也在 E^* 中的任意球上有界，特别在 E^* 中的单位球上有界. 于是序列 $\{x_n\}$ 作为 E^{**} 中元的序列是有界的. 但是根据 E 到 E^{**} 内自然嵌入的等距性，这也就意味着序列 $\{x_n\}$ 在 E 中的有界性.

注　在证明序列 $\{x_n\}$ 按范数的有界性时，我们仅利用了对任意 $f \in E^*$，数列 (f, x_n) 有界. 于是，如果 E 中的序列 $\{x_n\}$ 是这样的序列：使对任意 $f \in E^*$，数列 (f, x_n) 有界，则存在这样的常数 C，使得 $\|x_n\| \leqslant C$. 这个论断可以推广：赋范空间 E 中的任意弱有界（即在弱拓扑中有界）子集 Q 强有界（即包含在某个球中）. 实际上，假设存在这样的序列 $\{x_n\} \subset Q$ 使得 $\|x_n\| \to \infty$ $(n \to \infty)$. 因为 Q 弱有界，于是集合 $\{x_n\}$ 也弱有界，即集合被任意弱零邻域所吸收. 特别，对任意 $f \in E^*$ 存在这样的 N，使 $\{x_n\} \subset N\{x : |(f, x)| < 1\}$. 由此对所有的 n 有 $|(f, x_n)| < N$. 但是根据前面所作的说明，这与假设 $\|x_n\| \to \infty$ 矛盾. 如果顾及到集 Q 的弱有界性意味着在其上任意线性连续泛函有界，那么我们便得到重要结果：为使赋范空间的子集 Q 有界，必须且只需在 Q 上任意泛函 $f \in E^*$ 有界.

下述定理对于实际验证某些序列的弱收敛性常常是有益处的.

定理 2　设有赋范空间 E 中的元的序列 $\{x_n\}$，如果：

1）$\|x_n\|$ 被某个常数 M 所界定，$\|x_n\|$ 是总体有界的；

2）对任意 $f \in \Delta$，$f(x_n) \to f(x)$，其中 Δ 是某个集合，其线性包在 E^* 中处处稠

密,则序列$\{x_n\}$弱收敛于$x \in E$.

证明 由条件2)与线性泛函上运算的定义推出,如果φ是Δ中元的线性组合,则

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x).$$

现在设φ是E^*中的任意元,$\{\varphi_k\}$是收敛于φ的、Δ中元的线性组合的序列. 我们来证明$\varphi(x_n)\to\varphi(x)$. 设$M$使

$$\|x_n\| \leqslant M(n=1,2,\cdots) \text{ 且 } \|x\| \leqslant M.$$

估计差$|\varphi(x_n)-\varphi(x)|$. 因为$\varphi_k\to\varphi$,则对任意$\varepsilon>0$,存在这样的$K$,使对所有的$k\geqslant K$成立$\|\varphi-\varphi_k\|<\varepsilon$. 所以

$$|\varphi(x_n)-\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x_n)-\varphi_k(x_n)| + |\varphi_k(x_n)-\varphi_k(x)|$$
$$+ |\varphi_k(x)-\varphi(x)| \leqslant \varepsilon M + \varepsilon M + |\varphi_k(x_n)-\varphi_k(x)|.$$

但是,根据条件当$n\to\infty$时$\varphi_k(x_n)\to\varphi_k(x)$. 因此,当$n\to\infty$时对任意$\varphi\in E^*$,$\varphi(x_n)-\varphi(x)\to 0$.

例 我们来看在某些具体的空间中弱收敛概念有怎样的意义.

(1) *在有限维欧几里得空间* $\mathbf{R}^n$ 中弱收敛与强收敛一致. 事实上,设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是$\mathbf{R}^n$中任意的标准正交基,且$\{x_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的序列,它弱收敛于元x. 设

$$x_k = x_k^{(1)}e_1 + \cdots + x_k^{(n)}e_n$$

及

$$x = x^{(1)}e_1 + \cdots + x^{(n)}e_n.$$

那么

$$x_k^{(1)} = (x_k, e_1) \to (x, e_1) = x^{(1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_k^{(n)} = (x_k, e_n) \to (x, e_n) = x^{(n)},$$

即序列$\{x_n\}$按坐标收敛于x. 于是

$$\rho(x_k, x) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_k^{(i)} - x^{(i)})^2\right)^{1/2} \to 0,$$

即$\{x_n\}$强收敛于x. 由于从强收敛总可推出弱收敛,在$\mathbf{R}^n$中这两种收敛的等价性便得到了证明.

(2) *l_2 中的弱收敛* 为使有界序列$\{x_k\}$弱收敛于x,只需满足条件:

$$(x_k, e_i) = x_k^{(i)} \to x^{(i)} = (x, e_i), \quad i = 1,2,\cdots,$$

其中

$$e_1 = (1,0,0,\cdots),\ e_2 = (0,1,0\cdots),\cdots.$$

实际上元 e_i 的线性组合在空间 l_2 中处处稠密(正如我们已看见的,l_2 与其共轭空间重合). 所以我们的论断可从定理 2 得出.

于是 l_2 中有界序列 $\{x_k\}$ 的弱收敛性意味着这些向量的坐标数列 $x_k^{(i)}$ 对每个 $i = 1,2,\cdots$ 都收敛. 换句话说,(在有界的条件下)弱收敛与按坐标收敛一致. 不难看出 l_2 中的弱收敛与强收敛是不一致的. 实际上,我们证明序列 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ 在 l_2 中弱收敛于 0. l_2 中的任何线性泛函 f 可记成向量 $x \in l_2$ 与某个固定的向量 $a = (a_1, a_2, \cdots)$ 的内积 $f(x) = (x, a)$. 所以 $f(e_n) = a_n$,且由于当 $n \to \infty$ 时 $a_n \to 0$ 对所有的 $a \in l_2$ 成立. 我们得到:对 l_2 中每个线性泛函有

$$\lim_{n\to\infty} f(e_n) = 0.$$

同时,序列 $\{e_n\}$ 在强收敛的意义下不收敛于任何极限.

习题 1　设希尔伯特空间 H 中元的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于元 x,同时当 $n \to \infty$ 时 $\|x_n\| \to \|x\|$. 证明在这种情况下序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x,即 $\|x_n - x\| \to 0$.

习题 2　证明: 如果习题 1 中的条件 $\|x_n\| \to \|x\|$ 代之以对所有的 n, $\|x_n\| \leqslant \|x\|$ 或者 $\varlimsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leqslant \|x\|$,则习题 1 的论断仍然成立.

习题 3　设 H 是(可分的)希尔伯特空间,而 Q 是它的有界子集. 那么由空间 H 的弱拓扑在 Q 中诱导的拓扑可由某个度量给定.

习题 4　试证明,希尔伯特空间中的任何闭的凸子集在弱拓扑中是闭的(特别,希尔伯特空间中的任何闭的线性子空间弱闭). 试举出希尔伯特空间中的闭集但不是弱闭的例子.

(3) 连续函数空间 $C[a,b]$ 中的弱收敛　设 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中弱收敛于函数 $x(t)$ 的函数序列. 序列 $\{x_n(t)\}$ 按照 $C[a,b]$ 中的范数有界. 在定义于 $C[a,b]$ 上的泛函中特别存在泛函 δ_{t_0},其中每一个这样的泛函都是在某个固定点 t_0 处的函数值(参看 §1 第 2 段例 4). 对于每一个这样的泛函 δ_{t_0},条件

$$\delta_{t_0}(x_n) \to \delta_{t_0}(x)$$

都意味着

$$x_n(t_0) \to x(t_0).$$

于是,如果序列 $\{x_n(t)\}$ 弱收敛,那么它

1) 一致有界,即 $|x_n(t)| \leqslant C$ 对所有的 $n = 1,2,\cdots$ 及 $a \leqslant t \leqslant b$ 成立.

2) 在每一点收敛.

可以证明,这两个条件的总合,对 $C[a,b]$ 中序列 $\{x_n(t)\}$ 的弱收敛来说,不仅是必要的,而且也是充分的. 换言之,在 $C[a,b]$ 中的弱收敛与(在有界的条件下)逐点

收敛一致.

显然,这种收敛与按 $C[a,b]$ 的范数收敛(即连续函数的一致收敛性)不一致(试举出相应的例子).

3. 共轭空间中的弱拓扑与弱收敛 在前节第2段我们在共轭空间 E^* 中取形如

$$U_{\varepsilon,A} = \{f: |f(x)| < \varepsilon, x \in A\}$$

的集的总体作为零邻域系后,引入了称之为强拓扑的拓扑,其中 A 是 E 中任意的有界集,而 ε 是任意的正数. 如果我们在这里把所有的有界集代之以所有的有限子集 $A \subset E$,那么就得到所谓的共轭空间 E^* 中的弱拓扑. 由于所有的有限集合 $A \subset E$ 有界(一般说来,反过来不成立),显然空间 E^* 的弱拓扑比这个空间中的强拓扑弱. 一般说来,这两个拓扑不重合.

在 E^* 中引入的弱拓扑在这个空间中定义了某种被称为泛函的弱收敛的收敛性. 线性泛函的弱收敛性是一个重要概念,它在泛函分析的许多问题中起着本质的作用,特别是在广义函数的理论中. 关于广义函数我们将在下一节谈到.

线性泛函序列 $\{\varphi_n\}$ 的弱收敛显然是这个序列在 E 的每个固定元上的收敛. 换句话说,如果对于每一个 $x \in E$,序列 $\{\varphi_n\}$ 满足关系

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x),$$

其中 $\varphi \in E^*$,则称序列 $\{\varphi_n\}$ 弱收敛于 φ. 显然,在共轭空间中,在强拓扑中收敛的序列也弱收敛(但反之不然).

设 E(因而 E^*)是巴拿赫空间. 成立与定理 1 类似的下述定理:

定理 1* 如果 $\{f_n\}$ 是巴拿赫空间上线性泛函的弱收敛序列,则存在这样的常数 C,使得

$$\|f_n\| \leqslant C, \quad n = 1,2,\cdots.$$

换言之,任何与巴拿赫空间共轭的空间元的弱收敛序列依范数有界.

证明与定理 1 的证明没有什么不同.

下面的定理与定理 2 完全类似.

定理 2* 设 $\{\varphi_n\}$ 是 E^* 中的线性泛函序列,$\varphi \in E^*$,如果:

1) $\{\varphi_n\}$ 是有界序列,即

$$\|\varphi_n\| \leqslant C, \quad n = 1,2,\cdots;$$

2) 关系 $(\varphi_n, x) \to (\varphi, x)$ 对所有属于某一个这样的集合的 x 成立,这个集合的元的线性组合在 E 中处处稠密,则 $\{\varphi_n\}$ 弱收敛于 φ.

证明与定理 2 是一样的.

我们来看一个例子. 设 E 是连续函数空间 $C[a,b]$①,且

$$\varphi(x) = x(0),$$

即 φ 是 δ 函数(参看 § 1,第 2 段,例 4). 其次,设 $\{\varphi_n(t)\}$ 是满足下列条件的连续函数序列:

1) 当 $|t| > 1/n$ 时 $\varphi_n(t) = 0, \varphi_n(t) \geqslant 0$;

2) $\int_a^b \varphi_n(t)\mathrm{d}t = 1$.

那么对于任意在 $[a,b]$ 上连续的函数 $x(t)$,借助中值定理可得当 $n\to\infty$ 时

$$\int_a^b \varphi_n(t)x(t)\mathrm{d}t = \int_{-1/n}^{1/n} \varphi_n(t)x(t)\mathrm{d}t \to x(0),$$

表达式

$$\int_a^b \varphi_n(t)x(t)\mathrm{d}t$$

是 $C[a,b]$ 上的线性泛函. 于是 δ 函数可表为在 $C[a,b]$ 上线性泛函弱收敛意义下,"普通"函数序列的极限.

注　某个空间 E 上的线性泛函的空间 E^* 可从两方面来研究:或者作为与原先的空间 E 共轭的空间;或者认为 E^* 本身是基本空间,而空间 E^{**} 是与之相关的共轭空间. 与此对应,我们可在 E^* 中用两种方法引入弱拓扑:或者作为泛函空间,借助于 E 中元的所有可能的有限组在 E^* 中定义邻域,以引入弱拓扑;或者作为基本空间,借助于空间 E^{**} 而引入弱拓扑. 在自反空间的情形,这两者自然是一样的. 如果 E 不是自反的,那么这两者在 E^* 中是不同的拓扑. 为了避免这里可能发生的混乱,我们把在基本空间中所定义的弱拓扑(即借助于 E^{**} 在 E^* 中定义的拓扑)简单地称为弱拓扑,而在泛函空间中的弱拓扑(即借助于 E 在 E^* 中定义的拓扑)称为弱 * 拓扑. 显然,E^* 中的弱 * 拓扑比空间 E 中的弱拓扑弱(即在弱拓扑中的开集不少于弱 * 拓扑中的开集).

4. 共轭空间中的有界集　在线性泛函弱收敛概念的各种应用中,下述定理有重要的作用.

定理 3　如果 E 是可分的线性赋范空间,则在 E 的线性连续泛函的任何有界序列中含有弱收敛的子序列.

证明　在 E 中选取可数的处处稠密的集$(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$. 如果 $\{\varphi_n\}$ 是 E 上线性泛函的(依范数)有界序列,那么数列

$$\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1), \cdots, \varphi_n(x_1), \cdots$$

---

① 我们假定 $0 \in [a,b]$. 当然,我们也可取任意其他的点代替点 $t=0$.

有界. 所以从$\{\varphi_n\}$中可以这样选子序列

$$\varphi_1^{(1)},\varphi_2^{(1)},\cdots,\varphi_n^{(1)},\cdots,$$

使得数列$\varphi_1^{(1)}(x_1),\varphi_2^{(1)}(x_1),\cdots,\varphi_n^{(1)}(x_1),\cdots$收敛. 其次,由$\{\varphi_n^{(1)}\}$中可这样选子序列

$$\varphi_1^{(2)},\varphi_2^{(2)},\cdots,\varphi_n^{(2)},\cdots,$$

使得数列$\varphi_1^{(2)}(x_2),\varphi_2^{(2)}(x_2),\cdots,\varphi_n^{(2)}(x_2),\cdots$收敛. 继续这个过程,我们得到序列族

$$\varphi_1^{(1)},\varphi_2^{(1)},\cdots,\varphi_n^{(1)},\cdots,$$

$$\varphi_1^{(2)},\varphi_2^{(2)},\cdots,\varphi_n^{(2)},\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(其中每一个序列都包含在前一个序列内),使得$\{\varphi_n^{(k)}\}$在点$x_1,x_2,\cdots,x_k$收敛. 于是,取"对角线"

$$\varphi_1^{(1)},\varphi_2^{(2)},\cdots,\varphi_n^{(n)},\cdots$$

后,我们得到一个线性泛函的子序列,使得对所有的n,$\varphi_1^{(1)}(x_n),\varphi_2^{(2)}(x_n),\cdots$收敛. 于是(根据定理2*)序列$\varphi_1^{(1)}(x),\varphi_2^{(2)}(x),\cdots$对任意$x\in E$也收敛.

这个定理连同定理1*表明在与可分的巴拿赫空间共轭的空间E^*中,诸有界子集且只有这些有界子集在弱*拓扑中是可数准紧的. 我们证明,事实上这里准紧性成立,而不仅仅是可数准紧性.

首先证明如下定理.

定理4 设S^*是与可分的赋范空间E共轭的空间E^*中闭的单位球. 则在S^*中可用度量

$$\rho(f,g)=\sum 2^{-n}|(f-g,x_n)|, \tag{2}$$

给定由空间E^*的弱*拓扑所诱导的拓扑,其中$\{x_n\}$是空间E的单位球S中某个固定的、可数的处处稠密的集合.

证明 显然,函数$\rho(f,g)$具有距离的所有性质. 此外,ρ对于位移是不变的:

$$\rho(f+h,g+h)=\rho(f,g).$$

所以,只需验证在S^*中由空间E^*的弱拓扑所定义的零邻域系与在S^*中由距离(2)所定义的零邻域系等价,即1)任意"球"

$$Q_\varepsilon=\{f:\rho(f,0)<\varepsilon\}$$

包含S^*与E^*中某个弱零邻域的交,且2)E^*中任意弱零邻域包含S^*与某个Q_ε的交.

取 N 使得 $2^{-N}<\varepsilon/2$，考虑弱零邻域

$$V = V_{x_1,\cdots,x_N;\varepsilon/2} = \{f: |(f,x_k)| < \varepsilon/2, k = 1,2,\cdots,N\}.$$

于是，如果 $f \in S^* \cap V$，则

$$\rho(f,0) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} |(f,x_n)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} |(f,x_n)|$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon,$$

即 $S^* \cap V \subset Q_\varepsilon$. 从而论断 1) 得到证明. 我们来证明论断 2). 设

$$U = U_{y_1,\cdots,y_\infty;\delta} = \{f: |(f,y_k)| < \delta, k = 1,2,\cdots,m\}$$

是 E^* 中某个弱 * 零邻域. 可以假定 $\|y_k\| \leqslant 1, k=1,2,\cdots,m$. 因为集 $\{x_n\}$ 在 S 中处处稠密，于是可找到这样的下标 $n_1,\cdots,n_m$，使得 $\|y_k - x_{n_k}\| < \delta/2, k=1,2,\cdots,m$. 设 $N = \max(n_1,\cdots,n_m)$ 及 $\varepsilon = 2^{-(N+1)}\delta$. 那么在 $f \in S^* \cap Q_\varepsilon$ 时，由不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |(f,x_n)| < \varepsilon$$

得到 $|(f,x_n)| < 2^n\varepsilon$. 特别，

$$|(f,x_{n_k})| < 2^{n_k}\varepsilon \leqslant 2^N\varepsilon = \delta/2.$$

因此我们对所有的 $k=1,2,\cdots,m$ 得到

$$|(f,y_k)| \leqslant |(f,x_{n_k})| + |(f,y_k - x_{n_k})|$$
$$< \delta/2 + \|f\| \cdot \|y_k - x_{n_k}\| < \delta.$$

于是 $S^* \cap Q_\varepsilon \subset U$. 定理证毕.

显然，这个结果可自然地推广到任意的球，这意味着也可推广到任意有界子集 $M \subset E^*$.

我们证明了（定理 3），从 E^* 中每一个有界序列可选出弱 * 收敛的子序列. 换句话说，在增补了弱 * 拓扑且与可分的线性赋范空间共轭的空间 E^* 中，每一个有界子集 M 是可数准紧的. 但是根据上面的定理 4，每一个这样的集合是可度量的拓扑空间，而对于度量空间，紧性与可数紧性是一致的. 于是，我们得到如下结果：

定理 3* 　在与可分的赋范空间共轭的空间 E^* 中，任何有界集 M 在空间 E^* 的弱 * 拓扑的意义下是准紧的.

现在证明，如果 E 是可分的线性赋范空间，则空间 (E^*,b) 中的任何闭球在空间 E^* 的弱 * 拓扑中是闭的.

因为在空间 E^* 中的位移把（在弱 * 拓扑中的）闭集类变为自身，那么只需证明

在弱*拓扑中任何形如$S_c^* = \{f: \|f\| \leqslant c\}$的球是闭的. 设$f_0 \notin S_c^*$. 按照泛函范数的定义, 存在这样的向量$x \in E$, 使$\|x\| = 1, f_0(x) = \alpha > c$. 于是集$U = \left\{f: f(x) > \dfrac{\alpha + c}{2}\right\}$是泛函$f_0$的这样一个弱邻域, 该邻域连球$S_c^*$的一个元都不包含, 因此球$S_c^*$在弱*拓扑中是闭的.

由所证明的论断及定理3*推出如下定理:

定理5 在与可分的赋范空间共轭的空间中任何闭球在弱*拓扑中是紧的.

前面所叙述的关于共轭空间中有界集的结果可以从赋范空间转到局部凸空间去, 关于这一点, 例如可参看[42].

§4. 广义函数

1. 函数概念的推广 在分析的各种问题中, "函数"一词必须从不同程度的广泛性去理解. 有时所考虑的是连续函数, 而在另外的问题中谈到函数时必须假定一次或若干次可微, 等等. 然而, 在一系列情况中, 函数的古典概念甚至在最广泛的意义下来解释, 即如对于函数定义域中的每一个x值按任意的规则都有某一个数$y = f(x)$与之对应, 竟然也不够. 下面是两个重要的例子.

例1 沿直线的质量分布对于给出这个分布的密度是方便的. 但是如果是在直线上有一点, 它具有正的质量, 那么这一分布的密度显然不能用任何"普通"的函数来描述.

例2 应用数学分析工具于某个问题, 我们会碰到某些运算的不可行性. 例如(在某点或甚至在所有的点)不存在导数的函数, 如果把导数理解为"普通"的函数, 就不能进行微分. 当然, 这类的困难可以避开, 比如说仅限于考虑解析函数的话, 但是这种可容许函数范围的缩小在许多情况下是我们十分不愿意的.

然而, 类似的困难可以不用缩小的办法而用本质上推广函数概念的方法来克服, 即引入所谓的广义函数. 我们在前面所研究的共轭空间的概念乃是引入相应定义的基础.

我们再强调一下: 广义函数概念的引入完全不是由尽可能扩充分析概念的意图所引起的, 而是完全由于具体问题所导致的. 实际上, 在物理学中, 广义函数已经应用相当久了, 无论如何也比广义函数的严格数学理论的建立要早.

在给出精确定义之前, 我们先叙述构造广义函数的基本思想.

设f是直线上一个确定的函数, 它在每一个有限区间上可积, 设φ是在某一个有限区间外为零的连续函数(这样的函数我们今后称之为有限支集的). 对于每一个函数φ可借助于确定的函数f, 使数

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

与之对应(实际上,由于 $\varphi(x)$ 的有限支集性质,积分是对某个有限区间而取的). 换句话说,函数 f 可以看成是在某一个有限支集函数空间上的泛函(根据积分的基本性质,泛函是线性的). 然而,可在这样一个空间引入的一切泛函并不限于形如(1)的泛函. 例如,使每一个函数 φ 对应于它在点 $x=0$ 的值,我们便得到不可表为形如(1)的线性泛函. 这样一来函数 $f(x)$ 以自然的方式包含在某个更广的集中——在有限支集函数上所有线性泛函的集合中.

可用不同的方式选择函数 φ 的范围,例如可以选取所有连续的有限支集函数. 然而,今后将清楚,除了连续性与有限支集性之外,还要求可容许函数 φ 满足充分严格的光滑性条件是合理的.

2. 基本函数空间　现在给出精确的定义. 在直线上考虑具有任意阶连续导数的所有有限支集函数 φ 的总体 K①. 属于 K 的函数构成线性空间(具有函数的通常加法及数乘两种运算). 在这个空间不能引入与下面所叙述的定理相应的范数,然而在这个空间中可用自然的方法引入收敛概念.

设 $\{\varphi_n\}$ 为 K 中元的序列,如果 1) 对任何 $\varphi_n \in K$,存在区间,在其外 φ_n 为零②;2) k 阶($k=0,1,2,\cdots$)导数③序列 $\{\varphi_n^{(k)}\}$ 在此区间上一致收敛于 $\varphi^{(k)}$. (并不假定对不同的 k 有收敛的一致性.)则称 $\{\varphi_n\}$ 收敛于函数 $\varphi \in K$.

在其中定义了上述收敛性的线性空间 K,我们把它称为基本空间,而其元素称为基本函数.

不难叙述 K 中的这样的拓扑,K 中所给出的收敛性从属于这一拓扑. 这一拓扑由零邻域系生成,其中每一零邻域系由正连续函数的有限组 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_m$ 给定,并且由对所有的 x 满足

$$|\varphi(x)| < \gamma_0(x),\cdots,|\varphi^{(m)}(x)| < \gamma_m(x)$$

的那些属于 K 的函数组成. 请读者验证,前面所叙述的 K 中的收敛性实际上从属于这一拓扑.

习题　用 K_m 表示空间 K 的由所有在闭区间 $[-m,m]$ 外为零的函数 $\varphi \in K$ 所组成的子空间. 在空间 K_m 中令

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ |x|\leqslant m}} |\varphi^{(k)}(x)|, \quad n=0,1,2,\cdots,$$

可引入可数赋范空间的结构. 试验证在空间 K_m 中由这个范数系所生成的拓扑(它对应于序列收敛性)与在 K_m 中由前述空间 K 中的拓扑(收敛性)所诱导的拓扑(它对应于收敛性)重合. 显然 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_m \subset \cdots$,同时 $K = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$. 试证明集 $Q \subset K$ 当且仅当存在这样的 m 使得 Q 是可数赋范空间 K_m 的有界子集时对在 K 中引入的拓扑是有界的. 设 T 是空间 K 上的线性泛函,试证明下述四个条件等价:(a)泛函 T 对空间 K 的拓扑连续;(b)泛函 T 在每一个有界集 $Q \subset K$ 上有界;(c)如果 $\varphi_n \in K$ 且 $\varphi_n \to 0$(在 K 中引入的序列收敛的意义下),那么 $T(\varphi_n) \to 0$;(d)对于每一个 m,泛函 T 在子空间 $K_m \subset K$ 上的收缩 T_m 是 K_m 上的连续泛函.

---

①② 在其外函数 φ 为零的区间,对于不同的 $\varphi \in K$,可能不同.

③ 零阶导数照例应理解为函数本身.

3. 广义函数

定义 1 基本空间 K 上的任意连续泛函 $T(\varphi)$ 称为(给定在直线 $-\infty < x < \infty$ 上的)广义函数. 并且泛函的连续性理解为:如果序列 φ_n 在基本空间 K 中收敛于 φ,则 $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$.

首先,我们指出,任何在任意有限区间上可积的函数 $f(x)$ 生成某一个广义函数事实上,表达式

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

是 K 上的线性连续泛函. 这样的广义函数我们今后称为正则的,而任何其他的,即不能表为(2)式的广义函数称为奇异的.

我们来举出奇异广义函数的一些例子.

(1)"δ 函数":

$$T(\varphi) = \varphi(0).$$

这是 K 上的线性连续泛函,按照前面所引入的术语,即是广义函数. 把 $\delta(x)$ 理解为当 $x \neq 0$ 时为零,在点 $x = 0$ 变为无穷的"函数",使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

这个泛函通常记成如下形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

我们已在 §1 把 δ 函数作为定义在某个闭区间上的所有连续函数的空间上的泛函而研究过了. 然而把 δ 函数作为 K 上的泛函来研究有一定的优越性,比如说,对于它可引入导数的概念.

(2)"移位的 δ 函数". 设

$$T(\varphi) = \varphi(a).$$

这个泛函与(3)式类似,自然可记为形式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

(3)"δ 函数的导数". 与每一个 $\varphi \in K$ 对应的数是 $\varphi'(0)$. 下面我们将作些解释,为什么可把这个泛函看作是第一个例中泛函的导数.

(4) 考虑函数 $1/x$. 它在包含零点的任何区间上都不可积. 然而,对于每一个 $\varphi \in K$,积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

在柯西主值的意义下存在且有限. 事实上

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \varphi(x)\ \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)\ - \varphi(0)}{x} \mathrm{d}x + \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(0)}{x} \mathrm{d}x.$$

这里,$(-R,R)$是这样的区间,在其外 φ 变为零. 右边的第一个积分在通常的意义下存在(积分号下是连续函数),而第二个积分在主值的意义下等于零. 于是,$1/x$ 在 K 上定义了某个泛函,即广义函数. 可以证明,例 1—4 中所举出的广义函数没有一个是正则的(即不能表为如(2)式中的任何局部可积函数 f).

4. 广义函数的运算　对广义函数,即 K 上的线性连续泛函,定义了加法运算和数乘运算. 同时,显然对正则广义函数(即直线上"通常"的函数),作为广义函数(即线性泛函)的加法与函数的通常的加法相一致. 数乘也是这样.

在广义函数空间中引入极限过程的运算. 我们称广义函数序列 $\{f_n\}$ 收敛于 f,是指对每个 $\varphi \in K$,满足关系

$$(f_n,\varphi) \rightarrow (f,\varphi).$$

换句话说,广义函数序列的收敛性定义为它在 K 中每个元上的收敛性. 具有这一收敛性的广义函数空间记为 K^*.

如果 α 是无穷次可微函数,则自然地用公式

$$(\alpha f,\varphi) = (f,\alpha\varphi)$$

定义广义函数乘以 α 的积(等式右边的表达式有意义,因为 $\alpha\varphi \in K$). 所有这些运算——加法、数乘、乘以无穷次可微函数都是连续的.

我们不引入两个广义函数的积. 可以证明,如果要求这一运算是连续的,那么不可能定义这样的积,而对正则的广义函数,这与通常的函数乘法一致.

现在对广义函数定义微分运算并研究它的性质.

首先设 T 是 K 上的泛函,这泛函是由某个连续可微函数 f 确定的:

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

由公式

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

确定的泛函 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ 自然可叫做 T 的导数. 进行分部积分并考虑到每个基本函数 φ 在

某个有限区间外变为零,我们便有

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是,我们得到其中不含有 f 的导数的 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ 的表达式. 这一想法提示我们作如下定义:

定义 2 由公式

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(\varphi) = -T(\varphi')$$

定义的泛函称为广义函数 T 的导数 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$.

显然,由这个公式定义的泛函是线性的且连续,即是广义函数,类似地可定义二阶、三阶以及更高阶的导数.

在用符号 f 表示广义导数的同时,我们将用通常的符号 f' 来表示 f(在刚才定义的意义下来理解)的导数.

由广义函数的导数的定义可直接推出如下论断:

1. 任何广义函数有任意阶的导数.

2. 如果广义函数的序列 $\{f_n\}$(在广义函数收敛的意义下)收敛于广义函数 f,则 $\{f_n\}$ 的导数序列 $\{f'_n\}$ 收敛于极限函数的导数 f'. 这一事实对任意阶导数都为真.

这等价于任何由广义函数构成的收敛级数可进行任意次数的逐项微分.

现在来研究几个例子.

例 1 由前面所说的,显然如果 f 是正则的(即"真正的")函数,其导数存在且连续(或逐段连续),那么它的导数作为广义函数的导数与其通常意义下的导数一致.

例 2 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & \text{当 } x \leqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

这个函数称为赫维赛德(Heviside)函数,它定义了线性泛函:

$$(f,\varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

按照广义函数的导数定义,我们有

$$(f',\varphi) = -(f,\varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

(因为 φ 在无穷远处为零). 于是赫维赛德函数(5)的导数是 δ 函数.

例 3 由例 1 及 2 显然知,如果 f 是在点 $x_1, x_2, \cdots$ 分别有跃度 $h_1, h_2, \cdots$ 的函数,

它在其余的点上(在通常意义下)可微,那么它的(作为广义函数的)导数是通常导数f'(在导数f'存在的那些点上)与形如 $\sum_i h_i\delta(x-x_i)$ 的表达式之和.

例 4　把导数定义应用于δ函数,得其导数为一泛函,该泛函在K中每个函数上具有值$\varphi'(0)$. 而这正是我们前面称之为"δ函数的导数"的那个泛函.

例 5　研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}. \tag{6}$$

它的和是周期为2π的函数,该函数在闭区间$[-\pi,\pi]$上由公式

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & 当\ 0<x\leqslant\pi,\\ -\dfrac{\pi+x}{2}, & 当\ -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & 当\ x=0\end{cases}$$

确定. 其广义导数等于

$$-\frac{1}{2}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi). \tag{7}$$

这是某个广义函数(把它应用于任意有限支集函数$\varphi(x)$我们总是得到仅有有限个异于零的项). 另一方面,对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 逐项微分,我们得到发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx.$$

然而在广义函数收敛性的意义下这个级数是收敛的[即收敛于表达式(7)]. 于是,广义函数概念可以容许在通常意义下发散的级数和有完全确定的意义. 许多发散积分也是如此. 在量子场论和理论物理一些领域中经常碰到的就是这种情况. 其实,在用傅里叶方法解数学物理方程的初等问题时就已发生这种情况. 例如在解弦振动方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$时出现的三角级数,它仅在广义函数论的意义下有对$x$及$t$的二阶导数. 就是说,也仅在广义函数论的意义下三角级数满足方程.

5. 基本函数范围的充足性　我们已经把广义函数定义为某一个空间上的线性泛函,即无穷次可微的有限支集函数空间K上的线性泛函. 也可选任何其他的空间作为基本空间. 我们来研究把K选定为基本函数空间的一些想法. 这些想法已被应用到其他情况. 在K的元上加上有限支集性与无穷次可微的强条件后,一方面我们得到广义函数的一个更大的范围(基本空间的缩小显然导致共轭空间的扩大),而在另一方面我们得到了把分析的诸基本运算(取极限、微分)应用于广义函数的更大自

由.而同时基本函数空间 K 并不太窄.在这个空间中有充分多的元,借助它们足以区别连续函数.确切地说,设 f_1 与 f_2 是直线上两个不同的连续函数(因此它们是局部可积的).那么存在这样的函数 $\varphi \in K$,使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

实际上,置 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$.如果 $f(x)\not\equiv 0$,那么存在这样的点 x_0,使得 $f(x_0)\neq 0$.于是 $f(x)$ 在包含点 x_0 的某一个开区间 (α,β) 内保持符号不变.考虑函数

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{(\beta-x)(x-\alpha)}} & ,\text{当 } \alpha<x<\beta, \\ 0 & ,\text{对其余的 } x. \end{cases}$$

这个函数在 (α,β) 外为零,而在这个开区间内为正.此外,它有所有各阶导数,于是 $\varphi \in K$.(试验证在点 $x=\alpha$ 与 $x=\beta$ 导数存在!)同时,显然

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

于是我们便证明了,对于区分任意两个连续函数,空间 K 是足够了①.

6. 按导数求函数.广义函数类中的微分方程 微分方程是应用广义函数理论的基本领域之一.即与微分方程有关的问题在很大程度上促进了这一理论的发展.基本上是应用于偏微分方程,我们不准备在这里讨论,然而,我们在这里仅涉及由广义函数解(常)微分方程的某些简单问题.我们从最简单的形如

$$y'=f(x)$$

的方程开始($f(x)$ 是广义的或"普通"的函数),即由按其导数求该函数的问题开始.先从 $f\equiv 0$ 的情况开始.

定理 1 只有常数才是方程

$$y'=0 \tag{9}$$

(在广义函数类中)的解.

证明 方程(9)意味着对任意的基本函数 $\varphi \in K$,

$$(y',\varphi)=(y,-\varphi')=0. \tag{10}$$

考虑这样一些基本函数的集合 $K^{(1)}$,其中每一个都可以表为某个基本函数的导数.显然,$K^{(1)}$ 是 K 中的线性子空间.令 $\varphi_1(x)=-\varphi'(x)$.当 φ 遍历 K 时函数 φ_1 遍历 $K^{(1)}$,等式(10)定义了 $K^{(1)}$ 上的泛函 y.

---

① 这一论断也可推广到本质上比连续函数更为一般的函数上去,但是,为此须利用勒贝格可积性的概念,这一概念将在下一章谈到.

现在我们指出,当且仅当

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{11}$$

时基本函数 φ 属于 $K^{(1)}$,即 $K^{(1)}$ 是泛函 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 的核. 实际上,如果 $\varphi(x) = \psi'(x)$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \psi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \tag{12}$$

反之,表达式

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{13}$$

是无穷次可微函数. 如果(11)成立,则 $\psi(x)$ 是有限支集函数,其导数等于 $\varphi(x)$. 按照第三章 §1 第 6 段的结果,可把任意基本函数 $\varphi \in K$ 表为

$$\varphi = \varphi_1 + c\varphi_0 \quad (\varphi_1 \in K^{(1)}),$$

其中 φ_0 是一个固定的基本函数,它不属于 $K^{(1)}$ 且满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

为此只需令

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{且} \quad \varphi_1(x) = \varphi(x) - c\varphi_0(x).$$

于是,如果给定泛函 y 在基本函数 $\varphi_0(x)$ 上的值,那么它就在整个 K 上单值确定. 令 $(y,\varphi_0) = \alpha$,得

$$(y,\varphi) = (y,\varphi_1) + c(y,\varphi_0) = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

即广义函数 y 是常数 α,这就是所要证明的.

由此推出,如果两个广义函数 f 与 g 满足等式 $f' = g'$,则 $f - g = \text{const}$.

现在来研究方程

$$y' = f(x), \tag{14}$$

其中 $f(x)$ 是任意广义函数.

定理 2 方程(14)对每一个 $f \in K^*$ 有属于 K^* 的解.

这个解很自然地称为广义函数 f 的原函数.

证明 方程(14)表明,对每个基本函数 $\varphi \in K$

$$(y',\varphi) = (y, -\varphi') = (f,\varphi). \tag{15}$$

这个等式在 $K^{(1)}$ 的所有基本函数 φ_1 上定义了泛函 y 的值：

$$(y,\varphi_1) = \left(f, -\int_{-\infty}^{x} \varphi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right).$$

现在利用前面所得 K 中元的表示式

$$\varphi = \varphi_1 + c\varphi_0.$$

置 $(y,\varphi_0)=0$，我们从而在整个 K 上补充定义了泛函 y，即

$$(y,\varphi) = (y,\varphi_1) = \left(f, -\int_{-\infty}^{x} \varphi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right).$$

很容易验证这个泛函是线性的并且连续. 此外，它满足(14)式. 实际上，对每一 $\varphi \in K$

$$(y',\varphi) = (y, -\varphi') = \left(f, \int_{-\infty}^{x} \varphi'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) = (f,\varphi).$$

这样，对每一个广义函数 $f(x)$，方程

$$y' = f(x)$$

的解存在，即每一个广义函数都有原函数. 根据定理1，这个原函数被函数 $f(x)$ 除不计一个常数项外唯一确定.

所得到的结果很容易转到线性方程组的情形. 在这里我们仅限于相应地叙述这个结果而把证明略去.

考虑含有 n 个未知函数、n 个齐次方程的线性微分方程组

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) y_k, \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{16}$$

其中 a_{ik} 是无穷次可微的函数. 这样的方程组有某些“古典解”（即可表为“普通”的，同时又是无穷次可微的函数的解）. 可以证明，在广义函数类中，方程组(16)没有任何新的解.

对于非齐次方程组

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + f_i \tag{17}$$

（其中 f_i 是广义函数，而 a_{ik} 是“普通”的无穷次可微函数），解在广义函数类中存在并且除不计齐次方程组(16)的任意解外被确定.

如果在方程组(17)中不仅 a_{ik}，而且 f_i 都是“普通”函数，则这个方程组的所有在 K^* 中的解同样是普通函数.

7. 某些推广 前面我们研究了“一元实变量”广义函数，即直线上的广义函数.

基于这种基本思想，可引入在有界集上的广义函数，比如说，在闭区间上或圆周上的广义函数，多变量的广义函数，复变量的广义函数，等等. 最后，对于直线上的广义函数，我们在前面所给的定义远不是唯一可能的. 我们来简略地研究一下上面所列举的诸类型的广义函数中的某些广义函数.

a）*多变量函数*　在 n 维空间中考虑这样一些函数 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的总体 K^n：这些函数对所有变量有任意阶偏导数，且其中每一个函数都在某一个平行六面体

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

之外为零. 这个 K^n 是线性空间（具有通常的加法运算和数乘运算），在这个空间中可用下述方式引入收敛性：如果存在这样的平行六面体 $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i=1,2,\cdots,n$，在其外每个函数 φ_k 等于零，而在这个平行六面体内，对于每个固定的非负整数组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 成立一致收敛

$$\frac{\partial^r \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \to \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = r\right),$$

则记为 $\varphi_k \to \varphi$.

K^n 上的任何线性连续泛函称为 n 元广义函数. 任何在 n 维空间的任一有界区域可积的“普通”n 元函数 $f(x)$ 同时又是广义函数. 与此函数对应的泛函的值由公式

$$(f,\varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad (x = (x_1,\cdots,x_n), \mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n)$$

确定. 如同在 $n=1$ 的情况一样，不同的连续函数确定不同的泛函（即是不同的广义函数）.

对于 n 元广义函数，极限概念、导数概念等等可借助与一元的情况一样的方法引入. 例如，广义函数的偏导数由公式

$$\left(\frac{\partial^r f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}, \varphi(x)\right) = (-1)^r\left(f(x), \frac{\partial^r \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)$$

引入. 由此显然可见，每一个 n 元广义函数都存在任意阶偏导数.

b）*复广义函数*　现在取在直线上无穷次可微的、具有有限支集的复值函数作为基本函数. 在这样的函数的空间 $\widetilde{K}$ 上的线性泛函自然就称为复广义函数. 注意，在复线性空间中存在线性泛函与共轭线性泛函. 前者满足条件（α 是数）

$$(f,\alpha\varphi) = \alpha(f,\varphi),$$

而后者满足条件

$$(f,\alpha\varphi) = \overline{\alpha}(f,\varphi).$$

如果 $f(x)$ 是直线上普通的复值函数，那么可以用两种方式把 $\widetilde{K}$ 上的线性泛函与 f

对应：

$$(f,\varphi)_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{18_1}$$

及

$$(f,\varphi)_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{18_2}$$

也可以把两个共轭线性泛函与这个函数$f(x)$相对应，即

$${}_1(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x \tag{18_3}$$

及

$${}_2(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)\ \bar{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{18_4}$$

从四种可能中选择一种就意味着确定了一种把“普通”函数空间嵌入广义函数空间的方法. 复广义函数运算的定义与前面对实函数所作的定义类似.

c）圆周上的广义函数　研究给定在某个有界集上的广义函数有时是有益处的. 作为最简单的例子，我们来研究圆周上的函数. 对圆周上无穷次可微函数的总体，在用通常的方式定义了加法运算及数乘运算以后，我们便把它取作基本函数空间. 在这个函数空间中的函数序列$\{\varphi_n(x)\}$称为收敛的，是指如果对于每一个$k=0,1,2,\cdots$，导数序列$\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$在整个圆周上一致收敛. 因为在这里变量的整个集合（圆周）是有界的，基本函数有限支集性条件自动失去意义. 我们把这个空间上的线性泛函称为圆周上的广义函数.

圆周上的每一个普通函数都可以看作是给定在整个直线上的周期函数. 把这种想法搬到广义函数上来，可把圆周上的广义函数与周期广义函数联系起来. 同时，很自然把对任何基本函数φ满足条件

$$(f(x),\varphi(x-a)) = (f(x),\varphi(x))$$

的泛函f称为（以a为周期的）周期广义函数. 我们在前面已经提到过的函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx = -\frac{1}{2} + \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi)$$

可作为周期广义函数的例子.

d）其他的基本空间　前面，我们把直线上的广义函数定义为无穷次可微的、具有有限支集的函数空间K上的线性泛函. 然而，基本空间的这种选择不是唯一可能的. 例如，代替有限支集函数空间K，可以取这样的更宽的空间作为基本空间：它由在直线上无穷次可微的函数$\varphi(x)$组成，其中$\varphi(x)$连同其各阶导数比$1/|x|$的任何

次幂下降得更快. 确切地说,如果对任意固定的 $p,q=0,1,2,\cdots$ 存在这样的常数 $C_{p,q}$(它依赖于 p,q 与 φ),使得

$$|x^p\varphi^{(q)}(x)| < C_{p,q}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{19}$$

则认为 $\varphi(x)$ 属于这个基本函数空间,这个空间记为 S_∞. S_∞ 中的收敛性用下述方式定义:如果对于每一个 $q=0,1,\cdots$ 序列 $\{\varphi_n^{(q)}(x)\}$ 在任意一个有限区间上一致收敛,且如果在不等式

$$|x^p\varphi_n^{(q)}(x)| < C_{p,q}$$

中常数 $C_{p,q}$ 可选择得不依赖于 n,则称序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 收敛于 $\varphi(x)$.

同时,这样得到的广义函数的范围比空间 K 的情形稍微窄了一些. 例如,函数

$$f(x) = e^{x^2}$$

是 K 上的线性连续泛函,而在 S_∞ 上则不是. 选择 S_∞ 作为基本函数空间有其方便之处,例如研究广义函数的傅里叶变换时就是这样.

正如广义函数理论的发展所表明的那样,一般并不需要将它本身一劳永逸地用基本空间的某种固定选择联系起来,而根据所研究问题的范围采取不同的作法是适宜的. 并且,毕竟本质的要求在于一方面使基本函数"充分地多"(以使借助于这些基本函数来区分"普通"函数,或者更准确地说,区分正则函数),而另一方面要使这些基本函数具有充分的光滑性.

习题　试验证,在空间 S_∞ 中,例如可以令

$$\|\varphi\|_n = \sum_{p+q=n} \sup_{\substack{-\infty<x<\infty\\ 0\leqslant i\leqslant p\\ 0\leqslant j\leqslant q}} |(1+|x|^i)\varphi^{(j)}(x)|$$

而引入可数赋范空间的结构,并验证,在前面所定义的意义下在 S_∞ 中收敛的序列,在用这种范数确定的拓扑中也收敛.

§5. 线性算子

1. 线性算子的定义与例　设 E 与 E_1 是两个线性拓扑空间,称满足条件

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$$

的映射

$$y = Ax \quad (x \in E, y \in E_1)$$

为从 E 作用到 E_1 内的线性算子. 所有使映射 A 有定义的 $x \in E$ 的总体 D_A 称为算子 A 的定义域. 一般地说,不能假定 $D_A = E$,然而我们总假定 D_A 是线性流形,即如果 $x, y \in D_A$,则对于任何 α,β, $\alpha x + \beta y \in D_A$.

如果对于点 $y_0 = Ax_0(x_0 \in D_A)$ 的任意邻域 V 存在点 x_0 的这样一个邻域 U,使得当 $x \in U \cap D_A$ 时,$Ax \in V$,则称算子 A 在点 x_0 连续. 如果算子 A 在每一点 $x \in D_A$ 都连续,则称算子 A 连续.

当 E 和 E_1 是赋范空间时,这个定义与下述定义等价:如果对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在这样的 $\delta > 0$,使得从不等式

$$\| x' - x'' \| < \delta \quad (x', x'' \in D_A)$$

可推出

$$\| Ax' - Ax'' \| < \varepsilon,$$

则称算子 A 是连续的.

使 $Ax = 0$ 的 $x \in E$ 的集合称为线性算子 A 的核,并记为 Ker$A$. 对于某个 $x \in D_A$ 使得 $y = Ax$ 的 $y \in E_1$ 的集合称为线性算子 A 的象,并记为 ImA. 就像核一样,线性算子的象也是线性流形. 如果算子连续且 $D_A = E$,则 Ker$A$ 是子空间,即 Ker$A$ 是闭的. 至于线性连续算子的象,甚至当 $D_A = E$ 时,它也不一定是 E_1 中的子空间.

在本章一开始所引入的线性泛函的概念是线性算子的特殊情况. 即线性泛函是从给定的空间到实直线 $\mathbf{R}$ 上的线性算子. 当 $E_1 = \mathbf{R}$ 时,算子的线性性质与连续性的定义变成先前对泛函引入的相应定义.

正是这样一系列下面将要对于线性算子来叙述的后继概念与事实乃是本章 §1 已阐述的适用于线性泛函的诸结果的十分自然的推广.

线性算子的例.

例 1 设 E 是线性拓扑空间,对所有的 $x \in E$ 令

$$Ix = x.$$

这个算子把空间中每个元变到其自身,称为单位算子.

例 2 设 E 与 E_1 是任意线性拓扑空间且对所有 $x \in E$

$$Ox = 0$$

(这里 0 是空间 E_1 中的零元),则 O 称为零算子.

例 3 把有限维空间变为有限维空间的线性算子的一般形式. 设 A 是把具有基 $e_1, \cdots, e_n$ 的 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 映入具有基 $f_1, \cdots, f_m$ 的 m 维空间 $\mathbf{R}^m$ 的线性算子. 如果 x 是 $\mathbf{R}^n$ 中任意一个向量,那么

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

根据算子 A 的线性性质

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i.$$

于是,如果知道了算子 A 把基向量 $e_1,\cdots,e_n$ 变为什么,则算子 A 就给定了. 考虑向量 Ae_i 对基 $f_1,\cdots,f_m$ 的展开,有

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} f_k.$$

由此很明显,算子 A 由系数矩阵 $\| a_{ki} \|$ 确定. 空间 $\mathbf{R}^n$ 在 $\mathbf{R}^m$ 内的象乃是线性子空间,其维数显然等于矩阵 $\| a_{ki} \|$ 的秩,即在任何情况下其维数都不超过 n. 注意,任何在有限维空间中所给定的算子自然是连续的.

例 4　研究希尔伯特空间 H 和在 H 内的子空间 H_1. 将 H 展成子空间 H_1 与其正交补的直和,即把每个元 $h \in H$ 表为

$$h = h_1 + h_2 \quad (h_1 \in H_1, h_2 \in H_2)$$

的形式,令 $Ph = h_1$. 这个算子自然称为 H 到 H_1 上的正交射影算子. 不难验证其线性性质与连续性.

例 5　在闭区间$[a,b]$上连续函数的空间内考虑由公式

$$\psi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

定义的算子,其中 $K(s,t)$ 是某个固定的二元连续函数. 函数 $\psi(s)$ 对任意连续函数 $\varphi(t)$ 是连续的,所以算子(1)实际上把连续函数空间变到自身. 其线性性质是显然的. 为了谈论它的连续性,必须预先指出在我们的连续函数空间考虑怎样的拓扑. 建议读者在下述情况下证明算子的连续性:a) 当考虑空间 $C[a,b]$,即具有范数 $\| \varphi \| = \max |\varphi(t)|$ 的连续函数空间;b) 当考虑 $C_2[a,b]$,即 $\| \varphi \| = \left(\int_a^b \varphi^2(t)\,\mathrm{d}t \right)^{1/2}$.

例 6　在这个连续函数空间中考虑算子

$$\psi(t) = \varphi_0(t)\varphi(t),$$

其中 $\varphi_0(t)$ 是固定的连续函数. 这个算子的线性性质是显然的.(在上面例子中所引入的范数下试证明算子的连续性.)

例 7　对于分析,线性算子的一个重要例子是微分算子. 可以在不同的空间来研究这个算子.

a) 考虑连续函数空间 $C[a,b]$ 与在其中作用的算子

$$Df(t) = f'(t).$$

这个算子(我们认为这个算子是从 $C[a,b]$ 仍然到 $C[a,b]$ 内作用的算子)显然不能在整个连续函数空间上定义,而仅能在具有连续导数的函数的线性流形上定义. 算

子 D 是线性的,但不是连续的. 例如从序列

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$$

收敛于零(在 $C[a,b]$ 的度量下),而序列

$$D\varphi_n = \cos nt$$

不收敛这一例子,上述论断是明显的.

b) 可以把微分算子考虑为从具有范数

$$\|\varphi\|_1 = \max|\varphi(t)| + \max|\varphi'(t)|$$

的,$[a,b]$ 上连续可微函数空间 C^1 到空间 $C[a,b]$ 内作用的算子. 在这种情形中,算子 D 是线性的、连续的且把整个 C^1 映到整个 $C[a,b]$ 上.

c) 把微分算子考虑为从 C^1 到 $C[a,b]$ 内作用的算子不很方便,因为虽然这时我们得到了定义在整个空间上的连续算子,但是并非对 C^1 中的任意函数都可应用这个算子两次. 在比 C^1 还更窄的空间中,即在闭区间 $[a,b]$ 上的无穷次可微函数空间 C^∞ 内考虑微分算子是方便的. 在这个空间中,拓扑由可数范数系

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ a\leqslant t\leqslant b}} |\varphi^{(k)}(t)|$$

给定. 微分算子把整个这空间变到自身,且易于验证,微分算子在此空间上连续.

d) 无穷次可微函数构成极窄的类. 广义函数本质上使得在更宽的空间中把微分算子同时考虑为连续算子成为可能. 上节已经讲过如何定义广义函数的微分. 从那里所讲的很清楚,微分算子是广义函数空间中的线性算子,同时这个算子在下述意义下是连续的:从广义函数序列 $\{f_n(t)\}$ 收敛于 $f(t)$ 可推出 $\{f_n(t)\}$ 的导数序列收敛于广义函数 $f(t)$ 的导数.

2. 连续性与有界性 从 E 作用到 E_1 内的线性算子,如果定义在整个 E 上并把每一个有界集仍变为有界集,则称这个线性算子是有界的. 在线性算子的有界性与连续性之间有着紧密的联系,即下述论断成立.

Ⅰ. 任何线性连续算子有界.

实际上,设 $M\subset E$ 是有界集,而集 $AM\subset E_1$ 无界. 那么在 E_1 中存在这样的零邻域 V,使得集 $\frac{1}{n}AM$ 没有一个元包含在 V 中. 可是这样一来存在这样的序列 $x_n \in M$,使得没有一个元 $\frac{1}{n}Ax_n$ 属于 V,于是我们得到①,在 E 中 $\frac{1}{n}x_n\to 0$,而序列 $\left\{\frac{1}{n}Ax_n\right\}$ 在 E_1 中不收敛于 0,这与算子 A 的连续性矛盾.

---

① 参看第三章 §5 第 1 段中的习题 1.

Ⅱ. 如果 A 是从 E 作用到 E_1 内的线性有界算子，且在空间 E 内第一可数性公理成立，则算子 A 连续.

实际上，如果 A 不连续，则在 E_1 中存在这样的零邻域 V，以及 E 中这样的确定零邻域系 $\{U_n\}$，其中 $U_{n+1}\subset U_n$，且对每一个 n 存在这样的 $x_n\in\frac{1}{n}U_n$，使得 $Ax_n\notin nV$. E 中的序列 x_n 有界（甚至趋于零），而序列 Ax_n 在 E_1 中却无界（因为它不含于集 nV 中的任何一个）. 这样. 如果算子 A 不连续，而在 E 中又成立第一可数性公理，则 A 无界.

论断证毕.

于是，对于给定在满足第一可数性公理的空间（特别是，任何赋范空间与可数赋范空间属于这一种情况）上的算子，有界性等价于连续性.

前一段例 1—6 中所引入的算子都是连续的. 根据刚刚证明过的论断 Ⅰ，所列举的这些算子都是有界的.

如果 E 和 E_1 是赋范空间，那么由 E 到 E_1 内作用的算子 A 有界的条件可叙述如下：算子 A 如果把任何球变为有界集，则称算子 A 有界. 根据算子的线性性质，这一条件又可这样叙述：如果存在常数 C 使得对任何 $f\in E$ 有

$$\|Af\|\leqslant C\|f\|,$$

则算子 A 有界. 满足这个不等式的 C 中最小者称为算子 A 的范数并记为 $\|A\|$.

定理 1　对任意从赋范空间作用到赋范空间内的有界算子 A，

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{2}$$

证明　使用记号 $\alpha=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|$. 根据 A 的线性性质，下列等式成立：

$$\alpha = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

所以对任意元 x

$$\|Ax\|/\|x\|\leqslant\alpha,$$

即

$$\|Ax\|\leqslant\alpha\|x\|.$$

由此得出

$$\|A\| = \inf C\leqslant\alpha.$$

其次，对任意的 $\varepsilon>0$，存在这样的元 $x_\varepsilon\neq 0$，使得

$$\alpha-\varepsilon\leqslant\|Ax_\varepsilon\|/\|x_\varepsilon\|$$

或

$$(\alpha-\varepsilon)\|x_\varepsilon\| \leqslant \|Ax_\varepsilon\| \leqslant C\|x_\varepsilon\|.$$

所以

$$\alpha-\varepsilon \leqslant \inf C = \|A\|.$$

由于 ε 的任意性,$\alpha \leqslant \|A\|$. 因此, $\|A\| = \alpha$.

3. 算子的和与积

定义 1 设 A 与 B 是两个从线性空间 E 作用到空间 E_1 内的线性算子. 我们称使元

$$y = Ax + Bx \in E_1$$

与元 $x \in E$ 对应的算子 C 为算子 A 与 B 的和 $A+B$. 这个算子在属于算子 A 与 B 的定义域的交 $D_A \cap D_B$ 的所有元上有定义.

易于验证,$C=A+B$ 是线性算子. 如果 A 与 B 连续,则 C 也连续.

如果 E 和 E_1 是赋范空间,而算子 A 与 B 有界,则 $A+B$ 也有界,同时

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|. \tag{3}$$

事实上,对任何 x

$$\begin{aligned}\|(A+B)x\| &= \|Ax+Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \\ &\leqslant (\|A\|+\|B\|)\|x\|,\end{aligned}$$

由此便得出(3)式.

定义 2 设 A 与 B 是线性算子,同时 A 由空间 E 作用到空间 E_1 内,而 B 由空间 E_1 作用到空间 E_2 内,使 E_2 中的元 $z=B(Ax)$ 对应于元 $x \in E$ 的算子 C 称为算子 A 与 B 的积 BA. 算子 $C=BA$ 的定义域 D_C 由使 $Ax \in D_B$ 的那些 $x \in D_A$ 组成. 显然算子 BA 是线性的. 如果 A 与 B 连续,则 C 也连续.

习题 证明:如果 D_A 与 D_B 是线性流形,则 D_C 也是线性流形.

如果 A 与 B 是于赋范空间内作用的有界算子,则算子 BA 有界,且

$$\|BA\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|. \tag{4}$$

事实上,

$$\|B(Ax)\| \leqslant \|B\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|, \tag{5}$$

由此便得出(4)式.

三个或更多个算子的和与积可逐次加以定义. 这两种运算是结合的.

算子 A 乘以数 k 的积 kA 定义为使元 kAx 对应于元 x 的算子.

定义在整个 E 上并把 E 映入 E_1(其中 E 和 E_1 是确定的线性拓扑空间)的所有线性连续算子的总体 $\mathscr{L}(E,E_1)$，对于前面引入的加法运算与数乘运算，构成线性空间. 如果 E 和 E_1 是赋范空间，则 $\mathscr{L}(E,E_1)$ 是赋范空间(具有前面所给定的算子范数).

习题　设 E 是赋范空间，而 E_1 是完备赋范空间. 那么:a)赋范空间 $\mathscr{L}(E,E_1)$ 是完备的;b)如果 $A_k \in \mathscr{L}(E,E_1)$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| < \infty$，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛于某个算子 $A \in \mathscr{L}(E,E_1)$ 且

$$\|A\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|. \tag{6}$$

4. 逆算子，可逆性　设 A 是从 E 作用于 E_1 内的算子，D_A 是定义域，而 $\operatorname{Im}A$ 是这个算子的象.

定义 3　如果对任意 $y \in \operatorname{Im}A$，方程

$$Ax = y$$

有唯一解，则称算子 A 是可逆的.

如果 A 可逆，那么对于每一个 $y \in \operatorname{Im}A$ 可对应唯一的元 $x \in D_A$，x 是方程 $Ax = y$ 的解. 实现这一对应的算子称为 A 的逆，记为 A^{-1}.

定理 2　线性算子 A 的逆算子 A^{-1} 也是线性的.

证明　首先指出，算子 A 的象 $\operatorname{Im}A$，即 $D_{A^{-1}}$ 是线性流形. 设 $y_1, y_2 \in \operatorname{Im}A$. 只需验证，下列等式成立:

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2. \tag{7}$$

设 $Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_2$. 根据 A 的线性性质有

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2. \tag{8}$$

按逆算子的定义

$$A^{-1} y_1 = x_1, A^{-1} y_2 = x_2.$$

由此，将两个等式分别乘以 α_1 和 α_2 并相加便得

$$\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

另一方面，从(8)式及从逆算子的定义推出

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2).$$

此式连同上面一式给出

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2.$$

定理 3(关于逆算子的巴拿赫定理)　设 A 是把巴拿赫空间 E 一对一地映到巴

拿赫空间 E_1 上的线性有界算子,则逆算子 A^{-1} 有界.

为了证明它,需要如下引理.

引理 设 M 是巴拿赫空间 E 中的处处稠密集. 则任意非零元 $y \in E$ 可展为级数

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots,$$

其中 $y_k \in M$ 且 $\| y_k \| \leqslant 3 \| y \| /2^k$.

证明 元 y_k 是逐次构造的. 选 y_1 使得

$$\| y - y_1 \| \leqslant \| y \| /2. \tag{9}$$

这是可能的,因为不等式(9)定义了一个半径为 $\| y \| /2$,中心在 y 点的球,在此球内部应当存在 M 的元(M 在 E 中处处稠密). 选 $y_2 \in M$,使 $\| y - y_1 - y_2 \| \leqslant \| y \| /4$,选 y_3 使得 $\| y - y_1 - y_2 - y_3 \| \leqslant \| y \| /8$ 且一般地选 y_n 使 $\| y - y_1 - y_2 - \cdots - y_n \| \leqslant \| y \| /2^n$. 这样的选法总是可能的,因为 M 在 E 中处处稠密,根据元 y_k 的选择,当 $n \to \infty$

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| \to 0,$$

即级数 $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ 收敛于 y. 我们来估计元 y_k 的范数:

$$\| y_1 \| = \| y_1 - y + y \| \leqslant \| y_1 - y \| + \| y \| \leqslant 3 \| y \| /2,$$

$$\begin{aligned} \| y_2 \| &= \| y_2 + y_1 - y + y - y_1 \| \leqslant \| y - y_1 - y_2 \| + \| y - y_1 \| \\ &\leqslant 3 \| y \| /4. \end{aligned}$$

最后,

$$\begin{aligned} \| y_n \| &= \| y_n + y_{n-1} + \cdots + y_1 - y + y - y_1 - \cdots - y_{n-1} \| \\ &\leqslant \| y - y_1 - \cdots - y_n \| + \| y - y_1 - \cdots - y_{n-1} \| \\ &\leqslant 3 \| y \| /2^n. \end{aligned}$$

引理证毕.

定理 3 的证明 在空间 E_1 中考虑集 M_k——它是这样一些 y 的总体,对 y 成立不等式 $\| A^{-1} y \| \leqslant k \| y \|$. 空间 E_1 的任何元都落到某个 M_k 中,即 $E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. 按照贝尔定理(第二章 §3 第 3 段定理 2),至少有一个 M_k,比如 M_n 在某个球 B 中稠密. 在球 B 内选择中心为属于 M_n 的点的球层 P,层 P 是满足下述不等式的点 z 的总体:$\beta < \| z - y_0 \| < \alpha$,其中 $0 < \beta < \alpha$,$y_0 \in M_n$.

移动球层 P,使其中心落在坐标原点,便得到球层 $P_0=\{z:0<\beta<\|z\|<\alpha\}$.

我们证明,有某个集 M_N 在 P_0 中稠密. 设 $z\in P\cap M_n$,则 $z-y_0\in P_0$ 且

$$\begin{aligned}\|A^{-1}(z-y_0)\| &\leqslant \|A^{-1}z\|+\|A^{-1}y_0\|\leqslant n(\|z\|+\|y_0\|)\\ &\leqslant n(\|z-y_0\|+2\|y_0\|)\\ &= n\|z-y_0\|\left(1+\frac{2\|y_0\|}{\|z-y_0\|}\right)\\ &\leqslant n\|z-y_0\|(1+2\|y_0\|/\beta).\end{aligned}\tag{10}$$

量 $n(1+2\|y_0\|/\beta)$ 不依赖于 z. 令①

$$N=1+n[1+2\|y_0\|/\beta].$$

于是根据(10),$z-y_0\in M_N$,而由 M_n 在 P 中稠密推出 M_N 在 P_0 中稠密.

考虑 E_1 中任意非零元 y. 总可选取 λ 使 $\beta<\|\lambda y\|<\alpha$,即 $\lambda y\in P_0$. 因为 M_N 在 P_0 中稠密,可以构造收敛于 λy 的序列 $y_k\in M_N$. 于是序列 $\frac{1}{\lambda}y_k$ 收敛于 y. 显然,如果 $y_k\in M_N$,则对任意实数 $\lambda\neq 0$,$\frac{1}{\lambda}y_k\in M_N$. 这样一来,$M_N$ 在 $E_1/\{0\}$ 内稠密,所以也在 E_1 内稠密.

考虑非零元 $y\in E_1$. 按已证明的引理,可把 y 展成 M_N 中的元的级数:

$$y=y_1+y_2+\cdots+y_k+\cdots,$$

同时 $\|y_k\|<3\|y\|/2^k$.

在空间 E 中考虑由元 y_k 的原象,即元 $x_k=A^{-1}y_k$ 所组成的级数.

这个级数收敛于某个元 x,因为成立不等式

$$\|x_k\|=\|A^{-1}y_k\|\leqslant N\|y_k\|<3N\|y\|/2^k.$$

同时

$$\|x\|\leqslant\sum_{k=1}\|x_k\|\leqslant 3N\|y\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=3N\|y\|.$$

根据级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的收敛性与算子 A 的连续性,可将 A 逐项地应用于这个级数. 我们得

$$Ax=Ax_1+Ax_2+\cdots=y_1+y_2+\cdots=y.$$

---

① 方括号[　]表示一个数的整数部分.

由此 $x = A^{-1}y$. 此外,

$$\| A^{-1}y \| = \| x \| \leqslant 3N \| y \|.$$

因为估计式对任意 $y \neq 0$ 为真,于是算子 A^{-1} 有界.

我们来举出这个定理的若干重要的推论. 首先举出这个定理在 A 不是一对一映射情形的自然推广.

推论 1(开映射定理) 巴拿赫空间 E 到(整个)巴拿赫空间 E_1 上的线性连续映射 A 是开的.

这一点可由上述已证明过的定理及下述引理推出.

引理 设 E 为巴拿赫空间,而 L 是它的某个闭子空间. 由空间 E 到商空间 E/L 上的映射 B 是开的,其中 E/L 是使包含 $x \in E$ 的剩余类与 x 对应的商空间.

实际上,设 $Z = E/L$, 而 G 是 E 中的开集且 $\Gamma = BG$. 设 $z_0 \in \Gamma$. 则存在属于 $B^{-1}z_0 \cap G$ 的元 x_0. 现在设 $U(x_0)$ 是点 x_0 的 ε - 邻域,它全部含于 G 中,设 z 是点 $z_0 \in \Gamma$ 的 ε - 邻域中的任意元,即 $\| z - z_0 \| < \varepsilon$. 按照商空间中范数的定义,这表示存在这样的元 $x \in B^{-1}z$,使得 $\| x - x_0 \| < \varepsilon$,即 $x \in U(x_0) \subset G$. 于是 $z \in BG = \Gamma$,即点 z_0 的 ε - 邻域包含在 Γ 内. 因此,Γ 是开的. 引理证毕.

把从空间 E 到空间 E_1 上的映射 A 表为从空间 E 到空间 $E/\mathrm{Ker}A = Z$ 上的映射 B(根据引理它是开的)和从空间 Z 到空间 E_1 上的一对一映射 C(根据定理 3,它是开的)迭加后,我们得知 A 是开的.

推论 2(拼三组引理) 设 E, E_1, E_2 是巴拿赫空间,A, B 分别是从 E 到 E_1 内和从 E 到 E_2 内的映射,同时 B 把 E 映射到整个 E_2 上(即 $\mathrm{Im}B = E_2$). 如果这时有

$$\mathrm{Ker}A \supset \mathrm{Ker}B, \tag{11}$$

则存在把 E_2 映入 E_1 内的线性连续算子 C,使 $A = CB$.

这可用如下的图解形式地表示:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ker}B & \to & E & \xrightarrow{B} & E_2 \\ \cap & & \| & & \downarrow C \\ \mathrm{Ker}A & \to & E & \xrightarrow{A} & E_1 \end{array}$$

事实上,对于每个元 $z \in E_2$ 考虑它的全原象 $B^{-1}z \in E$. 由条件(11)推出,属于 $B^{-1}z$ 的所有元 x 由算子 A 变成同一个元 y. 我们把这个元 y 对应于元 z. 所得到的算子 C 把 E_2 映入 E_1 内,并且显然算子是线性的. 算子 C 又是连续的(从而是有界算子). 事实上,如果 G 是 E_1 中的开集,则它在映射 C 下的全原象 $C^{-1}G$ 可记为 $B(A^{-1}G)$. 根据算子 A 的连续性,$A^{-1}G$ 是开的. 于是根据推论 1,$B(A^{-1}G)$ 也是开的.

习题 1 设 E 和 E_1 是赋范空间,A 为从 E 作用到 E_1 内的线性算子,A 的定义域 $D_A \subset E$ 为线性流形. 如果由条件 $x_n \in D_A, x_n \to x, Ax_n \to y$ 推出 $x \in D_A$ 及 $Ax = y$,则称算子 A 是闭的. 试证明,任何

有界算子都是闭的.

习题 2 考虑空间 E 与 E_1 的直积 $E\times E_1$，即由所有可能的点对 $[x,y]$，$x\in E,y\in E_1$，并赋以范数 $\|[x,y]\|=\|x\|+\|y\|_1$（$\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 分别是 E 和 E_1 中的范数）所得的线性赋范空间. 被称为算子 A 的图象的集合 $G_A=\{[x,y],x\in D_A,y=Ax\}\subset E\times E_1$ 可与算子 A 相对应. 试验证 $E\times E_1$ 中的线性流形 G_A 是闭的当且仅当算子 A 是闭的. 试证明，如果 E 和 E_1 是巴拿赫空间，而算子 A 定义在整个 E 上且是闭的，则算子 A 有界（关于闭图象的巴拿赫定理）.

提示 把定理 3 应用于由 G_A 作用到 E 内的算子

$$P:[x,Ax]\to x.$$

习题 3 设 E 和 E_1 是完备的可数赋范空间. 试证明，如果 A 是一对一地把 E 映到 E_1 上的线性连续算子，则逆算子 A^{-1} 连续. 叙述并证明对于可数赋范空间的闭图象定理.

考虑把巴拿赫空间 E 映入巴拿赫空间 E_1 内的有界线性算子 A 的集 $\mathscr{L}(E,E_1)$. 这个集是一巴拿赫空间. 从这个空间中可分出一个把 E 映到整个 E_1 上的、并具有有界逆算子的算子集 $\mathscr{G}\mathscr{L}(E,E_1)$. 这个集在 $\mathscr{L}(E,E_1)$ 中是开的. 即下述定理是正确的.

定理 4 设 $A_0\in\mathscr{G}\mathscr{L}(E,E_1)$，且设 ΔA 是 $\mathscr{L}(E,E_1)$ 中的任意算子，它满足 $\|\Delta A\|<1/\|A_0^{-1}\|$. 则算子 $(A_0+\Delta A)^{-1}$ 存在且有界，即

$$A=A_0+\Delta A\in\mathscr{G}\mathscr{L}(E,E_1).$$

证明 固定任意元 $y\in E_1$，考虑由空间 E 到自身的映射 B，B 由下述公式定义：

$$Bx=A_0^{-1}y-A_0^{-1}\Delta Ax.$$

由条件 $\|\Delta A\|<\|A_0^{-1}\|^{-1}$ 得出，映射 B 是压缩映射. 因为 E 是完备的，于是映射 B 存在唯一的不动点：

$$x=Bx=A_0^{-1}y-A_0^{-1}\Delta Ax.$$

由此

$$Ax=A_0x+\Delta Ax=y.$$

如果 $Ax'=y$，则 x' 也是映射 B 的不动点，因此 $x'=x$. 这样一来，对任何 $y\in E_1$，方程 $Ax=y$ 在 E 中有唯一解，即算子 A 具有逆算子 A^{-1}，它定义在整个 E_1 上. 依照定理 3，算子 A^{-1} 有界，这就是所要证明的.

定理 5 设 E 是巴拿赫空间，I 是 E 中恒等算子，而 A 是将 E 映为自身的有界线性算子，且 $\|A\|<1$. 则算子 $(I-A)^{-1}$ 存在、有界且可表为

$$(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k. \tag{12}$$

证明 算子 $(I-A)^{-1}$ 的存在性及有界性可由定理 4 推出（可是这也可由下面引用的推理得出）.

因为 $\|A\|<1$,所以 $\sum_{k=0}^{\infty}\|A^k\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k<\infty$. 空间 E 是完备的,所以由级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\|A^k\|$ 的收敛性推出级数和 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 是有界线性算子. 对任意 n 有

$$(I-A)\sum_{k=0}^{n}A^k=\sum_{k=0}^{n}A^k(I-A)=I-A^{n+1}.$$

令 $n\to\infty$ 而取极限,并考虑到 $\|A^{n+1}\|\leqslant\|A\|^{n+1}\to 0$,便得

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}A^k(I-A)=I.$$

由此

$$(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k,$$

这就是所要证明的.

习题 设 A 是将巴拿赫空间 E 映到巴拿赫空间 E_1 上的有界线性算子. 试证明存在这样的常数 $\alpha>0$,使得如果 $B\in\mathscr{L}(E,E_1)$ 且 $\|A-B\|<\alpha$,则 B 把 E 映到整个 E_1 上(巴拿赫).

5. 共轭算子 考虑线性连续算子 $y=Ax$,它把线性拓扑空间 E 映入线性拓扑空间 E_1. 设 g 是定义在 E_1 上的线性泛函,即 $g\in E_1^*$,把线性泛函 g 作用于元 $y=Ax$. 容易验证,$g(Ax)$ 是定义在 E 上的线性连续泛函,用 f 来表示它. 于是,泛函 f 是空间 E^* 中的元. 对于每一个泛函 $g\in E_1^*$,都对应于一个泛函 $f\in E^*$,即得到从 E_1^* 映入 E^* 的某个算子. 这个算子称为与算子 A 共轭的算子并记为 A^*.

用符号 (f,x) 表示泛函 f 在元 x 上的值,我们得到,$(g,Ax)=(f,x)$ 或

$$(g,Ax)=(A^*g,x).$$

这个关系可取作共轭算子的定义.

例 有限维空间的共轭算子 设实 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 被算子 A 映入(m 维)空间 $\mathbf{R}^m$,设 $\|a_{ij}\|$ 是这个算子的矩阵. 映射 $y=Ax$ 可记为等式组的形式:

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

而泛函 $f(x)$ 可记为如下形式:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}f_jx_j.$$

由等式

$$f(x)=g(Ax)=\sum_{i=1}^{m}g_iy_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}g_ia_{ij}x_j=\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{m}g_ia_{ij}$$

得到$f_j = \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$. 因为$f = A^* g$,由此推出,算子$A^*$可由算子$A$的矩阵的转置矩阵给出.

由定义立即可得出共轭算子的下述性质:

1. 算子A^*是线性的.
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$.
3. 如果k是数,则$(kA)^* = kA^*$.

如果A是从E到E_1中的连续算子,则A^*是从(E_1^*, b)到(E^*, b)中的连续算子(试验证之!). 如果E和E_1是巴拿赫空间,则这一论断可以用下述方式更准确地表述:

定理 6　如果A是把巴拿赫空间E映入巴拿赫空间E_1的有界线性算子,则

$$\| A^* \| = \| A \|.$$

证明　根据算子范数的性质有

$$|(A^* g, x)| = |(g, Ax)| \leqslant \| g \| \cdot \| A \| \cdot \| x \|.$$

由此,$\| A^* g \| \leqslant \| A \| \cdot \| g \|$. 因此

$$\| A^* \| \leqslant \| A \|. \tag{13}$$

设$x \in E$, $Ax \neq 0$. 令$y_0 = \dfrac{Ax}{\| Ax \|} \in E_1$. 显然,$\| y_0 \| = 1$. 根据哈恩－巴拿赫定理的推论,存在这样的泛函$g$,$\| g \| = 1$且$(g, y_0) = 1$,即$(g, Ax) = \| Ax \|$. 由关系式

$$\| Ax \| = (g, Ax) = |(A^* g, x)| \leqslant \| A^* g \| \cdot \| x \|$$

$$\leqslant \| A^* \| \cdot \| g \| \cdot \| x \| = \| A^* \| \cdot \| x \|$$

得$\| A \| \leqslant \| A^* \|$,连同(13)式给出

$$\| A^* \| = \| A \|.$$

定理证毕.

习题　设E和E_1是自反的巴拿赫空间,$A \in \mathscr{L}(E, E_1)$. 证明$A^{**} = A$.

下述论断是关于逆算子的巴拿赫定理的一个有用的推论.

引理(关于算子核的零化子的引理)　设A是线性连续算子,它把巴拿赫空间E映到整个巴拿赫空间E_1上. 则

$$(\mathrm{Ker} A)^{\perp} = \mathrm{Im} A^*. \tag{14}$$

事实上,我们可先验证包含关系

$$(\mathrm{Ker} A)^{\perp} \supset \mathrm{Im} A^*. \tag{15}$$

如果$f \in \mathrm{Im}A^*$,则存在这样的元$g \in E_1^*$,使得$f = A^*g$,对所有的$x \in \mathrm{Ker}A$有

$$(f,x) = (A^*g,x) = (g,Ax) = 0, \text{即} f \in (\mathrm{Ker}A)^{\perp}.$$

现在证明相反的包含关系成立:

$$(\mathrm{Ker}A)^{\perp} \subset \mathrm{Im}A^*. \tag{16}$$

设$f \in (\mathrm{Ker}A)^{\perp}$. 于是对于映射

$$f:\ E \to R \quad \text{及} \quad A:\ E \to E_1$$

拼三组引理(推论2)的条件都满足. 所以存在这样的元$g \in E_1^*$,使得$(f,x) = (g,Ax)$,即$f = A^*g$. 从而包含关系(16)成立,这就表示已经证明了等式(14).

6. 欧几里得空间中的共轭算子. 自共轭算子 我们来研究,当A是希尔伯特空间H(实的或复的)中有界算子的情形. 根据关于希尔伯特空间中线性连续泛函一般形式的定理,对于每一个$y \in H$,使之对应线性泛函

$$(\tau y)(x) = (x,y)$$

的映射τ是由空间H到整个共轭空间H^*上的同构(如果H是复的,则是共轭同构). 设A^*是与算子A共轭的算子. 显然,映射$\tilde{A}^* = \tau^{-1}A^*\tau$是在$H$中作用的有界线性算子. 易见,对于任意$x,y \in H$

$$(Ax,y) = (x,\tilde{A}^*g).$$

因为$\|A^*\| = \|A\|$,而映射τ及τ^{-1}是等距的,于是$\|\tilde{A}^*\| = \|A\|$.

不言而喻,对于实或复的有限维欧几里得空间,上面所说的结果也成立.

我们作如下约定. 如果R是(有限维或无穷维的)欧几里得空间,则把前面所定义过的,于空间R中作用的算子$\tilde{A}^*$称为于同一空间R中作用的算子A的共轭算子.

应当强调,这个定义不同于在任意巴拿赫空间E中的共轭算子的定义. 按照后者,共轭算子A^*作用于共轭空间E^*. 区别于算子A^*,有时把算子$\tilde{A}^*$称为埃尔米特(Hermite)共轭算子. 为了不使术语和表示复杂化,我们将以A^*代替$\tilde{A}^*$,且说成共轭算子. 然而要记住,在欧几里得空间的情况,共轭算子总是理解为本段所指的意义.

显然,在欧几里得空间R中与A共轭的算子可以定义为这样的算子:对于任意的$x,y \in R$,它满足等式.

$$(Ax,y) = (x,A^*y).$$

因为算子A和A^*作用于同一个空间,有可能成立等式$A = A^*$. 在欧几里得空间(特别在希尔伯特空间)中我们可分出重要的一类算子.

定义 4 作用于欧几里得空间 R 中的有界线性算子 A,如果有 $A=A^*$,即如果对所有的 $x,y\in R$

$$(Ax,y)=(x,Ay),$$

则称 A 是自共轭算子.

我们指出与算子 A 共轭的算子 A^* 的如下重要性质. 设 R_1 是欧几里得空间 R 的子空间,如果由 $x\in R_1$ 推出 $Ax\in R_1$,则称 R_1 是对算子 A 的不变子空间. 如果子空间 R_1 是对于 A 的不变子空间,则 R_1 的正交补 $R_1^{\perp}$ 是对于 A^* 的不变子空间. 事实上,如果 $y\in R_1^{\perp}$,则对所有 $x\in R_1$ 有

$$(x,A^*y)=(Ax,y)=0,$$

因为 $Ax\in R_1$. 特别,如果 A 是自共轭算子,则对于它的任意不变子空间的正交补本身,也是对于 A 的不变子空间.

习题 试证明,如果 A 与 B 是欧几里得空间中的有界线性算子,则成立如下等式:

$$(\alpha A+\beta B)^*=\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*,$$

$$(AB)^*=B^*A^*,$$

$$(A^*)^*=A,$$

$$I^*=I\quad(I\text{是单位算子}).$$

7. 算子的谱. 预解式① 在算子的理论中,恐怕未必能指出比谱的概念更为重要的概念了. 我们首先注意对于有限维空间情形谱的概念.

设 A 是 n 维空间$\mathbb{C}^n$的线性算子,如果方程

$$Ax=\lambda x$$

有非零解,则数 λ 称为算子 A 的特征值. 所有特征值的总体称为算子 A 的谱. 而所有其他的 λ 值称为正则点. 换句话说,如果算子 $A-\lambda I$ 是可逆的,则 λ 是正则点. 这时$(A-\lambda I)^{-1}$定义在整个$\mathbb{C}^n$上,并且作为有限维空间中的任意算子,它是有界的. 于是,在有限维空间中有两种可能性:

1) 方程 $Ax=\lambda x$ 有非零解,即 λ 是 A 的特征值,这时算子$(A-\lambda I)^{-1}$不存在;

2) 存在定义于整个空间上的算子$(A-\lambda I)^{-1}$,即 λ 是正则点.

但是如果 A 是定义于无穷维空间 E 中的算子,那么还有第三种可能性,即

3) 算子$(A-\lambda I)^{-1}$存在,即方程 $Ax=\lambda x$ 仅有零解,但是这个算子不是定义在整个 E 上(且可能无界).

引入下述术语. 设算子 A 作用于(复)巴拿赫空间 E,如果算子 $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$(它被称作算子 A 的预解式)定义在整个 E 上,因而有界(定理 3),则把数 λ 称为对

---

① 凡是谈到算子的谱的地方,我们都假定算子作用于复空间.

算子 A 是正则的. 所有其余的值 λ 称为算子 A 的谱. 算子 A 的任何特征值属于谱,因为如果对某 $x \neq 0$,$(A-\lambda I)x=0$,则$(A-\lambda I)^{-1}$不存在. 特征值的总体称为点谱. 谱的其余部分,即这样一些 λ 的集合:对于它们,$(A-\lambda I)^{-1}$存在,但不是定义在整个 E 上的,则这些 λ 的集合称为连续谱. 于是,每个值 λ 对于算子 A 或是正则的,或是特征值,或是连续谱的点. 算子可能存在连续谱——这是算子理论在无穷维空间的情形与有限维空间情形下的本质区别.

设 A 是作用于巴拿赫空间 E 的有界算子. 如果点 λ 是正则的,即如果算子$(A-\lambda I)^{-1}$定义在整个 E 上且有界,则对于充分小的 δ,算子$(A-(\lambda+\delta)I)^{-1}$也定义在整个 E 上且有界(定理 4),即点 $\lambda+\delta$ 也正则. 这样一来,正则点构成开集. 因此,谱,即上述集的补构成闭集.

定理 7 如果 A 是巴拿赫空间 E 中的有界线性算子且 $|\lambda| > \|A\|$,则 λ 是正则点.

证明 因为,显然

$$A-\lambda I=-\lambda\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right),$$

那么

$$R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}.$$

当 $\|A\|<|\lambda|$,这个级数收敛并给出定义在整个 E 上且有界的算子(定理 5). 换言之,算子 A 的谱包含在以零点为中心,以 $\|A\|$ 为半径的圆中.

例 1 在空间 $C[a,b]$ 中考虑由公式

$$Ax(t)=tx(t) \tag{17}$$

定义的算子 A. 则

$$(A-\lambda I)x(t)=(t-\lambda)x(t).$$

算子(17)对任意 λ 可逆,这是因为由等式

$$(t-\lambda)x(t)=0$$

得出连续函数 $x(t)$ 恒等于零. 然而对 $\lambda\in[a,b]$,由公式

$$(A-\lambda I)^{-1}x(t)=\frac{1}{t-\lambda}x(t)$$

给出的逆算子不是定义在整个 $C[a,b]$ 上并且无界(请证明之!). 这样一来,算子(17)的谱是闭区间$[a,b]$,同时没有特征值,即仅有连续谱.

例 2 在空间 l_2 考虑由下述方式所定义的算子:

$$A:(x_1,x_2,\cdots)\to(0,x_1,x_2,\cdots). \tag{18}$$

这个算子没有特征值(证明这一点!). 算子 A^{-1} 有界,但是仅在 l_2 中的子空间 $x_1=0$ 上有定义,即 $\lambda=0$ 是算子的谱点.

习题 除了 $\lambda=0$ 以外,算子(18)的谱是否包含任何其他的点?

注(1) 任何定义在复巴拿赫空间(该空间至少有一个异于零的元)上的有界线性算子有非空的谱. 存在这样的算子,其谱由唯一的点组成(例如数乘算子).

注(2) 定理 7 可用下述方式更准确地表述. 设

$$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$$

(可以证明,这个极限对任意有界算子 A 存在),于是算子 A 的谱完全位于中心在零点、半径为 r 的圆内. 量 r 称为算子 A 的谱半径.

注(3) 对应于点 μ 和 λ 的预解算子 R_μ 与 R_λ 彼此可交换并满足关系

$$R_\mu-R_\lambda=(\mu-\lambda)R_\mu R_\lambda.$$

在这个等式两端乘以 $(A-\lambda I)(A-\mu I)$ 以后,这个关系很容易验证. 由此可推出,如果 λ_0 对 A 是正则点,则在 $\lambda=\lambda_0$ 点,R_λ 对 λ 的导数存在,即极限

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{R_{\lambda_0+\Delta\lambda}-R_{\lambda_0}}{\Delta\lambda}$$

(在按算子范数收敛的意义下)存在且等于 $R_{\lambda_0}^2$.

习题 设 A 是复希尔伯特空间 H 中的有界自共轭算子. 试证明,它的谱是实轴上的闭有界子集.

§6. 紧算子

1. 紧算子的定义与例 与已经详细讨论过的有限维空间中的线性算子不同,在无穷维空间中一般线性算子的研究是极为复杂的,本质上是很难捉摸的问题. 然而某些重要类型的算子却可以比较完善地阐述. 其中最重要之一是所谓的紧算子. 这些算子一方面按其性质接近于有限维的算子(即把已知空间变到有限维空间的有界算子),可以充分详细地讨论;而从另一方面说,它在各种不同的应用中起着重要的作用,首先是在积分方程论中,这将在第九章中阐述.

定义 1 如果将巴拿赫空间 E 映入自身(或映入另一个巴拿赫空间 E_1)的算子 A 把每一个有界集变为准紧集,则算子 A 称为紧算子或全连续算子.

在有限维赋范空间中,任何线性算子都是紧算子,因为它把任意有界集变为有界集,而在有限维空间中任何有界集都是准紧的.

在无穷维空间中算子的紧性本质上是比单纯的连续性(即有界性)有更强的要求. 例如,希尔伯特空间中的单位算子是连续的,但绝不是紧的. (证明这一点依赖于下面所研究的例 1.)

研究几个例子.

例 1 设 I 是巴拿赫空间 E 中的单位算子. 我们证明如果 E 是无穷维的,则算子 I 不是紧的. 显然,为此只需证明,E 中的单位球(不言而喻,它被算子 I 变成单位球本身)不是准紧的. 这一点本身又可由下述引理推出,该引理今后我们也需要.

引理 1 设 $x_1,x_2,\cdots$ 是赋范空间 E 中的线性无关向量,E_n 是由向量 $x_1,\cdots,x_n$ 生成的子空间,则存在满足下述条件的向量序列 $y_1,y_2,\cdots$:

1) $\|y_n\|=1$; 2) $y_n\in E_n$; 3) $\rho(y_n,E_{n-1})>1/2$,

其中 $\rho(y_n,E_{n-1})$ 是向量 y_n 到 E_{n-1} 的距离,即

$$\inf_{x\in E_{n-1}}\|y_n-x\|.$$

证明 实际上,因为向量 $x_1,x_2,\cdots$ 线性无关,则 $x_n\notin E_{n-1}$ 且 $\rho(x_n,E_{n-1})=\alpha>0$. 设 x^* 是 E_{n-1} 中这样的向量,它使 $\|x_n-x^*\|<2\alpha$. 于是,因为 $\alpha=\rho(x_n,E_{n-1})=\rho(x_n-x^*,E_{n-1})$,向量

$$y_n=\frac{x_n-x^*}{\|x_n-x^*\|}$$

满足所有条件 1)—3). 同时可取 $x_1/\|x_1\|$ 为 y_1.

引理证毕.

利用这个引理,在任何无穷维赋范空间的单位球内可以构造这样的向量序列 $\{y_n\}$,使 $\rho(y_n,y_{n-1})>\frac{1}{2}$. 显然,这样的序列不可能包含任何收敛的子序列. 而这就表明准紧性不成立.

例 2 设 A 是把巴拿赫空间 E 变为其某个有限维子空间的线性连续算子. 这样的算子是紧的,因为它把任何有界子空间 $M\subset E$ 变为有限维空间的有界子集,即变为准紧集.

特别,在希尔伯特空间中,在子空间上的正交射影算子当且仅当这个子空间是有限维时是紧的.

例 3 在空间 l_2 中考虑用下述方式定义的算子 A:如果 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$,则

$$Ax=\left(x_1,\frac{1}{2}x_2,\cdots,\frac{1}{2^n}x_n,\cdots\right).\tag{1}$$

这个算子是紧的. 事实上,因为 l_2 中任何有界集都含于这个空间的某个球中,只需证明球的象是准紧的,而根据算子的线性性质,只需对于单位球验证这一点. 然而算子(1)把空间 l_2 中的单位球变为包含在基本平行六面体(参看第二章 §7,第 1 段)内的点集. 因此,这个集是完全有界的,也就意味着是准紧的.

习题 设 $Ax=(a_1x_1,a_2x_2,\cdots,a_nx_n,\cdots)$. 在数列 $\{a_n\}$ 具有怎样的条件时,这个算子在 l_2 中是

紧的?

例 4 在连续函数空间 $C[a,b]$ 中,形如

$$Ax = y(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

的算子构成一类重要的紧算子.

我们来证明如下论断的正确性:如果函数 $K(s,t)$ 在正方形 $a\leqslant s\leqslant b, a\leqslant t\leqslant b$ 上有界且它的所有间断点都位于有限条曲线

$$t = \varphi_k(s),\ k = 1,2,\cdots,n$$

上,其中 φ_k 是连续函数,则公式(2)在空间 $C[a,b]$ 中确定紧算子.

我们指出,事实上,首先在所述条件下,对闭区间 $[a,b]$ 上任意 s,积分(2)存在,即函数 $y(s)$ 有定义. 其次,设

$$M = \sup_{a\leqslant s,t\leqslant b} |K(s,t)|,$$

且设 G 是这样一些点 (s,t) 的集,使得至少对于 $k=1,2,\cdots,n$ 中的一个成立不等式

$$|t-\varphi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12Mn}.$$

开区间的并

$$G(s) = \bigcup_{k=1}^{n}\left\{t: |t-\varphi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12Mn}\right\}$$

乃是这个集合在任一直线 $s=\text{const}$ 上的迹. 设 F 是在正方形 $a\leqslant s,t\leqslant b$ 内的集合 G 的补集. 因为 F 是紧的,而函数 $K(s,t)$ 在 F 上连续,则存在这样的 $\delta>0$,使得对 F 中任意满足条件

$$|s'-s''| + |t'-t''| < \delta \tag{3}$$

的点 (s',t'),(s'',t'') 有

$$|K(s',t') - K(s'',t'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

现在来估计差 $y(s')-y(s'')$,这时假定 $|s'-s''|<\delta$. 我们有

$$|y(s') - y(s'')| \leqslant \int_a^b |K(s',t) - K(s'',t)|\,|x(t)|\,\mathrm{d}t.$$

为了估计右端的积分,我们把积分区间 $[a,b]$ 分为开区间的并 $G(s')\cup G(s'')$ 与闭区间 $[a,b]$ 的其余部分,前者记为 P,后者记为 Q. 注意到 P 是一些开区间的并,其长度之和不超过 $\varepsilon/(3M)$,便得

$$\int_P |K(s',t) - K(s'',t)||x(t)|\mathrm{d}t < \frac{2\varepsilon}{3}\|x\|.$$

显然,沿 Q 的积分可有估计

$$\int_Q |K(s',t) - K(s'',t)||x(t)|\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{3}\|x\|.$$

这样一来,

$$|y(s') - y(s'')| < \varepsilon\|x\|. \tag{4}$$

不等式(4)表明,函数 $y(s)$ 连续,即公式(2)实际上定义了一个把空间 $C[a,b]$ 变到自身的算子. 其次,由不等式(4)还看出,如果 $\{x(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的有界集,则与之对应的集 $\{y(s)\}$ 等度连续. 最后,如果 $\|x\| \leqslant C$,则

$$\|y\| = \sup|y(s)| \leqslant \sup\int_a^b |K(s,t)||x(t)|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant M(b-a)\|x\|.$$

于是,算子(2)把 $C[a,b]$ 中的任何有界集变为一致有界和等度连续的函数集,即变成准紧集.

例 4a 函数 $K(s,t)$ 的间断点排列在有限条只与直线 $s = \text{con}\ st$ 交于一点的曲线上,这一条件是本质的. 例如设

$$K(s,t) = \begin{cases} 1, \text{当 } s < 1/2, \\ 0, \text{当 } s \geqslant 1/2; \end{cases}$$

则 $K(s,t)$ 定义在正方形 $0 \leqslant s,t \leqslant 1$ 上,以整个闭区间 $s = \frac{1}{2}, 0 \leqslant t \leqslant 1$ 为其间断点. 具有这样的核 $K(s,t)$ 的算子(2)把函数 $x(t) \equiv 1$ 变为间断函数.

例 4b 如果当 $t > s$ 时令 $K(s,t) = 0$,则算子(2)具有形式

$$y(s) = \int_a^s K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

我们将假定,函数 $K(s,t)$ 当 $t < s$ 时连续. 那么由例 4 所说的推出,算子(5)在 $C[a,b]$ 中全连续.

这个算子称为沃尔泰拉①型算子.

注 在我们所取的紧算子的定义下,可以证明,闭单位球的象是非紧的(虽然它是准紧的). 实际上,我们在空间 $C[-1,1]$ 中考虑积分算子

① 沃尔泰拉是意大利数学家,他是关于泛函分析与积分方程的一系列工作的作者.

$$Jx(s) = \int_{-1}^{s} x(t)\,\mathrm{d}t.$$

按照前面所证明的,J 是 $C[-1,1]$ 内的全连续算子. 令

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ nt, & \text{如果 } 0 < t \leqslant 1/n, \\ 1, & \text{如果 } 1/n < t \leqslant 1. \end{cases}$$

那么 $x_n \in C[-1,1]$, $\|x_n\| = 1$ 对所有的 n 成立,且

$$y_n(t) = Jx_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ nt^2/2, & \text{如果 } 0 < t \leqslant 1/n, \\ t - 1/(2n), & \text{如果 } 1/n < t \leqslant 1. \end{cases}$$

显然,序列 y_n 在 $C[-1,1]$ 中收敛于函数

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ t, & \text{如果 } 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

而 $y(t)$ 不是 $C[-1,1]$ 中任何函数(在映射 J 下)的象,因为函数 $y'(t)$ 间断.

然而可以证明,如果空间是自反的(例如希尔伯特空间),那么在紧线性映射下,闭单位球的象是紧的.

2. 紧算子的基本性质

定理 1 如果 $\{A_n\}$ 是巴拿赫空间 E 中紧算子的序列,它依范数收敛于某一算子 A,则算子 A 也是紧的.

证明 为了确定算子 A 的紧性只需证明,对于 E 中任何元的有界序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$,由序列 $\{Ax_n\}$ 里可抽出收敛子列.

因为算子 A_1 紧,则从序列 $\{A_1 x_n\}$ 里可选出收敛子列. 设

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(1)}, \cdots \tag{6}$$

是使 $\{A_1 x_n^{(1)}\}$ 收敛的子序列. 现在考虑序列 $\{A_2 x_n^{(1)}\}$,由它仍然可以选出收敛子序列. 设

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)}, \cdots$$

是从序列(6)中选出的这样的子序列,使得 $\{A_2 x_n^{(2)}\}$ 收敛. 这时,显然 $\{A_1 x_n^{(2)}\}$ 也收敛. 进行类似的讨论,我们可以从序列 $\{x_n^{(2)}\}$ 中选出这样的子序列

$$x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \cdots, x_n^{(3)}, \cdots$$

使 $\{A_3 x_n^{(3)}\}$ 收敛. 如此等等. 然后我们取对角线序列

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(n)}, \cdots.$$

算子 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中的每一个都把这个序列变为收敛序列. 我们来证明,算子 A 也把它变为收敛序列,从而便确立了算子 A 的紧性. 因为空间 E 是完备的,则只需证明 $\{Ax_n^{(n)}\}$ 是基本序列. 我们有

$$\begin{aligned} &\| Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)} \| \\ &\leqslant \| Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)} \| + \| A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)} \| + \| A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)} \|. \end{aligned} \tag{7}$$

设 $\| x_n \| \leqslant C$. 先选取 k,使得 $\| A - A_k \| < \varepsilon/(3C)$,然后选取这样的 N,使对所有的 $n > N$ 与 $m > N$ 满足不等式

$$\| A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)} \| < \varepsilon/3$$

(这是可能的,因为序列 $\{A_k x_n^{(n)}\}$ 收敛). 在这些条件下,由(7)可得:对充分大的 n 与 m 有

$$\| Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)} \| < \varepsilon.$$

定理证毕.

易于验证,紧算子的线性组合也是紧的. 因此,在定义于 E 上的所有有界线性算子的空间 $\mathscr{L}(E,E)$ 内,诸紧算子组成一个闭的线性子空间.

现在我们来看,紧算子的全体对于算子的乘法运算是否封闭. 事实上,甚至成立本质上更强的论断.

定理 2 如果 A 是紧算子,而 B 是有界算子,则算子 AB 与 BA 都是紧的.

证明 如果集合 $M \subset E$ 有界,则 BM 也有界. 因此 ABM 是准紧的,而这意味着算子 AB 是紧的. 其次,如果 M 有界,则 AM 准紧,那么根据 B 的连续性,集合 BAM 也是准紧的,即算子 BA 是紧的.

定理证毕.

推论 在无穷维空间 E 中,紧算子不可能有有界逆.

事实上,如果不是这样,则单位算子 $I = A^{-1}A$ 在 E 中紧,而这是不可能的(参看例 1).

注 定理 2 表明,在所有的有界算子环 $\mathscr{L}(E,E)$ 中紧算子构成双侧理想①.

定理 3 与紧算子共轭的算子是紧的.

证明 设 A 是巴拿赫空间 E 中的紧算子. 我们来证明,作用于 E^* 内的共轭算子 A^* 把 E^* 中的每个有界子集变为准紧集. 因为赋范空间中的每一个有界子集都含于某个球中,所以只需证明,A^* 把每个球变为准紧集. 根据算子 A^* 的线性性质只需证

---

① 在某个环 R 中的一个子环 $\mathfrak{U}$,如果 $a \in \mathfrak{U}, r \in R$,那么 $ar \in \mathfrak{U}$ 及 $ra \in \mathfrak{U}$,则称这样的子环为(双侧)理想.

明闭单位球 $S^* \subset E^*$ 的象 A^*S^* 是准紧的.

我们将把 E^* 中的元看作只是在紧集 $\overline{AS}$ 上的函数,而不是看作整个空间 E 上的函数,其中 $\overline{AS}$ 是单位球 S 在映射 A 下的象的闭包. 这时,与 S^* 中泛函对应的函数 φ 的集合 Φ 将是一致有界和等度连续的. 事实上,如果 $\|\varphi\| \leqslant 1$,则

$$\sup_{x\in\overline{AS}}|\varphi(x)| = \sup_{x\in AS}|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\| \sup_{x\in S}\|Ax\| \leqslant \|A\|$$

且

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|x' - x''\| \leqslant \|x' - x''\|.$$

因此,这个集 Φ 在空间 $C[\overline{AS}]$ 中是准紧的(根据阿尔采拉定理). 但是,具有由连续函数空间 $C[\overline{AS}]$ 的通常度量所诱导出的度量的集 Φ 与集 A^*S^* 等距(A^*S^* 具有由赋范空间 E^* 诱导出的度量). 事实上,如果 $g_1, g_2 \in S^*$,则

$$\begin{aligned}\|A^*g_1 - A^*g_2\| &= \sup_{x\in S}|(A^*g_1 - A^*g_2, x)| \\ &= \sup_{x\in S}|(g_1 - g_2, Ax)| \\ &= \sup_{z\in AS}|(g_1 - g_2, z)| \\ &= \sup_{z\in\overline{AS}}|(g_1 - g_2, z)| = \rho(g_1, g_2).\end{aligned}$$

因为 Φ 是准紧的,则它是完全有界的. 因此,与它等距的集 A^*S^* 也完全有界. 所以 A^*S^* 在 E^* 中准紧.

定理证毕.

注　不难验证,集 Φ 在 $C[\overline{AS}]$ 中是闭的,所以 Φ 是紧的,从而集 A^*S^* 紧,虽然(正如从第 1 段的注中所看到的)闭单位球在任意全连续映射下的象可能不是紧的. 在刚刚证过的定理中情况与如下一般情况不同:E^* 中的闭单位球 S^* 在空间 E^* 的 *-弱拓扑中是紧的(参看 §3 定理 5). 由此也推出对任意紧算子集 S^* 的象(在空间 E^* 的度量下)的紧性.

习题 1　设 A 是巴拿赫空间中的有界线性算子. 试证明,如果算子 A^* 是紧的,则 A 也是紧的.

习题 2　为使希尔伯特空间 H 中的线性算子 A 是紧的,必须且只需与它(埃尔米特)共轭的算子 A^* 是紧的. 试证明之.

3. 紧算子的特征值

定理 4　在巴拿赫空间 E 中,任何紧算子 A 对于任意 $\delta > 0$,仅有有限个线性无关的特征向量,这些特征向量对应于其模超过 δ 的特征值.

证明　设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 是算子 A 的任何一个特征值序列(它们彼此不同或有重复),且 $|\lambda_n| > \delta$;$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是与它们对应的特征向量序列,且设这些向量线性无关.

应用引理 1(第 1 段)且构造这样的向量序列 $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ 使得

1) $y_n \in E_n$; 2) $\| y_n \| = 1$; 3) $\rho(y_n, E_{n-1}) = \inf\limits_{x \in E_{n-1}} \| y_n - x \| > 1/2$,其中 E_n 是由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 生成的子空间.

根据不等式 $|\lambda_n| > \delta$,序列 $\left\{\dfrac{y_n}{\lambda_n}\right\}$有界. 我们断言,由象序列 $\left\{A\left(\dfrac{y_n}{\lambda_n}\right)\right\}$不可能选出收敛的子序列. 事实上,设 $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. 那么

$$A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k + \alpha_n x_n = y_n + z_n,$$

其中

$$z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) x_k \in E_{n-1}.$$

所以对于任意 $p > q$

$$\left\| A\left(\frac{y_p}{\lambda_p}\right) - A\left(\frac{y_q}{\lambda_q}\right) \right\| = \| y_p + z_p - (y_q + z_q) \|$$

$$= \| y_p - (y_q + z_q - z_p) \| > 1/2,$$

因为 $y_q + z_q - z_p \in E_{p-1}$.

这与算子 A 的紧性矛盾.

特别,由刚证明的定理推出,与紧算子 A 的已知特征值 $\lambda \neq 0$ 对应的线性无关的特征向量的个数是有限的.

由此定理还可推得,在圆外部 $|\lambda| > \delta > 0$,紧算子 A 的特征值 λ_n 的数目是有限的,因此,算子 A 的特征值可按其模非递增的次序 $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots$ 来编号.

4. 希尔伯特空间中的紧算子 上面我们谈到了在任意巴拿赫空间中的紧算子. 现在补充关于希尔伯特空间中紧算子的若干事实,添加于上述知识中.

如果算子 A 把任何有界集变为准紧集,我们便称 A 是紧算子. 由于 $H = H^*$,即 H 是对于可分空间共轭的空间,在此空间中,任何有界集(且也仅是这些有界集)是弱准紧的. 所以,在希尔伯特空间中紧算子可定义为把任何弱准紧集变为强拓扑中准紧集的算子.

最后,在某些情况下,希尔伯特空间中的紧算子这样定义还更为方便:H 中算子 A 如果把任何弱收敛序列变为强收敛序列,则称 A 为 H 中的紧算子. 事实上,设上述条件成立,且设 M 是 H 中有界集. 集 M 的每一个无穷子集都含有弱收敛的序列,如果该序列可变为强收敛的序列,则 AM 是准紧的. 反之,设 A 是紧算子,$\{x_n\}$ 是弱收敛序列且 x 是 $\{x_n\}$ 的弱极限. 那么 $\{Ax_n\}$ 含有强收敛的子序列. 同时,根据 A 的连续性,$\{Ax_n\}$ 弱收敛于 Ax. 由此得出,$\{Ax_n\}$ 不可能有多于一个的极限点. 因此 $\{Ax_n\}$ 是收敛序列.

5. H 中的自共轭紧算子　对于有限维欧几里得空间中的自共轭线性算子，关于把这样的算子的矩阵在某个标准正交基中化为对角形的定理是熟知的. 本段中我们把这一定理推广到希尔伯特空间中的自共轭紧算子上. 本段的结果无论是对于实的希尔伯特空间还是对于复的希尔伯特空间都成立. 为了确定起见，我们将假定 H 是复的.

我们首先指出 H 中自共轭算子的特征向量与特征值的某些性质，其实，这些性质与有限维自共轭算子的相应性质完全类似.

Ⅰ. H 中自共轭算子 A 的所有特征值都是实的.

事实上，设 $Ax=\lambda x$, $\|x\|\neq 0$，则

$$\lambda(x,x)=(Ax,x)=(x,Ax)=(x,\lambda x)=\overline{\lambda}(x,x),$$

由此 $\lambda=\overline{\lambda}$.

Ⅱ. 对应于自共轭算子的不同特征值的特征向量是正交的.

实际上，如果 $Ax=\lambda x$ 与 $Ay=\mu y$，同时 $\lambda\neq\mu$，那么

$$\lambda(x,y)=(Ax,y)=(x,Ay)=(x,\mu y)=\mu(x,y),$$

由此 $(x,y)=0$.

现在证明如下的基本定理.

定理 5（希尔伯特 - 施密特(Schmidt)）　对于希尔伯特空间 H 中的任意自共轭线性紧算子 A，存在对应于特征值 $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n\neq 0)$ 的特征向量的标准正交系 $\{\varphi_n\}$，使得每个元 $\xi\in H$ 可用唯一的方式记为形式

$$\xi=\sum_k c_k\varphi_k+\xi',$$

其中向量 $\xi'\in\mathrm{Ker}A$，即满足条件 $A\xi'=0$；同时

$$A\xi=\sum_k\lambda_k c_k\varphi_k,$$

并且若系 $\{\varphi_n\}$ 是无穷的，则 $\lim\lambda_n=0\ (n\to\infty)$.

为了证明这个基本定理，我们需要如下一些辅助命题.

引理 2　如果 $\{\xi_n\}$ 弱收敛于 ξ 且线性算子 A 是紧的，则

$$Q(\xi_n)=(A\xi_n,\xi_n)\to(A\xi,\xi)=Q(\xi).$$

证明　对于任何 n，

$$\begin{aligned}&|(A\xi_n,\xi_n)-(A\xi,\xi)|\\ \leqslant&|(A\xi_n,\xi_n)-(A\xi,\xi_n)|+|(A\xi,\xi_n)-(A\xi,\xi)|.\end{aligned}$$

但是

$$|(A\xi_n,\xi_n)-(A\xi,\xi_n)|\leqslant\|\xi_n\|\cdot\|A(\xi_n-\xi)\|$$

且

$$|(A\xi_n,\xi)-(A\xi,\xi)|=|(\xi,A(\xi_n-\xi))|$$
$$\leqslant\|\xi\|\cdot\|A(\xi_n-\xi)\|,$$

因为数 $\|\xi_n\|$ 有界,而 $\|A(\xi_n-\xi)\|\to 0$,那么

$$|(A\xi_n,\xi_n)-(A\xi,\xi)|\to 0,$$

这就是所要证明的.

引理 3 如果泛函

$$|Q(\xi)|=|(A\xi,\xi)|$$

在单位球上的点 ξ_0 处达到极大,其中 A 是线性有界自共轭算子,则由 $(\xi_0,\eta)=0$ 推出

$$(A\xi_0,\eta)=(\xi_0,A\eta)=0.$$

证明 显然 $\|\xi_0\|=1$. 令

$$\xi=\frac{\xi_0+a\eta}{\sqrt{1+|a|^2\|\eta\|^2}},$$

其中 a 是任意复数. 由 $\|\xi_0\|=1$ 得出

$$\|\xi\|=1.$$

其次

$$Q(\xi)=\frac{1}{1+|a|^2\|\eta\|^2}[Q(\xi_0)+\bar{a}(A\xi_0,\eta)$$
$$+a\overline{(A\xi_0,\eta)}+|a|^2Q(\eta)].$$

数 a 可取得使其模任意小,并且使 $\bar{a}(A\xi_0,\eta)$ 为实值. 于是 $a\overline{(A\xi_0,\eta)}=\bar{a}(A\xi_0,\eta)$ 且

$$Q(\xi)=Q(\xi_0)+2\bar{a}(A\xi_0,\eta)+O(a^2).$$

由此等式显然可见,如果 $(A\xi_0,\eta)\neq 0$,那么 a 可选取得使 $|Q(\xi)|>|Q(\xi_0)|$,而这与引理假设条件矛盾.

由引理 3 可直接推出,如果 $|Q(\xi)|$ 当 $\xi=\xi_0$ 时达到极大值,则 ξ_0 是算子的特征向量.

定理 5 的证明 我们将按归纳法来构造诸元 φ_k,使得它们的次序与其相应的特征值的绝对值递减的顺序

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \cdots$$

相一致.

为了构造元 φ_1,我们考虑表达式 $|Q(\xi)| = |(A\xi,\xi)|$ 并证明它在单位球上达到极大值. 设

$$S = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} |(A\xi,\xi)|$$

且 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 是这样的序列: $\|\xi_n\| = 1$,而且当 $n\to\infty$ 时

$$|(A\xi_n,\xi_n)| \to S.$$

因为单位球在 H 中是弱紧的,则从 $\{\xi_n\}$ 中可选出弱收敛于某个元 η 的子序列来. 同时 $\|\eta\| \leqslant 1$ 且根据引理 2

$$|(A\eta,\eta)| = S.$$

我们把元 η 取为 φ_1. 显然 $\|\eta\|$ 丝毫不差地等于 1. (事实上,设 $\|\eta\| < 1$. 令 $\eta_1 = \eta / \|\eta\|$,那么 $\|\eta_1\| = 1$ 且 $|(A\eta_1,\eta_1)| > S$,这与 S 的定义矛盾.)同时

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1,$$

由此

$$|\lambda_1| = \frac{|(A\varphi_1,\varphi_1)|}{(\varphi_1,\varphi_1)} = |(A\varphi_1,\varphi_1)| = S.$$

现在设对应于特征值

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$$

的特征向量

$$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$$

已构造好了. 设 $M(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$ 是张在 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 上的子空间. 考虑属于

$$M_n^\perp = H \ominus M(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$$

(即与 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 正交)且满足条件 $\|\xi\| < 1$ 的元的全体上的泛函

$$|(A\xi,\xi)|.$$

集 $M_n^\perp$ 是对于 A 的不变子空间(因为子空间 $M(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$ 是不变的而 A 是共轭的). 把上面所进行的论证应用于 $M_n^\perp$,我们得出,在 $M_n^\perp$ 中存在对于算子 A 的特征向量(把它记为 φ_{n+1}).

可能有两种情况: 1)经过有限步后我们得到子空间 $M_{n_0}^\perp$,在 $M_{n_0}^\perp$ 中 $(A\xi,\xi) \equiv 0$; 2)对于所有的 n,在 $M_n^\perp$ 上 $(A\xi,\xi) \neq 0$.

在第一种情形由引理 3 知 $M_{n_0}^{\perp}$被算子 A 变为零(置 $\eta = A\xi_0$),即整个 $M_{n_0}^{\perp}$由对应于 $\lambda = 0$ 的特征向量组成. 所构造的向量系 $\{\varphi_n\}$ 由有限个元组成.

在第二种情形,我们得到特征向量的一个序列 $\{\varphi_n\}$,对于其中每一个,都有 $\lambda_n \neq 0$. 我们来证明 $\lambda_n \to 0$. 序列 $\{\varphi_n\}$(如同任何标准正交序列)弱收敛于零,所以诸元 $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ 应当依范数收敛于零,由此 $|\lambda_n| = \|A\varphi_n\| \to 0$.

设

$$M^{\perp} = H \ominus M(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots) = \bigcap_n M_n^{\perp} \neq 0.$$

如果 $\xi \in M^{\perp}$ 且 $\xi \neq 0$,则 $(A\xi, \xi) \leqslant \lambda_n \|\xi\|^2$ 对所有 n 成立,即 $(A\xi, \xi) = 0$. 由此根据引理 3(当 $\max|(A\xi, \xi)| = 0$)应用于 $M^{\perp}$,我们得出 $A\xi = 0$,即子空间 $M^{\perp}$ 被算子 A 变为零.

由系 $\{\varphi_n\}$ 的构造知,任何向量可表为

$$\xi = \sum_k c_k \varphi_k + \xi', \text{其中 } A\xi' = 0.$$

由此推出

$$A\xi = \sum \lambda_k c_k \varphi_k.$$

定理证毕. 这个定理在积分方程论中起着基本的作用,积分方程将在第九章叙述.

注 已证明的定理表明,对 H 中任何自共轭紧算子 A,存在空间 H 的一个由该算子的特征向量组成的正交基. 实际上,为了得到这个基只需用子空间 $M^{\perp}$ 的任意一个正交基去补充在定理的证明中构造的特征向量系 $\{\varphi_n\}$,这个 $M^{\perp}$ 的正交基可被算子 A 变为零. 换言之,我们在这里所得到的结果与关于把有限维空间中自共轭算子的矩阵在正交基中化为对角形的定理是完全类似的.

对于 n 维空间中的非自共轭算子,这样的化简一般说来是不可能的. 然而成立如下定理:在 n 维空间中的任何线性变换至少有一个特征向量. 不难验证,这一论断不能推广到 H 中的紧算子上. 事实上,设在 l_2 中算子 A 由公式

$$Ax = A(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{n-1}, \cdots\right) \tag{8}$$

给定. 这个算子是紧的(验证这一点!),但是一个特征向量也没有(试证明之).

习题 试求算子(8)的谱.

第五章　测度，可测函数，积分

集 A 的测度 $\mu(A)$ 概念是下面这些概念的一种自然推广：

1）区间 Δ 的长度 $l(\Delta)$；

2）平面几何图形 F 的面积 $S(F)$；

3）空间几何图形 G 的体积 $V(G)$；

4）非减函数 $\varphi(t)$ 在半开区间 $[a,b)$ 上的增量 $\varphi(b)-\varphi(a)$；

5）一个非负函数展布在某一直线（区间）、平面域或空间域、……上的积分.

这个概念起源于实变函数论，尔后又应用到概率论、动力系统理论、泛函分析和许多其他的数学领域里去.

在本章 §1 里，我们从矩形面积的概念出发来阐述平面集的测度论. 测度的一般理论将在 §2 和 §3 里阐述. 不过读者甚易发觉在 §1 里所进行的一切讨论都具有一般性，从而不需要作任何重大修改就可以照样推广到抽象的测度论去.

§1. 平面集的测度

1. 初等集的测度　我们来考察 (x,y) 平面上的这样一个集族 $\mathfrak{S}$，其中每一个集里的 x 由

$$a \leqslant x \leqslant b,\quad a \leqslant x < b,$$
$$a < x \leqslant b,\quad a < x < b$$

这种形式的不等式之一所确定，而 y 则由

$$c \leqslant y \leqslant d,\quad c \leqslant y < d,$$

$$c < y \leqslant d, \quad c < y < d$$

这种形式的不等式之一所确定，这里 a、b、c、d 都是一些任意的数. 属于该集族的一切集我们都称为矩形. 如果 $a<b$ 和 $c<d$，那么由不等式

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

所确定的闭矩形就是通常意义下一个包含了边界的矩形. 如果 $a=b$ 和 $c<d$ 或 $a<b$ 和 $c=d$，那么它就是一个闭区间. 如果 $a=b$，$c=d$，那么它干脆就是一个点. 最后剩下一种情况，如果 $a>b$ 或 $c>d$，那么它就是一个空集. 开矩形

$$a < x < b, \quad c < y < d$$

依据 a、b、c 和 d 之间的关系可以是一个不包含边界的矩形或者是个空集. 其他类型的每一种矩形（我们称为半开矩形）或者确实为矩形，但无一边、无两边或无三边，或者是个开区间，或者是个半开区间，最后还剩下一种情况，它甚至可能是一个空集.

平面上一切矩形所构成的类我们用 $\mathfrak{S}$ 来表示.

对于每一个矩形比照初等几何里众所周知的面积概念我们可以按下面这种方式来定义它的测度. 即

a）空集的测度等于0；

b）由数 a、b、c 和 d 所确定的一个（闭的、开的或半开的）非空矩形的测度等于

$$(b-a)(d-c).$$

这样一来，对于 $\mathfrak{S}$ 里的每一个矩形 P 就有数 $m(P)$——它的测度——与之对应，并且满足下列条件：

1）测度 $m(P)$ 取非负的实数值；

2）测度 $m(P)$ 是可加的，即如果 $P=\bigcup_{k=1}^{n} P_k$，以及当 $i \neq k$ 时 $P_i \cap P_k = \varnothing$，那么

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k).$$

我们的任务是把那暂时还仅是对矩形定义的测度 $m(P)$（保持性质1）和2））而推广到更广泛的一类集上去.

首先我们将测度概念推广到所谓的初等集上去. 如果一个平面集至少能用一种方法表成有限多个两两互不相交的矩形的并集，那么就称该集为一初等集.

往后需要用到下面的定理.

定理1 两个初等集的并集、交集、差集和对称差集也都是一些初等集.

于是，按第一章§5所引入的术语，初等集组成一个环.

证明 显然，两个矩形的交集仍然是一个矩形. 因此，如果

$$A = \bigcup_k P_k \quad 和 \quad B = \bigcup_j Q_j$$

是两个初等集，那么

$$A \cap B = \bigcup_{k,j} (P_k \cap Q_j)$$

也是一个初等集.

容易验证，两个矩形的差集仍然是一个初等集. 从而，由矩形里减去某一初等集我们仍然得到一个初等集(是一些初等集的交集). 现在假定集 A 和集 B 是两个初等集，显然可以找到一个既包含了集 A 又包含了集 B 的矩形 P. 于是集

$$A \cup B = P\backslash[(P\backslash A) \cap (P\backslash B)]$$

根据上面所说的理由就是一个初等集. 由此，从等式

$$A\backslash B = A \cap (P\backslash B)$$

和

$$A\triangle B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

就可推出初等集的差集和对称差集都是初等集. 定理得证.

现在我们可以定义初等集的测度 $m'(A)$ 如下：如果

$$A = \bigcup_k P_k,$$

其中诸 P_k 是两两互不相交的矩形，那么

$$m'(A) = \sum_k m(P_k).$$

我们来证明，$m'(A)$ 与集 A 表成有限个矩形的和集形式的方法无关. 设

$$A = \bigcup_k P_k = \bigcup_j Q_j,$$

其中 P_k 和 Q_j 都是矩形，并且当 $i\neq k$ 时 $P_i \cap P_k = \varnothing$，$Q_i \cap Q_k = \varnothing$. 因为两个矩形的交集 $P_k \cap P_j$ 仍然是一个矩形. 所以根据矩形测度的可加性，

$$\sum_k m(P_k) = \sum_{k,j} m(P_k \cap Q_j) = \sum_j m(Q_j).$$

特别对于矩形来说，测度 m' 与原来的测度 m 完全相同.

甚易看出，像这样定义的初等集的测度是非负的并且是可加的.

我们来揭示初等集测度的下述重要性质.

定理 2　如果 A 是一个初等集，而 $\{A_n\}$ 是这样一个有限初等集族或可数初等集族，使得

$$A \subset \bigcup_n A_n,$$

那么

$$m'(A) \leqslant \sum_{n} m'(A_n). \tag{1}$$

证明 对于任何 $\varepsilon>0$ 和给定的 A，显然可以找到这样一个初等闭集 $\bar{A}$，它包含在 A 里并且满足条件

$$m'(\bar{A}) \geqslant m'(A) - \varepsilon/2.$$

(只需将组成 A 的 k 个矩形的每一个 P_i 换成面积大于 $m(P_i) - \varepsilon/(2k)$ 而又整个包含在 A 内的闭矩形就行了.)

其次，对于每个 A_n 总可以找到一个包含 A_n 的初等开集 $\tilde{A}_n$，使其满足下列条件

$$m'(\tilde{A}_n) \leqslant m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

显然

$$\bar{A} \subset \bigcup_{n} \tilde{A}_n.$$

根据海涅－博雷尔(Heine－Borel)引理，从 $\{\tilde{A}_n\}$ 里可以选出一个有限集族 $\tilde{A}_{n_1},\cdots,\tilde{A}_{n_s}$ 来覆盖住 $\bar{A}$. 这时显然有

$$m'(\bar{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{n_i}).$$

(因为否则 $\bar{A}$ 就会被其面积之和小于 $m'(\bar{A})$ 的有限个矩形所覆盖，而这显然是不可能的.)因此

$$m'(A) \leqslant m'(\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n} m'(\tilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqslant \sum_{n} m'(A_n) + \sum_{n} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{n} m'(A_n) + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，由此就可推出(1).

定理2所揭示出的测度 m' 的性质(集的测度不超过有限个或可数个覆盖它的那些集的测度之和)称为半加性. 由它又可推出下述的可数加性或 σ 加性.

设初等集 A 可表示为可数个两两互不相交的初等集 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 之和：

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

由此

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

（即可数个两两互不相交的集之和的测度等于这些集的测度之和）．

事实上，根据加性对于任何 N 有

$$m'(A) \geqslant m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m'(A_n).$$

当 $N \to \infty$ 时取极限就得到

$$m'(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

根据定理 2 有相反的不等式成立．这样一来，测度 m' 的 σ 加性得证．

注　读者可能会造成这样一种印象，认为平面上的测度的 σ 加性可以自动地由它的可加性通过取极限而得到．事实上并不是那么一回事（我们在定理 2 的证明中本质上是利用了刻划平面集的度量性质与拓扑性质之间的关系的海涅 - 博雷尔引理）．在 §2 里当研究任意抽象集的测度时我们可以看出，由测度的可加性一般说来并不能推出它的 σ 加性．

2. 平面集的勒贝格（Lebesgue）测度　初等集并没有穷尽几何和古典分析里遇到的一切集合．因此自然企图将测度概念（仍旧保持它的基本性质）推广到比那种边界平行于坐标轴的矩形的有限并集更广泛的一类集合上去．

勒贝格在 20 世纪初叶才算彻底地解决了这个问题．

在阐述勒贝格测度论时，不但需要考察矩形的有限并集而且也需要考察矩形的无穷并集．并且这样约定，是为了避免考虑那种具有“无穷测度”的集合，首先只限于考虑那些整个属于正方形 $E = \{0 \leqslant x \leqslant 1; 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 的集合．

在所有这些集合的全体上定义函数 $\mu^*(A)$ 如下．

定义 1　数

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup P_k} \sum_k m(P_k) \tag{1}$$

称为集 A 的外测度，其中下确界是对所有可能覆盖集 A 的有限或可数个矩形来取的．

注 1　如果我们在外测度的定义中所考虑的覆盖集不仅是由矩形所组成，而且是由（有限多个或可数个）任意初等集所组成，那么显然会得到同样的值 $\mu^*(A)$，因为每个初等集是有限个矩形之和．

注 2　如果 A 为一初等集，则 $\mu^*(A) = m'(A)$．

事实上，设 $P_1, \cdots, P_n$ 为构成 A 的矩形．于是，根据定义

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(P_i).$$

因为诸矩形 P_i 覆盖 A, 所以 $\mu^*(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(P_i) = m'(A)$. 若 $\{Q_j\}$ 是覆盖 A 的任意有限或可数矩形组,那么根据定理 2, $m'(A) \leqslant \sum_j m(Q_j)$. 因此 $\mu^*(A) = m'(A)$.

定理 3 如果 $A \subset \bigcup_n A_n$,其中 A_n 是一个有限集族或可数集族,那么

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n). \tag{2}$$

特别,如果 $A \subset B$,那么 $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.

证明 根据外测度定义,对于每个 A_n,总可以找到这样的有限矩形族或可数矩形族 $\{P_{nk}\}$,使得 $A_n \subset \bigcup_k P_{nk}$ 且有

$$\sum_k m(P_{nk}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

其中 $\varepsilon > 0$ 可以任意地选取. 于是

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk},$$

从而

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 任意性,由此就可推出定理的结论.

因为 m' 和 μ^* 在初等集上完全相同,所以定理 2 是定理 3 的特殊情形.

定义 2 集 A 称为(在勒贝格意义下)可测,如果对于任何 $\varepsilon > 0$,总可以找到这样的初等集 B,使得

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon. \tag{3}$$

仅在可测集上定义的函数 μ^* 称为勒贝格测度,我们用 μ 表之.

注 我们所引入的可测性定义有十分直观的意义. 它表明,如果一个集可以用初等集"任意精确地逼近",那么这个集就称为是可测的.

这样,我们定义了某一称为可测的集类 $\mathfrak{M}_E$ 以及定义在该集类上的函数 μ(勒贝格测度). 现在要确立下述事实:

(1) 可测集的全体 $\mathfrak{M}_E$ 对取有限和或可数和以及交的集运算是封闭的(即 $\mathfrak{M}_E$ 为一 σ 代数,参看第一章 §5 第 4 段).

(2) 函数 μ 在 $\mathfrak{M}_E$ 上是 σ 可加的.

下面这些定理是这两个结论的分层证明.

定理 4 可测集的全集是可测的.

这可立即从等式

$$(E\backslash A)\triangle(E\backslash B)=A\triangle B$$

推出，而该等式可以直接加以验证.

定理 5　有限个可测集的和集与交集是可测集.

证明　显然只需对两个集加以证明就够了. 设 A_1 和 A_2 是两个可测集. 这表示，对于任何 $\varepsilon>0$ 总可以找到这样的初等集 B_1 和 B_2，使得

$$\mu^*(A_1\triangle B_1)<\varepsilon/2,\mu^*(A_2\triangle B_2)<\varepsilon/2.$$

因为

$$(A_1\cup A_2)\triangle(B_1\cup B_2)\subset(A_1\triangle B_1)\cup(A_2\triangle B_2),$$

所以

$$\mu^*[(A_1\cup A_2)\triangle(B_1\cup B_2)]\leqslant\mu^*(A_1\triangle B_1)+\mu^*(A_2\triangle B_2)<\varepsilon.$$

但是 $B_1\cup B_2$ 为一初等集，因此集 $A_1\cup A_2$ 是可测的.

两个可测集的交集的可测性可以从定理 4 和关系式

$$A_1\cap A_2=E\backslash[(E\backslash A_1)\cup(E\backslash A_2)]\tag{4}$$

推出.

推论　两个可测集的差集与对称差集也都是可测集.

这个推论可从定理 4 和定理 5 以及等式

$$A_1\backslash A_2=A_1\cap(E\backslash A_2),A_1\triangle A_2=(A_1\backslash A_2)\cup(A_2\backslash A_1)$$

推出.

定理 6　如果 $A_1,\cdots,A_n$ 是两两互不相交的可测集，那么

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k).\tag{5}$$

为了证明这个定理需要下面的引理.

引理　对于任意两个集 A 和 B 有

$$|\mu^*(A)-\mu^*(B)|\leqslant\mu^*(A\triangle B).$$

引理的证明　因为

$$A\subset B\cup(A\triangle B),$$

所以根据定理 3

$$\mu^*(A)\leqslant\mu^*(B)+\mu^*(A\triangle B).$$

由此推出在 $\mu^*(A)\geqslant\mu^*(B)$ 的情形下引理的结论. 如果 $\mu^*(A)\leqslant\mu^*(B)$，那么引理的结论可从建立类似不等式

$$\mu^*(B)\leqslant\mu^*(A)+\mu^*(A\triangle B)$$

推出.

定理 6 的证明 和定理 5 一样,只需对两个集的情形加以考虑就够了. 选择任意 $\varepsilon>0$ 和这样的初等集 B_1 和 B_2,使得

$$\mu^*(A_1\triangle B_1)<\varepsilon, \tag{6}$$

$$\mu^*(A_2\triangle B_2)<\varepsilon. \tag{7}$$

令 $A=A_1\cup A_2$ 和 $B=B_1\cup B_2$. 根据定理 5,集 A 是可测的. 因为集 A_1 和集 A_2 不相交,所以

$$B_1\cap B_2\subset(A_1\triangle B_1)\cup(A_2\triangle B_2),$$

从而

$$m'(B_1\cap B_2)\leqslant 2\varepsilon. \tag{8}$$

根据引理从(6)和(7)推出

$$|m'(B_1)-\mu^*(A_1)|<\varepsilon, \tag{9}$$

$$|m'(B_2)-\mu^*(A_2)|<\varepsilon. \tag{10}$$

因为在初等集的全体上测度是可加的,所以从(8)-(10)就得到

$$m'(B)=m'(B_1)+m'(B_2)-m'(B_1\cap B_2)$$

$$\geqslant\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)-4\varepsilon.$$

还需注意,$A\triangle B\subset(A_1\triangle B_1)\cup(A_2\triangle B_2)$,最后有

$$\mu^*(A)\geqslant m'(B)-\mu^*(A\triangle B)\geqslant m'(B)-2\varepsilon$$

$$\geqslant\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)-6\varepsilon.$$

因为 $\varepsilon>0$ 可以选得任意小,所以

$$\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2).$$

因为(根据定理 3)相反的不等式

$$\mu^*(A)\leqslant\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)$$

总是正确的,最终就得到

$$\mu^*(A)=\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2).$$

因为 A_1、A_2 和 A 是可测的,所以这里的 μ^* 可以用 μ 来代替.

定理得证.

从这个定理,特别可以推出,对每个可测集 A 都有

$$\mu(E\backslash A) = 1 - \mu(A).$$

定理 7　可数个可测集的和集与交集都是可测集.

证明　设

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$$

是一个可数可测集族，并且 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 令 $A'_n = A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. 显然 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$，并且诸集 A'_n 两两互不相交. 根据定理 5 及其推论所有的集 A'_n 都是可测的. 根据定理 6 和外测度的定义，对于任何有限的 n 都有

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) \leqslant \mu^*(A).$$

因此级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n)$$

收敛. 从而对于任何 $\varepsilon > 0$，总可以找到这样的 N 使得

$$\sum_{n>N} \mu(A'_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

因为集 $C = \bigcup_{n=1}^{N} A'_n$ 可测（C 是有限个可测集的和集），所以对于集 C 总可以找到这样的初等集 B 使得

$$\mu^*(C \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

因为

$$A \triangle B \subset (C \triangle B) \cup \left(\bigcup_{n>N} A'_n\right),$$

所以从(11)和(12)就可推出

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon,$$

即 A 可测.

因为可测集的余集是可测集，所以从等式

$$\bigcap_n A_n = E\backslash \bigcup_n (E\backslash A_n)$$

就可推出定理关于交集的结论.

定理 7 加强了定理 5. 下面的定理是定理 6 类似的加强.

定理 8 如果$\{A_n\}$是一个由两两互不相交的可测集所构成的序列，并且$A=\bigcup_n A_n$，那么

$$\mu(A)=\sum_n \mu(A_n).$$

证明 根据定理 6，对于任何 N 都有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)=\sum_{n=1}^{N}\mu(A_n)\leqslant \mu(A).$$

当 $N\to\infty$ 时对上述不等式两端取极限就得到

$$\mu(A)\geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n). \tag{13}$$

另一方面，根据定理 3

$$\mu(A)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n). \tag{14}$$

从(13)和(14)就可推出定理的结论.

在定理 8 中揭示的测度这个性质称为测度的可数可加性或 σ 可加性. 从 σ 可加性就可推出下述所谓的测度的连续性.

定理 9 如果 $A_1\supset A_2\supset\cdots$是一个由可测集套所构成的序列，并且 $A=\bigcap_n A_n$，那么

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

证明 只需考虑 $A=\varnothing$这种情形. 因为一般情形在将 A_n 换成 $A_n\backslash A$ 后就可以化成这种情形. 我们有

$$A_1=(A_1\backslash A_2)\cup(A_2\backslash A_3)\cup\cdots$$

与

$$A_n=(A_n\backslash A_{n+1})\cup(A_{n+1}\backslash A_{n+2})\cup\cdots,$$

并且诸被加项是不相交的. 因此根据 μ 的 σ 可加性

$$\mu(A_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k\backslash A_{k+1}) \tag{15}$$

和

$$\mu(A_n)=\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k\backslash A_{k+1}). \tag{16}$$

因为级数(15)收敛，所以它的余式(16)当 $n\to\infty$ 时趋于 0. 这样一来，当 $n\to\infty$ 时

$$\mu(A_n) \to 0,$$

这就是所要证明的.

推论 如果 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ 是一个由可测集 A_n 所构成的单调递增序列并且

$$A = \bigcup_n A_n,$$

那么

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

为了证明这个推论只需将集 A_n 换成它们的余集,再利用定理 9 就行了.

在这一段结束时我们还需注意一个十分明显而重要的情况. 每一个外测度等于 0 的集 A 是可测的. 只需令 $B = \varnothing$,于是

$$\mu^*(A \triangle B) = \mu^*(A \triangle \varnothing) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon.$$

这样一来,我们就将初等集的测度推广到对取可数个和集与交集的运算是封闭的更为广泛的一类 $\mathfrak{M}_E$ 上去,即 $\mathfrak{M}_E$ 为一 σ 代数. 所构造的测度在这种类上是 σ 可加的. 上面所建立的这些定理可用来构造按勒贝格意义是可测的那些集的全体的下述表示.

每一个属于 E 的开集都可以表示成开矩形(即可测集)的有限或可数的并集,所以根据定理 7,所有的开集都是可测的. 闭集是开集的余集,从而它们也都是可测的. 根据定理 7,可测集应该是所有这样的一些集,它们能够从开集与闭集利用有限次或可数次取可数并集与可数交集这种运算而得到. 但可以证明,所有可测集要比这些集多得多.

3. 若干补充与推广 前面我们仅考虑了那些包含在单位正方形 $E = \{0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$ 里的集合. 取消这个限制并不困难. 例如,可用下述方法来实现. 将整个平面表成半开正方形 $E_{nm} = \{n < x < n+1, m < y \leqslant m+1\}$ (n, m 都是整数)之和. 如果平面集 A 与每一个这种正方形 E_{nm} 的交集 $A_{nm} = A \cap E_{nm}$ 是可测的,那么我们就说该平面集 A 是可测的. 这时根据测度定义我们令

$$\mu(A) = \sum_{n,m} \mu(A_{nm}).$$

右端的级数要么收敛于有限值,要么发散于 $+\infty$. 因此测度 μ 也可以取无穷大值. 前面所揭示的关于测度和可测集的一切性质显然可以照样推广到这种情形上来①. 仅需注意,具有有限测度的可数个可测集之和可以具有无穷测度. 在整个平面上的可测集类用 $\mathfrak{U}$ 表之.

---

① 但是为使级数(15)收敛,在定理 9 中必须增加条件 $\mu(A_1) < +\infty$. 可以举例来说明缺少这个条件定理可能不正确.

在这一节里我们阐述了平面集的勒贝格测度的构造. 类似地可以构造直线上之集的勒贝格测度,三维空间里的集的勒贝格测度或一般任意 n 维欧几里得空间里的集的勒贝格测度. 对每一种情形,都按同样的方法来构造测度:从对某个最简单的集族(在平面情形是矩形集族,在直线的情形是开区间(a,b),闭区间$[a,b]$和半开区间$(a,b]$,$[a,b)$的集族,等等)的早已有定义的测度出发,我们首先定义这些集的有限并集的测度,然后再把它推广到更广泛得多的一类集(勒贝格可测集)上去. 可测性定义本身可以一字不改地适用于任何维空间里的集.

我们已从面积的通常定义出发引入了勒贝格测度概念. 对于一维情形,类似的构造是依赖于开区间(闭区间、半开区间)的长度这个概念的. 但是这里还可以用另一种更一般的方法引入测度概念.

设 $F(t)$ 为某一定义在直线上的非递减的左连续函数. 令

$$m(a,b) = F(b) - F(a+0),m[a,b] = F(b+0) - F(a),$$

$$m(a,b] = F(b+0) - F(a+0),m[a,b) = F(b) - F(a).$$

容易看出,象这样定义的区间函数 m 是非负的与可加的. 将这一节里所作过的类似讨论运用到它上面,我们就可以构造某一测度 $\mu_F(A)$. 同时对该测度是可测的那些集的全体 $\mathfrak{U}_F$ 对取可数并集与可数交集这类运算是封闭的,而测度 μ_F则是 σ 可加的. 对 μ_F是可测的这一集类 $\mathfrak{U}_F$,一般说来,是依赖于函数 F 的取法的. 但是对于任一个选定的 F,开集与闭集是可测的,从而它们所有的可数并集与可数交集显然都是可测的. 利用这种或那种函数 F 所得到的测度称为勒贝格 - 斯蒂尔切斯(Lebesgue - Stieltjes)测度. 特别,直线上通常的勒贝格测度就与函数 $F(t) \equiv t$ 相对应.

如果测度 μ_F对于任一通常的勒贝格测度 μ 等于 0 的集都等于 0,那么就称该测度为一绝对连续测度(对 μ 而言). 如果测度 μ_F全部集中在一个有限点集上或一个可数点集上(当 F 的函数值所构成的集是一个有限集或一个可数集时就属这种情况),那么称该测度为一离散测度. 如果测度 μ_F对于任一单点集都等于 0,那么就称该集为一奇异测度. 但是有这样的集 M 存在,它的勒贝格测度等于 0,而它的余集的测度 μ_F也等于 0.

可以证明,每一测度 μ_F可以表成绝对连续测度、离散测度与奇异测度三者之和. 我们在下一章还要回到勒贝格斯蒂尔切斯测度上来.

不可测集的存在. 我们看到了勒贝格可测的集类是非常广泛的. 自然会发生这样的问题,一般说来是否有不可测集存在? 我们指出,这个问题的回答是肯定的. 最简单的是在圆周上引入勒贝格线性测度来构造不可测集.

设 C 是周长等于 1 的圆周,而 α 是某一无理数. 将圆周 C 上那些经过旋转 $n\alpha\pi$ 角(n 为整数)后可彼此互变的点归为一类. 每一类这样的点显然是由一个可数点集所构成的. 现在从每一类里选取一点,我们来证明,像这样所得到的集(用 Φ_0表之)是不可测的. 用 Φ_n 表示从 Φ_0 旋转角度 $n\alpha\pi$ 后所得到的集. 容易看出,所有的集 Φ_n

两两互不相交而其和集就构成了整个圆周 C. 如果集 Φ_0 是可测的话，那么与它合同的集 Φ_n 也将会是可测的. 因为

$$C = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n，\text{当 } n \neq m \text{ 时 } \Phi_n \cap \Phi_m = \varnothing,$$

所以根据测度的 σ 可加性，由此就会推出

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(\Phi_n). \tag{17}$$

但是所有彼此合同的集应该具有相同的测度，因此如果 Φ_0 是可测的，那么

$$\mu(\Phi_n) = \mu(\Phi_0).$$

如果 $\mu(\Phi_0) = 0$，那么等式(17)右端那个级数之和等于 0；如果 $\mu(\Phi_0) > 0$，那么该级数之和等于无穷大. 由此可见，等式(17)是不可能成立的. 因此集 Φ_0（从而每一个 Φ_n）是不可测的.

§2. 一般测度概念. 测度从半环到环上的扩张. 加性和 σ 加性①

1. 测度的定义　我们从矩形的测度（面积）出发，构造了平面集的测度然后将测度概念推广到更广泛的集类上去. 我们所构造的测度本质上完全不是矩形面积的具体表达式而仅是它的一般性质. 即我们仅利用了面积是非负加性集函数以及矩形的全体是半环就将平面测度从矩形扩张到初等集上去. 在构造平面测度的勒贝格扩张时还利用了一条重要的性质就是它的 σ 加性.

在 §1 里对平面集深思熟虑阐述的构造可以给出完全一般的抽象形式. 这样它的适用范围将会大大地扩大. 这两节就研究这个问题.

首先引入下述基本定义.

定义 1　如果集函数 $\mu(A)$ 满足下面三个条件：

1）函数 $\mu(A)$ 的定义域 $\mathfrak{S}_\mu$ 是集半环；

2）函数 $\mu(A)$ 的值是非负的实数；

3）$\mu(A)$ 是可加的，即对于集 $A \in \mathfrak{S}_\mu$ 关于（两两互不相交的）集 $A_k \in \mathfrak{S}_\mu$ 的任何有限分解式

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

满足等式

---

① 在这一节及以后诸节中我们将系统地利用第一章 §5 里所阐述的一些概念和事实.

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k),$$

那么就称该集函数 $\mu(A)$ 为集 A 的测度.

注 从分解式 $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ 就可推出 $\mu(\varnothing) = 2\mu(\varnothing)$，即 $\mu(\varnothing) = 0$.

2. 从半环到其所生成的环的测度扩张 在构造平面集测度时第一步是将测度从矩形推广到初等集上去，即推广到两两互不相交的矩形的有限和集上去. 现在我们来考虑这种构造的抽象类比. 首先叙述下面的定义.

定义 2 如果集 $\mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_\mu$ 并且对于每个 $A \in \mathfrak{S}_m$ 成立等式

$$\mu(A) = m(A),$$

则称测度 μ 为测度 m 的扩张.

本段的目标是证明下列命题.

定理 1 对于每一给定在某个半环 $\mathfrak{S}_m$ 上的测度 $m(A)$，有一个且仅有一个扩张 $m'(A)$ 存在，而以环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$（即 $\mathfrak{S}_m$ 上的极小环）为其定义域.

证明 对于每个集 $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 都有分解式

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \quad (B_k \in \mathfrak{S}_m, \text{当 } k \neq l \text{ 时 } B_k \cap B_l = \varnothing) \tag{1}$$

存在（第一章 §5 定理 3）. 按照定义，令

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k). \tag{2}$$

容易看出，由等式(2)所确定的测度 $m'(A)$ 与分解式(1)的选法无关. 事实上，我们考虑下面两种分解式

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{j=1}^{r} C_j, B_i \in \mathfrak{S}_m, C_j \in \mathfrak{S}_m.$$

因为所有的交集 $B_i \cap C_j$ 都属于 $\mathfrak{S}_m$，所以根据测度 m 的可加性

$$\sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} m(B_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^{r} m(C_j),$$

这就是所要证明的.

由等式(2)所确定的函数 $m'(A)$ 的非负性和可加性是显而易见的，于是测度 m 在环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 上的扩张 m' 的存在性就得到了证明.

为了证明它的唯一性，需注意，根据测度扩张的定义，如果 $A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$，其中 B_k 是 $\mathfrak{S}_m$ 里两两互不相交的集，那么对于测度 m 在环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 上的任一扩张 $\widetilde{m}$ 都有

$$\widetilde{m}(A) = \sum_k \widetilde{m}(B_k) = \sum_k m(B_k) = m'(A),$$

即测度 $\widetilde{m}$ 与由等式(2)所确定的测度 m'完全相同. 定理得证.

按本质来说,我们在这里用抽象的术语重复了在 §1 里将测度从矩形扩张到初等集上去的那套方法. 初等集类是矩形半环上的极小环.

从测度的可加性和非负性可推出下面这些差不多是极为明显的但却是重要的性质.

定理 2 设 m 是给定在某个环 $\mathfrak{R}_m$ 上的测度,而集 $A, A_1, \cdots, A_n$属于 $\mathfrak{R}_m$. 于是

Ⅰ. 如果 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$ 并且当 $i \neq j$ 时 $A_i \cap A_j = \varnothing$,那么

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leqslant m(A).$$

Ⅱ. 如果 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \supset A$,那么

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \geqslant m(A).$$

特别,如果 $A \subset A'$并且 $A, A' \in \mathfrak{R}$,那么 $m(A) \leqslant m(A')$.

事实上,如果 $A_1, \cdots, A_n$两两互不相交并且包含在 A 里,那么根据测度的可加性

$$m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) + m\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right).$$

由于 $m\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant 0$,由此得到性质Ⅰ.

其次,对于任何 $A_1, A_2 \in \mathfrak{R}_m$ 有

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) - m(A_1 \cap A_2) \leqslant m(A_1) + m(A_2).$$

根据数学归纳法由此得到

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(A_k).$$

最后,又根据测度的可加性从 $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$推出

$$m(A) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) - m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \setminus A\right) \leqslant m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right).$$

由此根据上述不等式就推出性质Ⅱ.

对于给定在集环上的测度我们证明了性质Ⅰ和Ⅱ. 但若测度原来是给定在半环

上,那么在将它扩张到环上时,属于原来半环的那些集的测度并不改变. 因此性质 I 和 II 对半环上的测度也是正确的.

3. σ 加性 在分析学的各种问题里不仅需要考虑集的有限并集而且需要考虑集的可数并集. 我们加之于测度(定义 1)的可加性与此条件有联系,自然要用更强的要求 σ 加性来代替.

定义 3 测度 m 称为可数可加的或 σ 可加的,是指如果对于属于其定义域 $\mathfrak{S}_m$ 并且满足条件

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \text{当 } i \neq j \text{ 时 } A_i \cap A_j = \varnothing$$

的任何集 $A, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,等式

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

成立.

我们在 §1 里所构造的勒贝格平面测度是 σ 可加的(定理 8). 另外更自然的 σ 可加的测度的例子可以构造如下:设

$$X = \{x_1, x_2, \cdots\}$$

为一任意可数集并且 $p_n > 0$ 是这样的一些数,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

对应的可测集类由集 X 的一切子集所构成. 对于每一个 $A \subset X$ 令

$$m(A) = \sum_{x_n \in A} p_n.$$

容易验证,$m(A)$ 是 σ 可加的测度,并且 $m(X) = 1$. 这个例子自然会出现在与概率论有联系的许多问题里.

我们来指出一个是可加但非 σ 可加的测度的例子. 设 X 是闭区间 $[0,1]$ 的有理点集,而 $\mathfrak{S}_m$ 是由集 X 与 $[0,1]$ 里的任意开区间 (a,b),闭区间 $[a,b]$ 或半开区间 $(a,b]$, $[a,b)$ 的交集所构成的集. 容易看出,$\mathfrak{S}_m$ 为一半环. 对于每一个这样的集 $A_{ab} \in \mathfrak{S}_m$,令

$$m(A_{ab}) = b - a.$$

这个测度是可加的,但它不是 σ 可加的,因为 $m(X) = 1$,同时,X 又是一个由可数个孤立点所构成的并集,而每一个孤立点的测度为 0.

在这一节和下一节里我们所要考察的测度,将假定是 σ 可加的.

定理 3 如果定义在某一半环 $\mathfrak{S}_m$ 上的测度 m 是 σ 可加的,那么测度 m 在环

$\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$上的扩张$\mu$也是$\sigma$可加的.

证明 设$A\in\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$,$B_n\in\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$,$n=1,2,\cdots$,且

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,$$

并且当$s\neq r$时$B_s\cap B_r=\varnothing$. 于是在$\mathfrak{S}_m$里就有这样的集A_j和B_{ni}存在,使得

$$A=\bigcup_j A_j, B_n=\bigcup_i B_{ni}, n=1,2,\cdots,$$

并且这些等式每一个右端的那些集都是两两互不相交的,而对i与j求和所得到的并集都是有限集(第一章§5定理3).

设$C_{nij}=B_{ni}\cap A_j$. 容易看出,诸集C_{nij}两两互不相交,并且

$$A_j=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_i C_{nij}, B_{ni}=\bigcup_j C_{nij}.$$

因此根据测度m在$\mathfrak{S}_m$上的σ加性就有

$$m(A_j)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_i m(C_{nij}), \tag{3}$$

$$m(B_{ni})=\sum_j m(C_{nij}). \tag{4}$$

而根据在$\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$上的测度$\mu$的定义

$$\mu(A)=\sum_j m(A_j), \tag{5}$$

$$\mu(B_n)=\sum_i m(B_{ni}). \tag{6}$$

从(3)-(6)就可推出$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)$.(这儿对$i$与$j$分别求和所得到的级数之和都是有限的,并且所有这些关于n的级数都是收敛的.)

现在我们来证明σ可加测度的下述基本性质,它们是定理2中所陈述的那些性质推广到可数和的情形. 既然我们揭示了测度扩张到环上时仍保持测度的σ加性,因此可以从一开始就认为测度是给定在某个环$\mathfrak{R}$上的.

定理4 设测度m是σ可加的而集$A,A_1,\cdots,A_n,\cdots$属于环$\mathfrak{R}$. 于是

Iσ 如果$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\subset A$而当$i\neq j$时$A_i\cap A_j=\varnothing$,那么

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(A_k)\leqslant m(A);$$

Ⅱσ(可数半加性)　如果 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset A$,那么

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \geqslant m(A).$$

证明　如果所有的 A_k 都不相交并且包含在 A 里,那么,根据性质Ⅰ(定理2),对于任何 n 都有

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leqslant m(A).$$

当 $n \to \infty$ 时取极限就得到定理的第一个结论.

现在我们来证明第二个结论. 因为 $\mathfrak{R}$ 是一个环,集

$$B_n = (A_n \cap A) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

属于 $\mathfrak{R}$. 因为

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, B_n \subset A_n,$$

而诸集 B_n 两两互不相交,所以

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

注　刚才所证明的定理的结论Ⅰσ 显然不依赖于所论测度的 σ 加性;它对于任何加性的测度都保持正确. 反之,结论Ⅱσ 主要利用了测度的 σ 加性. 事实上,在上面所举的可加的但非 σ 可加的测度的例子中,测度为 1 的全空间 X 却被那种每一点的测度为 0 的单点集的可数和集所覆盖. 此外,不难确信性质Ⅱσ 事实上与 σ 加性等价. 事实上,设 μ 为某一确定在半环 $\mathfrak{S}$ 上的测度. 设集 $A, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 属于 $\mathfrak{S}$, $A = \bigcup_k A_k$ 并且所有的 A_k 两两互不相交. 于是根据性质Ⅰσ(正如我们已看出任何测度都具有性质Ⅰσ)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu(A).$$

如果 μ 也具有性质Ⅱσ,那么(因为 A_k 的全体覆盖住 A)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geqslant \mu(A).$$

这样一来

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

验证测度的可数半加性(性质Ⅱσ)往往比直接确定它的 σ 加性要简单些.

§3. 测度的勒贝格扩张

1. 给定在一个含有单位集的半环上的测度的勒贝格扩张　如果给定在半环 $\mathfrak{S}_m$上的测度 m 仅具有可加的性质(但非 σ 加性)，那么将它扩张到 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 上去就在相当大程度上穷尽了所有这种测度从原始的半环到更广泛的集类的推广的所有可能性. 要是所论测度是 σ 可加的，那么测度 m 可以从 $\mathfrak{S}_m$ 推广到比环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 更为广泛得多的集类上去，并且在某种意义上是最大的集类上去. 这可以利用所谓的勒贝格扩张来实现. 首先我们来讨论给定在一个含有单位集的半环上的测度的勒贝格扩张. 一般情形将在下一段中讨论.

设在某一含有单位集 E 的半环集 $\mathfrak{S}_m$ 上给定了 σ 可加测度 m. 在由集 E 的一切子集所构成的集族 $\mathfrak{U}$ 上定义函数 $\mu^*(A)$(外测度)如下.

定义 1　数

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(B_n) \tag{1}$$

称为集 $A \subset E$ 的外测度，其中下确界是对集 $B_n \in \mathfrak{S}_m$ 里所有能覆盖集 A 的有限覆盖或可数覆盖取的.

外测度的下述性质在整个今后的理论体系中占有重要的地位.

定理 1(可数半加性)　如果

$$A \subset \bigcup_n A_n,$$

其中 $\{A_n\}$ 为有限集族或可数集族，那么

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n).$$

这个结论的证明与 §1 定理 3 的证明完全相同，因而不再重复.

定义 2　集 A 称为(按勒贝格意义)可测，如果对于任何 $\varepsilon > 0$，总可以找到这样的 $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$，使得

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

仅在可测集上定义的函数 μ^* 称为勒贝格测度(或简称为测度)并用 μ 表之. 显然，$\mathfrak{S}_m$ 里和 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 里的所有的集都是可测的. 这时如果 $A \in \mathfrak{S}_m$，那么

$$\mu(A) = m(A).$$

这个等式的证明完全与关于平面上的集的证明类似.

从等式

$$A_1 \triangle A_2 = (E \backslash A_1) \triangle (E \backslash A_2)$$

可推出,如果 A 是可测的,那么它的余集也是可测的.

现在我们来揭示可测集的一些基本性质并在其上定义勒贝格测度.

定理 2 一切可测集所构成的集族 $\mathfrak{M}$ 是一个环.

证明 因为永远有

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \backslash (A_1 \backslash A_2)$$

和

$$A_1 \cup A_2 = E \backslash [(E \backslash A_1) \cap (E \backslash A_2)].$$

只需如下证明就行了. 如果 $A_1 \in \mathfrak{M}, A_2 \in \mathfrak{M}$,那么 $A = A_1 \backslash A_2 \in \mathfrak{M}$.

设 A_1 和 A_2 是可测的. 于是存在这样的 $B_1 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 和 $B_2 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$,使得

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad 和 \quad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $B = B_1 \backslash B_2 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 和利用关系式

$$(A_1 \backslash A_2) \triangle (B_1 \backslash B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$

就得到

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性,由此就可推出集 A 的可测性.

注 显然 E 为环 $\mathfrak{M}$ 的单位集,这样一来,$\mathfrak{M}$ 就是一个集代数.

定理 3 在可测集族 $\mathfrak{M}$ 上函数 $\mu(A)$ 是可加的.

这个定理的证明是 §1 定理 6 的证明的逐字逐句的重复.

定理 4 在可测集族 $\mathfrak{M}$ 上函数 $\mu(A)$ 是 σ 可加的.

证明 设

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A, A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{M}$,当 $i \neq j$ 时 $A_i \cap A_j = \varnothing$. 根据定理 1

$$\mu(A) \leqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{2}$$

而根据定理 3,对于任何 N 都有

$$\mu(A) \geqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n).$$

由此

$$\mu(A) \geqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{3}$$

从(2)和(3)就可推出定理的结论.

在§1里讨论勒贝格平面测度时我们证明了不仅可测集的有限和集与有限交集是可测的,而且可测集的可数和集与可数交集也是可测的. 这个结论在一般情形下也是正确的,即下面的定理是正确的.

定理 5 按勒贝格意义可测的集族 $\mathfrak{M}$ 是一个含有单位集 E 的 σ 代数.

证明 因为

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n),$$

又因为可测集的余集是可测的,所以只需如下证明就行了. 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 都属于 $\mathfrak{M}$,那么 $A = \bigcup_n A_n$ 也属于 $\mathfrak{M}$. 在§1定理7中关于平面集所进行的这个结论的证明对于一般情形仍然可以逐字逐句地搬过来.

正如平面勒贝格测度的情形一样,从测度的 σ 加性就可以推出它的连续性,即如果 μ 是一个定义在 σ 代数上的 σ 可加测度,$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ 是一个单调递减可测集套,并且

$$A = \bigcap_n A_n,$$

那么

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n),$$

而如果 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ 是一个单调递增可测集套,并且

$$A = \bigcup_n A_n,$$

那么

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

在§1定理9对于平面测度所给出的证明可以一字不改地用于一般情形.

这样,我们揭示了集族 $\mathfrak{M}$ 是一个 σ 代数而在其上定义的函数 $\mu(A)$ 具有 σ 可加的测度所具有的一切性质. 因而下列定义是正确的.

定义 3 定义在可测集族 $\mathfrak{M}$ 上的函数 $\mu(A)$ 称为测度 m 的勒贝格扩张 $\mu = L(m)$,$\mu(A)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上与外测度 $\mu^*(A)$ 完全相同.

2. 给定在不含单位集的半环上的测度扩张 如果半环 $\mathfrak{S}_m$ 不含有单位集,在其上定义了原始测度 m,那么在上一段中所阐述的勒贝格扩张的构造就要作些为数不

多的修改. 外测度的定义 1 仍旧保持不变,但外测度 μ^* 仅定义在 A 的这样的集族 S_{μ^*} 上,对于每一个 A,$\mathfrak{S}_m$ 里存在一个具有有限和 $\sum_n m(B_n)$ 的集 $\bigcup_n B_n$ 作为其覆盖. 可测性定义无需作任何修改仍旧保持不变.

定理 2 到定理 4 和最后的定义 3 仍旧保持正确. 关于存在单位集的假设在定理 2 的证明中需要用到它. 为了给出一般情形下定理 2 的证明,必须独立地证明下述命题:从 $A_1 \in \mathfrak{M}, A_2 \in \mathfrak{M}$ 就可推出 $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{M}$. 但这个结果可从下述包含关系推出

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2).$$

当 $\mathfrak{S}_m$ 不包含有单位集的那种情形,定理 5 就由下面的定理 6 来代替.

定理 6 对于任一原始测度 m,勒贝格可测集族 $\mathfrak{M}$ 是一个 σ 环. 并且当且仅当测度 $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$ 小于某一与 N 无关的常数时,由可测集 A_n 所构成的可数并集 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 才是可测的.

这个结论的证明留给读者去完成.

注 既然现在我们所论及的测度仅取有限值,因此后面这个条件的必要性是很明显的.

由定理 6 可推出下面的事实.

推论 由某一固定集 $A \in \mathfrak{M}$ 的一切子集 $B \in \mathfrak{M}$ 所构成的勒贝格可测集族 $\mathfrak{M}_A$ 构成了一个 σ 代数.

例如,由任一闭区间 $[a,b]$ 的一切子集所构成的勒贝格可测集族(通常意义下直线上的勒贝格测度)是一个 σ 集代数.

在结束本段之前我们还要指出勒贝格测度的一个性质.

定义 4 对于测度 μ,如果从 $\mu(A)=0$ 和 $A' \subset A$ 就可推出 A' 是可测的. 那么就称测度 μ 为一完全测度.

显然,这时 $\mu(A')=0$. 不需费多大气力就可以证明,任一测度的勒贝格扩张是一个完全测度. 这个结论可以推导如下. 对于 $A' \subset A$ 和 $\mu(A)=0$ 必然有 $\mu^*(A')=0$,而任何 $\mu^*(C)=0$ 的集 C 是可测的,因为 $\varnothing \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$,所以

$$\mu^*(C \triangle \varnothing) = \mu^*(C) = 0.$$

σ 代数上的每一 σ 可加的测度,只要在每一测度为零之集的任一子集上令其等于零,就可以将它扩张成为一个完全测度.

补注 1 关于原始的测度 m 是给定在半环上(而非给定在某一任意的集族上)的这个假设对于它的扩张的单值性是重要的. 考虑单位正方形里的竖矩形族和横矩形族,即这样的一些矩形,它们的长或宽等于 1(图 18),并且取每一个这样的矩形的面积作为其测度. 这样的测度扩张到由这些矩形所生成的代数(尤其是 σ 代数)上就可能是非单值的(请指出至少有两种不同的扩张).

补注 2 现在我们来指出测度的勒贝格扩张过程与度量空间的完备化过程之间的联系. 必须

注意，$m'(A\triangle B)$可以取作环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 里的元 A,B 之间的距离. 于是 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 就变成了一个度量空间（一般说来它是一个非完备的度量空间），并且它的完备化空间恰巧是由一切可测集所构成.（但是这时从度量观点来看，如果 $\mu(A\triangle B)=0$，那么集 A 和集 B 便没有什么区别.）

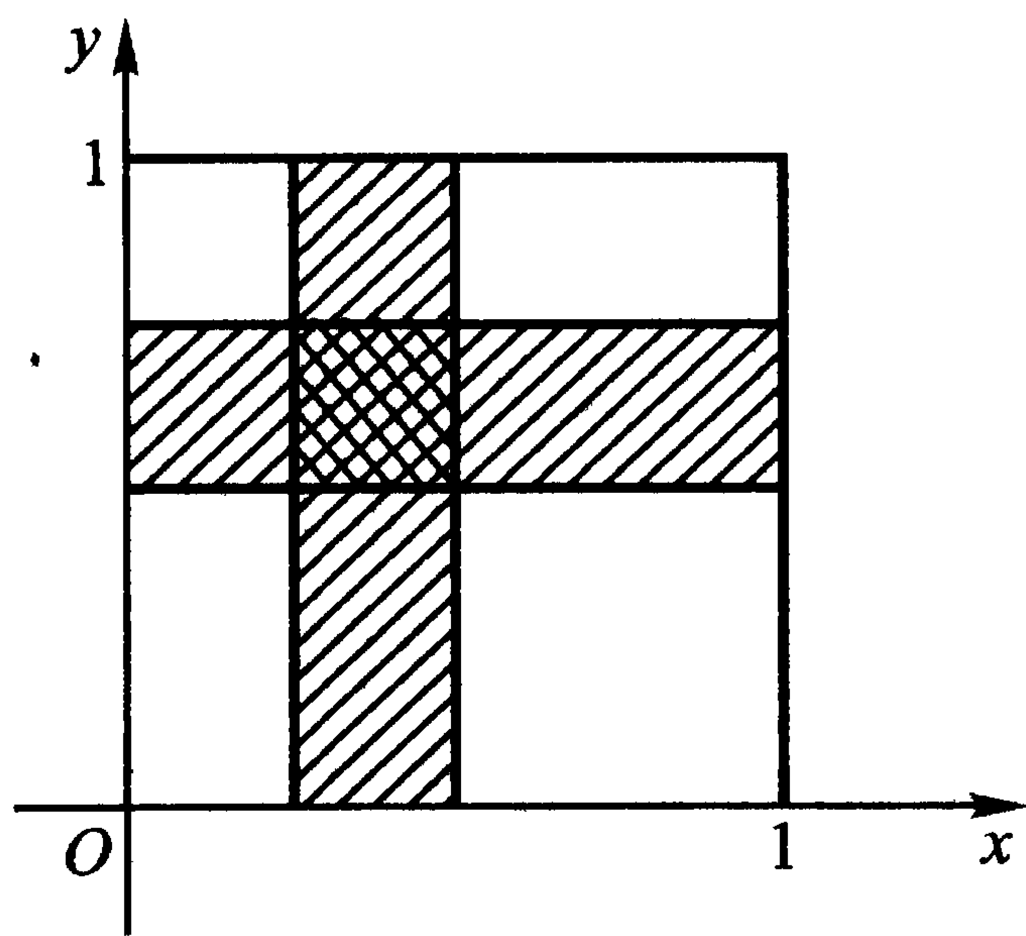


图　18

习题 1　设测度 m 给定在 X 里的集半环 $\mathfrak{S}_m$上（包含有单位集），而 μ^* 为其外测度. 证明：集 A 当且仅当它具有下述性质，即按卡拉泰奥多里（Carathéodory）意义可测：对于任一子集 $Z\subset X$ 有下列等式

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z\cap A) + \mu^*(Z\backslash A)$$

成立时称集 A（按勒贝格意义）可测.

习题 2　设 σ 可加测度 m 给定在一个包含有单位集 $X(m(X)=1)$ 的环 $\mathfrak{R}$ 上. 对于每一 $A\subset X$ 除引入外测度 μ^* 以外还同时引入内测度 μ_*，令

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(X\backslash A).$$

甚易看出，恒有 $\mu_*(A)\leqslant\mu^*(A)$. 证明：当且仅当集 A 可测时（在定义 2 的意义下）

$$\mu_*(A) = \mu^*(A). \tag{$*$}$$

当测度是给定在包含有单位集的环上的那种情形，等式（$*$）常作为集的可测性定义.

3. 在 σ 有限测度的情形下可测性概念的扩充　如果原始的测度 m 是给定在空间 X 中的某一不包含单位集的半环上，那么上面所引入的集的可测性的定义显得过于狭窄. 例如，如果 X 是个平面，那么这样的一些集，诸如全平面、带形域、圆的外部等，就具有无穷面积，按上述定义，这些集合都不属于可测集. 自然地扩充可测性概念，容许测度也可以取无穷值，使得可测集的全体，与原始的测度是给定在一个包含有单位集的半环的情形那样，是个 σ 代数（而不仅是个 δ 环）.

同时我们仅限于考虑实际上是最重要的情形，即所谓 σ 有限测度，尽管相应的构造可以移用于一般情形.

设 σ 可加测度 m 是给定在集 X 的子集所构成的某一半环 $\mathfrak{S}_m$上. 我们说这个测度是 σ 有限的，如果整个 X 可以表示为 $\mathfrak{S}_m$里之集的可数和集（但非 $\mathfrak{S}_m$里之集的有限和集）. 在平面的一切矩形上所定义的面积可以作为 σ 有限测度的一个例子. 用下述方法可以得到一个不是 σ 有限测度的简单例子. 设在闭区间$[0,1]$上给定了某一函数$f(x)$. 对于闭区间$[0,1]$的每一有限子集 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，令 $\mu(A)=\sum f(x_i)$. 如果$f(x)\neq 0$ 的那些点 x 所构成的集是不可数的，那么这样的测度在$[0,1]$上将不是 σ 有限的.

这样，设 m 是 X 里 σ 可加的与 σ 有限的测度，并且定义在半环 $\mathfrak{S}_m$上：设 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i$，$B_i\in\mathfrak{S}_m$. 从半环 $\mathfrak{S}_m$ 转移到由它所生成的环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$上，然后用 $B_k\backslash\bigcup\limits_{i=1}^{k-1}B_i$来代替

B_k，可以认为，X 表示为两两互不相交的可测集（我们仍旧用 $B_1, B_2, \cdots$ 来表示它们）的可数和集. 对 m 应用上一段所阐述的勒贝格扩张过程，我们就得到定义在 δ 环 $\mathfrak{M}$ 上的测度 μ. 设 $B \in \mathfrak{M}$，而 $\mathfrak{M}_B$ 是 $\mathfrak{M}$ 里所有包含了 B 的集所构成的集族：

$$\mathfrak{M}_B = \{C : C \in \mathfrak{M}, B \subset C\}.$$

于是 $\mathfrak{M}_B$ 就是一个包含有单位集 B 的 σ 代数（参看定理 6 的推论）.

现在我们来考虑与每一个 B_i 有可测交集的集 A 的全体 $\mathfrak{U}$：

$$A \cap B_i \in \mathfrak{M}_{B_i}.$$

换句话说，$A \in \mathfrak{U}$ 意味着 A 可表为形式

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \text{其中 } A_i \in \mathfrak{M}_{B_i}. \tag{4}$$

集族 $\mathfrak{U}$ 是一个 σ 代数（验证之！），我们称它为 σ 代数 $\mathfrak{M}_{B_i}$ 的直和. 我们称构成 σ 代数 $\mathfrak{U}$ 的集(4)为可测的并且用下述方式来定义每一个这样的 A 的测度 $\tilde{\mu}$：如果

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \in \mathfrak{M}_{B_i},$$

那么

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

由于每一个集的测度是非负的，这里右端的级数收敛于某一非负值或发散于 $+\infty$.

定理 7 在上面所作的这些假设下，下列三条结论是正确的：

1) σ 代数 $\mathfrak{U}$ 和测度 $\tilde{\mu}$ 与 $\mathfrak{M}$ 里满足条件 $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = X$ 的那些互不相交的集 B_i 所构成的集族的取法无关；

2) 测度 $\tilde{\mu}$ 在 $\mathfrak{U}$ 上是 σ 可加的；

3) $\tilde{\mu}(A) < \infty$ 的那些集 $A \in \mathfrak{U}$ 的全体与 δ 环 $\mathfrak{M}$ 完全相同并且在这个 δ 环上 $\tilde{\mu} = \mu$.

证明 1) 首先我们注意，$A \in \mathfrak{U}$ 的充要条件为：对于任一 $C \in \mathfrak{M}$ 都有 $A \cap C \in \mathfrak{M}$. 这个条件的充分性是明显的，因为它表示，特别有，$A \cap B_i \in \mathfrak{M} (i = 1, 2, \cdots)$. 我们来验证它的必要性. 设 $A \in \mathfrak{U}$ 和 $C \in \mathfrak{M}$. 令 $C_i = C \cap B_i$. 于是

$$A \cap C = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i).$$

因为对于每一个 N 都有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N}(A\cap C_i)\right)\leqslant\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N}C_i\right)\leqslant\mu(C),$$

所以根据定理 6,集 $A\cap C$ 是可测的.

设$\{B_i\}$和$\{B_j^*\}$是 $\mathfrak{M}$ 里这样两个互不相交的集族,使得$\cup B_i=\cup B_j^*=X$. 如果 $A\in\mathfrak{U}$,那么由于 $\mathfrak{M}$ 里每个集的测度 μ 是非负的,等式

$$\sum_i\mu(A\cap B_i)=\sum_{i,j}\mu(A\cap B_i\cap B_j^*)=\sum_j\mu(A\cap B_j^*)$$

成立,即根据集族$\{B_i\}$或$\{B_j^*\}$来定义$\tilde{\mu}(A)$,我们都得到同一结果.

2) 设 $A^{(1)},A^{(2)},\cdots\in\mathfrak{U}$,$A^{(k)}\cap A^{(l)}=\varnothing$,$k\neq l$ 并且 $A=\bigcup\limits_k A^{(k)}$. 于是根据测度 μ 在 $\mathfrak{M}$ 上的 σ 加性有

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(A)&=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A\cap B_i)=\sum_{i,k=1}^{\infty}\mu(A^{(k)}\cap B_i)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A^{(k)}\cap B_i)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\mu}(A^{(k)}),\end{aligned}$$

即 $\tilde{\mu}$ 是 σ 可加的.

最后,3)可直接从定理 6 推出.

注　上面所阐述的可测性概念的扩充(允许测度取无穷值)可以无需假设原始的测度的 σ 有限性,例如,可按下述方式来扩充.

设 X 为某一空间而 $\mathfrak{M}$ 为其子集所构成的某个 δ 环. 集 $A\subset X$ 称为对 $\mathfrak{M}$ 是可测的,如果对于任一 $B\in\mathfrak{M}$ 都有 $A\cap B\in\mathfrak{M}$. 不难验证,对 $\mathfrak{M}$ 是可测的集族 $\mathfrak{U}$ 是一个包含有单位集 X 的 σ 代数,并且,如果 $\mathfrak{M}$ 本身就是那个包含有同一单位集 X 的 σ 代数,那么 $\mathfrak{U}=\mathfrak{M}$.

今设在 X 里给定了某一 σ 可加的测度 μ,根据第 2 段,我们可以认为它已经扩张到某个 δ 环 $\mathfrak{M}$ 上;又设 $\mathfrak{U}$ 是 X 中对 $\mathfrak{M}$ 可测的集的全体. 集 $A\in\mathfrak{U}$ 称为零集,如果对于任一 $B\in\mathfrak{M}$ 都有 $\mu(A\cap B)=0$. 现在按下述方式在 $\mathfrak{U}$ 上定义测度 $\tilde{\mu}$(一般说来也可取无穷值):如果对于给定的 $A\in\mathfrak{U}$ 有这样的 $B\in\mathfrak{M}$ 存在,使得 $A\triangle B$ 为一零集,那么令

$$\tilde{\mu}(A)=\mu(B).$$

对于所有其余的 $A\in\mathfrak{U}$ 令

$$\tilde{\mu}(A)=\infty.$$

不难验证,测度 $\tilde{\mu}$ 是 σ 可加的并且在 δ 环 $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{U}$ 上 $\tilde{\mu}$ 与 μ 完全相同.

4. 按约当(Jordan)意义的测度扩张　本章 §2 里所考虑的测度仅满足可加性条件,我们证明了,每一个这样的测度 m 可以从半环 $\mathfrak{S}_m$ 扩张到由这些半环所生成的极小环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 上. 但是将测度推广到比 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 更为一般的某种环上去也是可能的. 相应的构造称为按约当意义的测度扩张①. 古希腊的数学家早就有这种能适用于一系列特殊情形的构造思想,用测度为已知的集 A'

---

① 约当,法国数学家(1838~1922).

和 A''分别从里面和外面去近似地"量度"集 A,即使得

$$A' \subset A \subset A''.$$

设 m 是给定在某个环 $\mathfrak{R}$ 上的测度.

定义 5 如果对于任何 $\varepsilon>0$ 在环 $\mathfrak{R}$ 里都有集 A'和 A''满足条件

$$A' \subset A \subset A'', \quad m(A''\backslash A') < \varepsilon,$$

那么就称集 A 为约当意义下的可测集(简称为约当可测集).

下列结论是正确的.

定理 8 约当意义下的可测集族 $\mathfrak{R}^*$ 是一个环.

设 $\mathfrak{U}$ 是这样的一些集 A 所构成的集族,对于这些集 A,$\mathfrak{R}$ 里存在集 $B\supset A$,对于 $\mathfrak{R}$ 里任何 A,按照定义令

$$\bar{\mu}(A) = \inf_{B\supset A} m(B),$$

$$\underline{\mu}(A) = \sup_{B\subset A} m(B).$$

函数 $\bar{\mu}(A)$ 和 $\underline{\mu}(A)$ 分别称为集 A 的"外"约当测度和"内"约当测度. 显然,恒有

$$\underline{\mu}(A) \leqslant \bar{\mu}(A).$$

定理 9 环 $\mathfrak{R}^*$ 与那些 $\underline{\mu}(A)=\bar{\mu}(A)$ 的集 $A\in\mathfrak{U}$ 所构成的集族完全相同.

对于 $\mathfrak{U}$ 里的集有下列诸定理成立.

定理 10 如果 $A\subset\bigcup_{k=1}^{n} A_k$,那么 $\bar{\mu}(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\bar{\mu}(A_k)$.

定理 11 如果 $A_k\subset A(k=1,2,\cdots,n)$ 和 $A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$,那么

$$\underline{\mu}(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\underline{\mu}(A_k).$$

现在我们在域

$$\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{R}^*$$

上定义函数 μ 为外测度和内测度的公共值:

$$\mu(A) = \underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A).$$

从定理 10 和定理 11 以及从下面这个明显的事实,对于 $A\in\mathfrak{R}$,

$$\bar{\mu}(A) = \underline{\mu}(A) = m(A),$$

就可推出下列结论.

定理 12 函数 $\mu(A)$ 是测度并且是测度 m 的扩张.

所阐述的这种构造对定义在环上的任何测度 m 都适用. 特别是它可以适用于平面集. 这时可取初等集的全体(即矩形的有限和集)作为原始环. 初等集环显然依赖于平面坐标系的选择(取矩形的边与坐标轴平行). 当转到约当平面测度时这种对坐标系的选择的依赖性就消失了:从任一坐标系 $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2\}$ 出发,它与原始坐标系 $\{x_1,x_2\}$ 通过正交变换

$$\bar{x}_1 = \cos\alpha\cdot x_1 + \sin\alpha\cdot x_2 + a_1,$$

$$\bar{x}_2 = -\sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 + a_2$$

相联系,我们会得到相同的约当测度. 这个事实可从下面这一般的定理推出.

定理 13　两个定义在环 $\mathfrak{R}_1$ 和 $\mathfrak{R}_2$ 上的测度 m_1 和 m_2 的约当扩张 $\mu_1 = j(m_1)$ 和 $\mu_2 = j(m_2)$ 完全相同的充要条件为

$$\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{S}_{\mu_2}, \text{在 } \mathfrak{R}_1 \text{ 上 } m_1(A) = \mu_2(A),$$

$$\mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{S}_{\mu_1}, \text{在 } \mathfrak{R}_2 \text{ 上 } m_2(A) = \mu_1(A).$$

如果原始测度 m 不是定义在一个环上而是定义在一个半环 $\mathfrak{S}_m$ 上,那么先将 m 扩张到环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 上然后再按约当意义扩张,最终就得到测度

$$j(m) = j(r(m)).$$

自然称该测度为它的约当测度扩张.

5. 测度扩张的单值性　如果集 A 按约当意义对测度 μ 是可测的,即属于 $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}^*(\mathfrak{S}_m)$,那么对于测度 m 的任何一个定义在 $\mathfrak{R}^*$ 上的扩张测度 $\bar{\mu}$,值 $\bar{\mu}(A)$ 与约当扩张 $J = j(m)$ 的值 $J(A)$ 完全相同. 可以证明,测度 m 越出按约当意义可测的集族 $\mathfrak{R}^*$ 的范围以外的那种扩张将不再是单值的. 这个定理可以更确切地表述如下. 对于某一集 A,如果

1) 有测度 m 的测度扩张 μ 存在,μ 是定义在集 A 上的;

2) 对于任何两个这样的测度 μ_1 和 μ_2 都有

$$\mu_1(A) = \mu_2(A),$$

那么就称集 A 为测度 m 的单值性集.

下面的定理成立:测度 m 的单值性集族与按约当意义对测度 m 是可测的集族完全相同,即与环 $\mathfrak{R}^*$ 完全相同.

然而,如果只考虑那些 σ 可加的测度及其(σ 可加的)扩张,那么一般说来,单值性集族就要广泛得多.

因为正是 σ 可加的测度这种情形最重要,所以我们引入下述定义.

定义 6　对于某一集 A,如果

1) 对 A 定义的测度 m 的 σ 可加扩张 λ 存在(即使得 $A \in \mathfrak{S}_\lambda$);

2) 对于每两个这样的 σ 可加扩张 λ_1 和 λ_2 下面这个等式是正确的:

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A),$$

那么就称集 A 为 σ 可加测度 m 的 σ 单值性集. 如果 A 是 σ 可加测度 μ 的 σ 单值性集,那么根据定义,对于测度 μ 的定义在 A 上的 σ 可加扩张有唯一可能的值 $\lambda(A)$ 存在.

容易看出,每一个按约当意义可测的集 A,按勒贝格意义也是可测的(但是,反过来不成立!试举例说明.),并且它的约当测度与勒贝格测度完全相同. 由此就可直接推出,σ 可加测度的约当扩张是 σ 可加的.

每一个按勒贝格意义可测的集 A 是原始测度 m 的 σ 单值性集. 事实上,对任何 $\varepsilon > 0$,对于 A,存在这样的 $B \in \mathfrak{R}$,使得 $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. 无论怎样定义测度 m 对于 A 的扩张 λ,都有

$$\lambda(B) = m'(B),$$

因为测度 m 在 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 上的扩张 m' 是单值的. 其次

$$\lambda(A\triangle B) \leqslant \mu^*(A\triangle B) < \varepsilon,$$

从而

$$|\lambda(A) - m'(B)| < \varepsilon.$$

这样一来,对于测度 m 的任何两个 σ 可加扩张 λ_1 和 λ_2 有

$$|\lambda_1(A) - \lambda_2(A)| < 2\varepsilon.$$

由此,由于 $\varepsilon>0$ 的任意性

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A).$$

可以证明,按勒贝格意义可测的集族穷尽了原始测度 m 的所有 σ 单值性集族.

设 m 是某一具有定义域 $\mathfrak{S}$ 的 σ 可知测度而 $\mathfrak{M}=L(\mathfrak{S})$ 是它的勒贝格扩张的定义域. 容易确信,只要半环 $\mathfrak{S}_1$ 满足条件

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{M},$$

恒有

$$L(\mathfrak{S}_1) = L(\mathfrak{S}).$$

§4. 可测函数

1. 可测函数的定义及其基本性质 设 X 和 Y 是两个任意集,从它们里面可以分别选出两个子集族 $\mathfrak{S}_X$ 和 $\mathfrak{S}_Y$. 对于以 X 为定义域以 Y 为值域的抽象函数 $y=f(x)$,如果从 $A\in\mathfrak{S}_Y$ 就可推出 $f^{-1}(A)\in\mathfrak{S}_X$,那么就称 $y=f(x)$ 为—$(\mathfrak{S}_X,\mathfrak{S}_Y)$ 可测函数.

例如,如果就取数直线 $\mathbf{R}$ 作为 X 和 Y(即看作实变数的实函数),而取 $\mathbf{R}$ 的一切开子集族(或一切闭子集族)作为 $\mathfrak{S}_X$ 和 $\mathfrak{S}_Y$,那么可测性的上述定义就变成了连续性的定义. 取所有的博雷尔集族作为 $\mathfrak{S}_X$ 和 $\mathfrak{S}_Y$,我们就得到所谓的 B 可测函数(或博雷尔可测函数).

在以后我们感兴趣的主要是从积分论观点来看可测性概念. 在这种看法下,定义在某一集 X 上的数值函数(在 X 上给定了 σ 可加测度 μ)的可测性概念就具有重要的意义. 并且取 X 的一切对 μ 为可测的集所构成的集族作为 $\mathfrak{S}_X$,而取直线上的一切 B 集的全体作为 $\mathfrak{S}_Y$. 由于每个 σ 可加测度可以扩张到某一 σ 代数上去,自然一开头就可以假定 $\mathfrak{S}_\mu$ 是一个 σ 代数. 这样一来,对于数值函数我们就得到下述可测性定义.

定义 1 设 X 是一个在其上给定了一个在 σ 代数 $\mathfrak{S}_\mu$ 上有定义的 σ 可加测度 μ 的集. 实函数 $f(x)$ 在 X 上称为 μ 可测的,如果对于数直线上的每一个博雷尔集 A,都有

$$f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_\mu.$$

类似地,定义在 X 上的复函数 $\varphi(x)$ 称为 μ 可测的,如果对于复平面的每一个博雷尔子集都有 $\varphi^{-1}(A)\in\mathfrak{S}_{\mu}$. 容易验证,这等价于该函数的实部和虚部分别是 μ 可测的.

定义在直线上的数值函数称为是博雷尔可测的(或 B 可测的),如果每一个博雷尔集的原象是一个博雷尔集.

定理 1　设 X、Y 与 Z 是三个任意集,从它们里面分别挑选出子集族 $\mathfrak{S}_X$、$\mathfrak{S}_Y$ 与 $\mathfrak{S}_Z$,又设定义在 X 上的函数 $y=f(x)$ 是 $(\mathfrak{S}_X,\mathfrak{S}_Y)$ 可测的,而定义在 Y 上的函数 $z=g(y)$ 是 $(\mathfrak{S}_Y,\mathfrak{S}_Z)$ 可测的. 于是函数 $z=\varphi(x)\equiv g(f(x))$ 是 $(\mathfrak{S}_X,\mathfrak{S}_Z)$ 可测的.

简言之,可测函数的复合函数是可测函数.

证明　如果 $A\in\mathfrak{S}_Z$,那么根据函数 g 的 $(\mathfrak{S}_Y,\mathfrak{S}_Z)$ 可测性我们有:$g^{-1}(A)=B\in\mathfrak{S}_Y$. 又根据函数 f 的 $(\mathfrak{S}_X,\mathfrak{S}_Y)$ 可测性,集 $f^{-1}(B)$ 属于 $\mathfrak{S}_X$,即 $f^{-1}(g^{-1}(A))=\varphi^{-1}(A)\in\mathfrak{S}_X$,即函数 φ 是 $(\mathfrak{S}_X,\mathfrak{S}_Z)$ 可测的.

推论　μ 可测数值函数的博雷尔函数是 μ 可测的. 特别,μ 可测的函数的连续函数是 μ 可测的.

往后,当不会引起误解时,我们将"μ 可测性"简写为"可测性".

定理 2　实函数 $f(x)$ 是可测的充要条件为:对于任何实数 c,集 $\{x:f(x)<c\}$ 是可测的.

证明　条件的必要性是显然的,因为半直线 $(-\infty,c)$ 是一个博雷尔集. 为了证明条件的充分性,首先注意,由一切半直线 $(-\infty,c)$ 的集族 Σ 所生成的 σ 代数与直线上的一切博雷尔集的 σ 代数完全相同. 但根据第一章 §5 第 5 段,推知每一个博雷尔集的原象属于由那些属于 Σ 的半直线的原象所生成的 σ 代数,即实函数 f 是可测的.

刚才证明的这个条件常用来作为可测函数的定义,即函数 $f(x)$ 称为可测,如果所有集 $\{x:f(x)<c\}$ 皆为可测.

2. 可测函数的运算　我们证明,给定在某一集上的可测函数的全体对算术运算是封闭的.

定理 3　两个可测函数的和、差、积是可测的. 两个可测函数之商,在分母不为零的条件下也是可测的.

证明　这个定理可以分成几步来证明.

1) 如果 f 可测,那么对于任何常数 k 和 a,函数 kf 和 $a+f$ 显然是可测的.

2) 其次,如果 f 和 g 是可测函数,那么集

$$\{x:f(x)>g(x)\}$$

是可测的. 事实上

$$\{x:f(x)>g(x)\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)>r_k\}\cap\{x:g(x)<r_k\},$$

其中求和是对按任何次序编号的一切有理数 r_k 遍取的. 由此得出

$$\{x:f(x) > a - g(x)\} = \{x:f(x) + g(x) > a\}$$

是可测的,即可测函数之和是可测的.

3) 由 1) 和 2) 推出差 $f-g$ 的可测性.

4) 可测函数之积是可测的. 事实上,利用恒等式

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2],$$

表达式右端是可测函数. 这个结论可从 1)—3) 和定理 1 的推论推出,因为根据该推论可测函数的平方是可测的.

5) 如果 $f(x)$ 是可测的且 $f(x) \neq 0$,那么 $1/f(x)$ 是可测的. 事实上,如果 $c>0$,那么

$$\{x:1/f(x) < c\} = \{x:f(x) > 1/c\} \cup \{x:f(x) < 0\};$$

如果 $c<0$,那么

$$\{x:1/f(x) < c\} = \{x:0 > f(x) > 1/c\};$$

而如果 $c=0$,那么

$$\{x:1/f(x) < c\} = \{x:f(x) < c\}.$$

每一次在右边我们都得到一个可测集. 由 4) 和 5) 就可推出商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的可测性(在 $g(x) \neq 0$ 的条件下).

这样,我们就证明了,对可测函数施行算术运算仍然得到可测函数.

现在我们来证明,可测函数的全体不仅对算术运算是封闭的,而且对极限运算也是封闭的.

定理 4 对于每个 $x \in X$,可测函数列都是收敛的,其极限函数是可测的.

证明 设 $f_n(x) \to f(x)$,于是

$$\{x:f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcup_{m>n} \{x:f_m(x) < c - 1/k\}. \tag{1}$$

事实上,如果 $f(x) < c$,那么就有这样的 k 存在,使得 $f(x) < c - 2/k$. 其次,对于这个 k 可以找到这样大的 n,使得当 $m \geqslant n$ 时 $f_m(x)$ 满足不等式

$$f_m(x) < c - 1/k.$$

而这表示 x 包含在等式(1)的右端.

反之,如果 x 属于等式(1)的右端,那么就有这样的 k 存在,使得对于一切充分大的 m 都有

$$f_m(x) < c - 1/k.$$

但由此推出$f(x) < c$，即x包含在等式(1)的左端.

如果函数$f_n(x)$可测，那么集

$$\{x : f_m(x) < c - 1/k\}$$

可测. 因为可测集的全体是一个σ代数，所以根据(1)，集

$$\{x : f(x) < c\}$$

也是可测的，这就证明了$f(x)$的可测性.

注　从适才所述可以看出，函数的可测性概念与所论空间具有的任何测度没有联系. 仅应挑选出所谓可测的集族. 但是实际上，可测性概念，照例是用于那些定义在某一具有固定测度的空间X上的函数的，而该测度是给定在空间X的子集的任何一个σ代数上的. 往后我们考虑的正是这种情况.

正如我们已经指出，定义在某一集X的子集的σ代数$\mathfrak{S}$上的σ可加测度，无损于一般性，可以假定是完全的，即假定如果A是一个测度为零的可测集，那么它的每一个子集A'是可测的(当然$\mu(A') = 0$). 测度完全性这个条件我们今后将处处假定是满足的.

3. 等价性　在研究可测函数时往往可以忽略它们在测度为零的集上的值. 由于这个缘故，引出下述定义.

定义 2　如果两个定义在同一可测集E上的函数f与g满足条件

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0,$$

那么函数f和g就称为等价函数(用符号$f \sim g$表示).

再引入下述术语. 如果某一性质在E上除去一个测度为零的点所构成的集外在E的其余的一切点上都满足，那么就说，某一性质在E上几乎处处都满足. 这样一来，如果两个函数几乎处处都相等，那么就可以称这两个函数为等价函数.

定理 5　如果定义在某一可测集E上的函数$f(x)$与在E上的某一可测函数$g(x)$等价，那么函数$f(x)$也是可测的.

证明　由等价性定义推出集

$$\{x : f(x) < a\} \quad 与 \quad \{x : g(x) < a\}$$

彼此仅可能相差某一测度为零的集(由于假定测度是完全的). 从而，如果它们中的第二个集是可测的，那么第一个集也是可测的.

注　在古典分析里函数的等价性概念不起重要作用，因为在古典分析里主要是讨论一元或多元连续函数，而对这些函数等价性就相当于恒等性. 确切地说，如果两个在某一闭区间E上连续的函数f和g是等价的(对勒贝格测度而言)，那么它们就完全相同. 事实上，如果在任一点x_0上$f(x_0) \neq g(x_0)$，那么根据f和g的连续性就可以找到点x_0的一个邻域，在该邻域内的一切点上都有$f(x) \neq g(x)$. 这样的邻域的测度是正的. 因此连续函数不可能是等价的，如果它们不完全相同的话.

对于任意可测函数，两个函数的等价性绝不表示它们完全相同. 例如，在数直线的有理点等于1而在无理点等于零的那个函数就与恒等于零的函数是等价的.

4. 几乎处处收敛性 由于在许多情况下可测函数在这种或那种测度为零的集上的性态是无关紧要的，自然就会引入下述逐点收敛的通常概念的推广.

定义 3 如果定义在某一具有测度的空间 X 上的函数列 $\{f_n(x)\}$ 对于几乎所有的 $x \in X$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \tag{2}$$

(即不满足关系式(2)的那些 x 所构成的点集的测度为零)，那么就称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上几乎处处收敛于函数 $f(x)$.

例 定义在闭区间$[0,1]$上的函数列 $f_n(x) = (-x)^n$ 当 $n\to\infty$ 时几乎处处收敛于函数 $f(x)\equiv 0$(即除了点 $x=1$ 外处处收敛).

定理 4 容许作如下的推广.

定理 4′ 如果可测函数列 $f_n(x)$ 在 X 上几乎处处收敛于函数 $f(x)$，那么函数 $f(x)$ 也是可测的.

证明 设 A 是一个这样的集，在其上

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

根据条件，$\mu(X\backslash A)=0$. 函数 $f(x)$ 在 A 上是可测的，又因为每一函数在一个测度为零的集上一般显然是可测的，所以 $f(x)$ 在 $X\backslash A$ 上是可测的. 从而它在集 X 上也是可测的.

习题 设可测函数列 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于某一极限函数 $f(x)$. 证明：序列 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $g(x)$ 当且仅当 $g(x)$ 等价于 $f(x)$.

5. 叶果洛夫(Егоров)定理 在 1911 年叶果洛夫证明了下面这个重要定理，它揭示了几乎处处收敛和一致收敛这两个概念之间的联系.

定理 6 设可测函数列 $f_n(x)$ 在一个具有有限测度的集 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$. 于是对于任何 $\delta>0$ 总有这样的可测集 $E_\delta\subset E$ 存在，使得

1) $\mu(E_\delta)>\mu(E)-\delta$;

2) 在集 E_δ 上序列 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

证明 根据定理 4′，函数 $f(x)$ 是可测的. 令

$$E_n^m = \bigcap_{i\geqslant n} \{x : |f_i(x) - f(x)| < 1/m\}.$$

这样一来，对于固定的 m 和 n，E_n^m 表示一个由满足条件

$$|f_i(x) - f(x)| < 1/m$$

(对于一切 $i\geqslant n$)的那些 x 所构成的点集. 设

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m.$$

由集 E_n^m 的定义，对于固定的 m 显然有

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \cdots \subset E_n^m \subset \cdots.$$

因此根据 σ 可加测度的连续性，对于任何 m 以及任何 $\delta>0$，总可以找到这样的 $n_0(m)$，使得

$$\mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) < \delta/2^m.$$

令

$$E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)},$$

我们来证明，这样构造的 E_δ 满足定理的要求.

首先我们来证明，在 E_δ 上序列 $\{f_i(x)\}$ 一致收敛于函数 $f(x)$. 这个结论可以立刻得到证明：如果 $x\in E_\delta$，那么对于任何 m，当 $i\geqslant n_0(m)$ 时都有

$$|f_i(x)-f(x)| < 1/m.$$

现在我们来估计集 $E\setminus E_\delta$ 的测度. 为此注意，对于每个 m，$\mu(E\setminus E^m)=0$. 事实上，如果 $x_0\in E\setminus E^m$，那么就有这样大的一些 i 值存在，使得

$$|f_i(x_0)-f(x_0)| \geqslant 1/m,$$

即序列 $\{f_n(x)\}$ 在点 x_0 不收敛于 $f(x)$. 因为根据条件，$\{f_n(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$，所以

$$\mu(E\setminus E^m) = 0.$$

由此推出

$$\mu(E\setminus E^m_{n_0(m)}) = \mu(E^m\setminus E^m_{n_0(m)}) < \delta/2^m.$$

因此

$$\mu(E\setminus E_s) = \mu\left(E\setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}\right) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}(E\setminus E^m_{n_0(m)})\right)$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\mu(E\setminus E^m_{n_0(m)}) < \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^m} = \delta.$$

定理得证.

6. 按测度收敛

定义 4　我们称可测函数列 $f_n(x)$ 为按测度收敛于函数 $f(x)$，如果对于任何 $\sigma>0$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\{x: |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\} = 0.$$

下面的定理 7 和定理 8 揭示了几乎处处收敛与按测度收敛这两个概念之间的联系. 和上一段一样，所论测度假定是有限的.

定理 7　如果可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 几乎处处收敛于某一函数 $f(x)$，那么 $f_n(x)$ 也按测度收敛于这个同一的极限函数 $f(x)$.

证明 从定理4′就可推出极限函数$f(x)$是可测的. 设A是这样的一个测度为零的集,在其上$f_n(x)$不收敛于$f(x)$. 再设

$$E_k(\sigma) = \{x: |f_k(x) - f(x)| \geqslant \sigma\},$$

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma), \quad M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma).$$

显然,所有这些集都是可测的. 因为

$$R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \cdots,$$

所以,根据测度是连续的这个性质,当$n \to \infty$时,

$$\mu(R_n(\sigma)) \to \mu(M).$$

现在我们来验证

$$M \subset A. \tag{3}$$

事实上,如果$x_0 \overline{\in} A$,即如果

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

那么对于给定的$\sigma > 0$,总可以找到这样的n,使得

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma, \quad (k \geqslant n)$$

即$x_0 \overline{\in} R_n(\sigma)$,从而更有$x_0 \overline{\in} M$.

但是$\mu(A) = 0$,因此从(3)就可推出$\mu(M) = 0$,从而当$n \to \infty$时

$$\mu(R_n(\sigma)) \to 0.$$

因为$E_n(\sigma) \subset R_n(\sigma)$,所以定理得证.

不难用例子使人相信:从函数列按测度收敛,一般说来,是推不出它是几乎处处收敛的. 事实上,对每个自然数k,按照下述方式在半开区间$(0,1]$上定义k个函数

$$f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \cdots, f_k^{(k)},$$

其中

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}\dfrac{i-1}{k} < x \leqslant \dfrac{i}{k}\text{时}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为其余的值时}. \end{cases}$$

将所有这些函数接连地编号,我们就得到一个序列,甚易验证,它按测度收敛于零,但同时在每一点都不收敛(请读者自己验证这一点!).

习题 设可测函数列$\{f_n(x)\}$按测度收敛于某一极限函数$f(x)$. 证明:序列$\{f_n(x)\}$按测度收敛于函数$g(x)$当且仅当$g(x)$等价于$f(x)$.

尽管上面所举的这个例子表明定理7不一定是可逆的,但是下面这个定理却是正确的.

定理 8　设可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 按测度收敛于 $f(x)$. 于是从序列 $\{f_n(x)\}$ 里可以选出一个子序列 $\{f_n(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$.

证明　设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots$ 是某一正数序列，并且有

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0.$$

又设由正数 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots$ 所组成的级数

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots$$

是收敛的. 我们按下述方法来构造下标序列：

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots,$$

n_1 是这样一个自然数，使得

$$\mu\{x: |f_{n_1}(x) - f(x)\} \geqslant \varepsilon_1\} < \eta_1$$

（这样的 n_1 一定存在）；其次，选取 $n_2 > n_1$ 是这样的一个自然数，使得

$$\mu\{x: |f_{n_2}(x) - f(x)\} \geqslant \varepsilon_2\} < \eta_2.$$

一般地，选取 $n_k > n_{k-1}$ 是这样的一个自然数，使得

$$\mu\{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\} < \eta_k.$$

我们来证明像这样构造的序列几乎处处收敛于 $f(x)$. 事实上，设

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty}\{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\},\quad Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i.$$

因为

$$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \cdots \supset R_n \supset \cdots,$$

所以，根据测度的连续性，$\mu(R_i)\to\mu(Q)$.

另一方面，显然 $\mu(R_i) < \sum\limits_{k=i}^{\infty}\eta_k$. 由此当 $i\to\infty$ 时 $\mu(R_i)\to 0$ 即 $\mu(Q)=0$. 剩下只需验证，在集 $E\backslash Q$ 的一切点上有下列收敛性关系成立：

$$f_{n_k}(x) \to f(x).$$

设 $x_0 \in E\backslash Q$. 于是就可以找到这样的 i_0，使得 $x_0 \overline{\in} R_i$. 这就表明，对于一切 $k \geqslant i_0$，都有

$$x_0 \overline{\in} \{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\}.$$

即

$$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k.$$

因为根据条件，$\varepsilon_k \to 0$，所以

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0).$$

定理得证.

7. 鲁金(Лузин)定理. C 性质 在这一节开头所给出的可测函数的定义是对任意集上的函数而言的,并且在一般情况下与连续函数的概念无任何联系. 但是,如果讨论闭区间上的函数,那么有下面这个由鲁金在 1913 年所建立的重要定理.

定理 9 给定在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 是可测的充要条件为:对于任何 $\varepsilon>0$,在 $[a,b]$ 上总有这样的连续函数 $\varphi(x)$ 存在,使得

$$\mu\{x: f(x)\neq\varphi(x)\}<\varepsilon.$$

换句话说,可测函数可以通过修改它在一个测度任意小的集上的函数值的办法使其变为 $[a,b]$ 上的连续函数. 如果闭区间上的函数可以利用这样的“小变形”来使它变为连续函数,那么就说它具有 C 性质(鲁金的术语). 鲁金定理表明,对于实变函数 C 性质就可以作为可测函数的定义. 利用叶果洛夫定理就可以得到鲁金定理的证明(请给出这个证明!).

习题 证明:如果 A 是闭区间 $[a,b]$ 上的可测集,那么对于任何 $\varepsilon>0$,总可以找到这样的开集 $G\supset A$ 与闭集 $F\subset A$,使得 $\mu(G\setminus A)<\varepsilon$ 与 $\mu(A\setminus F)<\varepsilon$.

§5. 勒贝格积分

分析学初等课程里著名的黎曼(Riemann)积分概念仅适用于这样的函数,它们要么是连续的,要么是有“不太多”的间断点. 至于可测函数,它们在其有定义的地方(或者一般可以给定在抽象空间上,因此对于它们而言,连续性概念简直没有意义),可以是处处间断的,黎曼积分结构就变得不适用. 与此同时勒贝格对于这样的函数却引入了一种非常完善和灵活的积分概念.

勒贝格积分结构的基本观念就是:它与黎曼积分有区别. 点 x 不是按照它们在 x 轴上的接近度来加以分类的,而是按照在这些点上的函数值的接近度来加以分类的. 这就容许立刻将积分概念推广到非常广泛的一类函数上去.

此外,对于给定在一个具有测度的任何空间上的那些函数,其勒贝格积分的定义是完全一样的. 至于黎曼积分,它首先是对一元函数引入的,然后再将它进行相应的修改推广到多元的情形. 对于具有测度的抽象空间上的那些函数来说黎曼积分一般没有意义.

在以后要是我们没有提出相反的声明,那么所考察的某一完全 σ 可加测度 μ,它是定义在一个含有单位集 X 的 σ 代数上的. 所有我们要考察的集 $A\subset X$ 假定都是可测的,而函数 $f(x)$ 对于 $x\in X$ 都是确定的并且都是可测的.

对我们来说采取下述顺序较为方便,首先对所谓的简单函数定义勒贝格积分,然后再将它推广到本质上更为广泛的一类函数上去. 第 2 段到第 5 段包括了全空间的测度是有限的那种情形的勒贝格积分构造法. 无限测度的情形在本节第 6 段中讨论.

1. 简单函数

定义 1 定义于某一在其上给定了测度的空间 X 上的函数 $f(x)$ 称为简单函数,如果它是可测的并且取不多于可数个函数值.

下述定理刻画了简单函数的结构.

定理 1 取不多于可数个不同的函数值

$$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$$

的函数 $f(x)$ 是可测的充要条件为:一切集

$$A_n = \{x: f(x) = y_n\}$$

皆为可测.

证明 条件的必要性是显而易见的,因为每个 A_n 是单点集 $\{y_n\}$ 的原象,而每个单点集是博雷尔集. 条件的充分性可从下述事实推出:在定理的条件下任何博雷尔集的原象 $f^{-1}(B)$ 是不多于可数个可测集 A_n 的并集 $\bigcup\limits_{y_n \in B} A_n$,即是可测的.

利用简单函数来构造勒贝格积分是基于下述定理.

定理 2 函数 $f(x)$ 是可测的充要条件为它可以表示成简单可测函数列的一致收敛的极限的形式.

证明 从上节定理 4 可知,条件的充分性是显而易见的. 为了证明条件的必要性,我们考虑任意可测函数 $f(x)$ 并令 $f_n(x) = m/n$(当 $m/n \leqslant f(x) < (m+1)/n$ 时),这里 m 为整数,而 n 则为正整数. 显然,函数 $f_n(x)$ 是简单函数. 当 $n \to \infty$ 时它们一致收敛于 $f(x)$,因为 $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 1/n$.

2. 简单函数的勒贝格积分 我们首先对上面所谓的简单函数,即取有限个或可数个函数值的可测函数,引入勒贝格积分概念.

设 f 是某一取函数值

$$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots, \quad y_i \neq y_j \quad (i \neq j)$$

的简单函数. 又设 A 是 X 的某一可测子集.

函数 f 在集 A 上的积分自然可以用下面这个等式来定义:

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \text{其中 } A_n = \{x: x \in A, f(x) = y_n\}, \tag{1}$$

如果右端的级数是收敛的. 我们就得到下述定义(在该定义中由于明显的原因预先要求级数绝对收敛).

定义 2 如果级数(1)绝对收敛,那么就称简单函数 f 在集 A 上(按测度 μ)为可积或可和. 如果 f 可积,那么级数(1)之和就称为 f 在集 A 上的积分.

在这个定义里假定所有的 y_n 都是不相同的. 但是,可以将一个简单函数的积分值表成乘积 $c_k\mu(B_k)$ 之和的形式. 从而不必假定所有 c_k 都是不同的. 这就容许得到下面的引理.

引理 设 $A=\bigcup_k B_k$,当 $i\neq j$ 时,$B_i\cap B_j=\varnothing$,并设函数 f 在每一个集 B_k 上仅取一个函数值 c_k. 于是

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu=\sum_k c_k\mu(B_k),\tag{2}$$

并且当且仅当级数(2)绝对收敛时,函数 f 在 A 上可积.

证明 容易看出,每一个集

$$A_n=\{x:x\in A,f(x)=y_n\}$$

是 B_k 里能满足条件 $c_k=y_n$ 的那些集的并集. 因此

$$\sum_n y_n\mu(A_n)=\sum_n y_n\sum_{c_k=y_n}\mu(B_k)=\sum_k c_k\mu(B_k).$$

因为测度是非负的,所以

$$\sum_n|y_n|\mu(A_n)=\sum_n|y_n|\sum_{c_k=y_n}\mu(B_k)=\sum_k|c_k|\mu(B_k).$$

即级数 $\sum_n y_n\mu(A_n)$ 和 $\sum_k c_k\mu(B_k)$ 或者同时绝对收敛或者同时发散. 引理得证.

我们来揭示简单函数的勒贝格积分的某些性质:

A) $$\int_A[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}\mu=\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu+\int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu,$$

并且从右端两个积分的存在就可以推出左端积分的存在.

为了证明这个性质,我们假定 f 在集 $F_i\subset A$ 上取函数值 f_i,而 g 在集 $G_j\subset A$ 上取函数值 g_j. 因此

$$J_1=\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu=\sum_i f_i\mu(F_i),\tag{3}$$

$$J_2=\int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu=\sum_j g_j\mu(G_j),\tag{4}$$

于是根据引理

$$J=\int_A[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}\mu=\sum_i\sum_j(f_i+g_j)\mu(F_i\cap G_j).\tag{5}$$

但是

$$\mu(F_i)=\sum_j\mu(F_i\cap G_j),\quad \mu(G_j)=\sum_i\mu(F_i\cap G_j).$$

因此从级数(3)和级数(4)的绝对收敛性就可推出级数(5)的绝对收敛性;同时

$$J=J_1+J_2.$$

B) 对于任一常数 k,都有

$$\int_A kf(x)\,\mathrm{d}\mu = k\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu,$$

并且从右端积分的存在就可推出左端积分的存在.（可以直接加以验证.）

C）在集 A 上有界的简单函数 f 在集 A 上可积，并且，如果在 A 上 $|f(x)|\leqslant M$，那么

$$\left|\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant M\mu(A).$$

（可以直接加以验证.）

3. 具有有限测度的集上的勒贝格积分的一般定义

定义 3　如果在集 A 上有一致收敛于函数 f 的简单可积函数列 $\{f_n\}$ 存在，那么就称该函数 f 在集 A 上为可积（可和）. 我们用符号

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

来表示极限

$$I = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \tag{6}$$

并称它为函数 f 在集 A 上的积分.

如果下面三个条件得到满足，那么这个定义就是正确的.

1）极限(6)对于任一个在集 A 上为一致收敛的简单可积函数列都是存在的.

2）对于给定的函数 f，这个极限不依赖于该序列 $\{f_n\}$ 的取法.

3）对于简单函数可积的定义，从而也就是积分的定义与第 2 段里所给出的积分的定义是等价的.

所有这些条件的确都得到满足.

为了证明第一个条件能够得到满足，只需注意，根据简单函数的积分的性质 A)，B) 和 C) 就有

$$\left|\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_A f_m(x)\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \mu(A)\sup_{x\in A}|f_n(x)-f_m(x)|. \tag{7}$$

为了证明第二个条件能够得到满足，应该考察两个收敛于 f 的序列 $\{f_n\}$ 和 $\{f_n^*\}$. 要是这两个序列的极限(6)取不同的值，那么由这两个序列合并所得到的序列的极限(6)就不存在，而与第一个条件矛盾. 最后，为了证明第三个条件的正确性，只需考察那个对于所有的 n 都有 f_n 等于 f 的序列：$f_n(x)=f(x)$.

注　我们看到，在勒贝格积分构造中有两个重要的步骤. 第一步，对于十分简单同时又十分广泛的某一类函数（简单可和函数）可以直接定义积分（为级数之和）. 第二步，利用取极限将积分定义推广到本质上更为广泛的一类函数上去. 按本质讲，这两种方法的结合——按狭隘的定义直接构造和取极限，在任何积分构造中都会出现.

我们来揭示勒贝格积分的一些基本性质. 由定义直接推出：

Ⅰ. $$\int_A 1\cdot \mathrm{d}\mu = \mu(A). \tag{8}$$

Ⅱ. 对于任何常数 k 都有

$$\int_A kf(x)\,\mathrm{d}\mu = k\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu, \tag{9}$$

并且从右端积分的存在就可推出左端积分的存在.

从简单函数的积分的性质 B)，利用取极限就可以导出这个性质.

Ⅲ. 可加性：

$$\int_A [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}\mu = \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu, \tag{10}$$

并且从右端积分的存在就可推出左端积分的存在.

从简单函数的积分的性质 A)，取极限就可以得到证明.

Ⅳ. 在集 A 上有界的函数 f 在 A 上为可积.

利用定理 2，从简单函数的积分的性质 C)取极限就可以得到证明.

Ⅴ. 单调性：如果 $f(x)\geqslant 0$，那么

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0 \tag{11}$$

（假定这个积分存在）.

对于简单函数这个结论可以直接从定义推出，对于一般情形可以这样导出结论，注意，如果 f 是可测的并是非负的，那么就可以找到一个非负的简单函数列一致收敛于它（参看定理 2）.

从后面这个性质立即推出，如果 $f(x)\geqslant g(x)$，那么

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{12}$$

因此，如果对于所有的（或几乎所有的）$x\in A$，都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，那么

$$m\mu(A) \leqslant \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant M\mu(A). \tag{13}$$

Ⅵ. 如果 $\mu(A)=0$，那么 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0$.

Ⅵ′. 如果几乎处处 $f(x)=g(x)$，那么

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu,$$

并且两个积分同时存在或同时不存在.

这两个结论可以直接从勒贝格积分的定义推出.

Ⅶ. 如果函数 φ 在 A 上可积，并且几乎处处 $|f(x)|\leqslant\varphi(x)$，那么 f 在 A 上也

可积.

事实上，如果 f 和 φ 都是简单函数，那么从集 A 里去掉某一测度为零的集后剩下的集 A' 就可以表示成有限个或可数个集的并集，在这些集的每一个上 f 和 φ 都是常数：$f(x)=a_n,\varphi(x)=b_n$，并且 $|a_n|\leqslant b_n$. 由 φ 的可积性推出

$$\sum_n |a_n|\mu(A_n) \leqslant \sum_n b_n\mu(A_n) = \int_{A'}\varphi(x)\mathrm{d}\mu = \int_A \varphi(x)\mathrm{d}\mu.$$

因此 f 也可积，并且

$$\left|\int_A f(x)\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_{A'} f(x)\mathrm{d}\mu\right| = \left|\sum_n a_n\mu(A_n)\right|$$

$$\leqslant \sum_n |a_n|\mu(A_n) = \int_{A'}|f(x)|\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A \varphi(x)\mathrm{d}\mu.$$

在一般情形下取极限并利用定理 2 就可以证明这个结论.

Ⅷ. 积分

$$I_1 = \int_A f(x)\mathrm{d}\mu, \quad I_2 = \int_A |f(x)|\mathrm{d}\mu \tag{14}$$

同时存在或同时不存在.

事实上，根据性质Ⅶ从积分 I_2 的存在性就可推出积分 I_1 的存在性.

反之，简单函数的情形可从积分的定义推出，而一般情形则取极限并利用定理 2，这时必须利用不等式

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|.$$

4. σ 加性和勒贝格积分的绝对连续性　在上一段中已经阐述了固定集上的勒贝格积分的一些性质. 现在我们来确立勒贝格积分的某些性质，将表达式

$$F(A) = \int_A f(x)\mathrm{d}\mu$$

视为一个定义在可测集的全体上的集函数. 首先我们来确立下述性质.

定理 3　如果 $A=\bigcup_n A_n$，当 $i\neq j$ 时，$A_i\cap A_j=\varnothing$，那么

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\mathrm{d}\mu, \tag{15}$$

并且从左端积分的存在就可推出右端那些积分的存在，而由它们所构成的级数是绝对收敛的.

证明　我们首先对取函数值为

$$y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$$

的简单函数 f 来验证这个定理的结论. 设

$$B_k=\{x:x\in A,f(x)=y_k\},$$

$$B_{nk}=\{x:x\in A_n,f(x)=y_k\}.$$

于是

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu=\sum_k y_k\mu(B_k)=\sum_k y_k\sum_n\mu(B_{nk})$$

$$=\sum_n\sum_k y_k\mu(B_{nk})=\sum_n\int_{A_n}f(x)\mathrm{d}\mu. \tag{16}$$

因为根据f在A上为可积的这个假定,级数$\sum\limits_k y_k\mu(B_k)$是绝对收敛的,而所有的集的测度是非负的,所以(16)的一串等式中所有其余的那些级数也都是绝对收敛的.

在任意函数f的情形,从f在A上的可积性就可推出,对于任何$\varepsilon>0$总有一个在A上可积的简单函数g存在,并且满足条件

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon. \tag{17}$$

对于g有

$$\int_A g(x)\mathrm{d}\mu=\sum_n\int_{A_n}g(x)\mathrm{d}\mu. \tag{18}$$

并且g在每一个集A_n上可积,从而级数(18)绝对收敛.从后面这个情况以及估计式(17)就可推出f在每个A_n上也可积,而且

$$\sum_n\left|\int_{A_n}f(x)\mathrm{d}\mu-\int_{A_n}g(x)\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\sum_n\varepsilon\mu(A_n)=\varepsilon\mu(A),$$

$$\left|\int_A f(x)\mathrm{d}\mu-\int_A g(x)\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\varepsilon\mu(A).$$

再根据(18)就可推出级数$\sum\limits_n\int_{A_n}f(x)\mathrm{d}\mu$是绝对收敛的,并且还可以得到下面这个估计式

$$\left|\sum_n\int_{A_n}f(x)\mathrm{d}\mu-\int_A f(x)\mathrm{d}\mu\right|\leqslant 2\varepsilon\mu(A).$$

因为$\varepsilon>0$是任意的,所以

$$\sum_n\int_{A_n}f(x)\mathrm{d}\mu=\int_A f(x)\mathrm{d}\mu.$$

推论 如果f在A上可积,那么f在任一可测集$A'\subset A$上也可积.

我们证明了,从函数f在集A上的可积性推出,如果$A=\bigcup\limits_n A_n,A_i\cap A_j=\varnothing$,那么$f$在每个$A_n$上可积,并且$A$上的积分等于集$A_n$上的积分之和.这个结论可以转换为下面的定理.

定理4 如果$A=\bigcup\limits_n A_n$,当$i\neq j$时$A_i\cap A_j=\varnothing$而且级数

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)| \mathrm{d}\mu \tag{19}$$

收敛,那么函数f在A上可积,并且

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\mathrm{d}\mu.$$

证明 与上面的定理相比较,这里新的结论是,从级数(19)的收敛性推出f在A上的可积性.

首先对取值f_i的简单函数的情形加以证明. 令

$$B_i = \{x: x \in A, f(x) = f_i\}, A_{ni} = A_n \cap B_i,$$

我们有

$$\bigcup_n A_{ni} = B_i \quad 与 \quad \int_{A_n} |f(x)| \mathrm{d}\mu = \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}).$$

从级数(19)的收敛性推出,级数

$$\sum_n \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i| \mu(B_i)$$

收敛.

后面这个级数的收敛性表明积分

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu = \sum_i f_i \mu(B_i)$$

存在. 在一般情形则用简单函数 $\tilde{f}$ 来逼近f,使得

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon. \tag{20}$$

于是

$$\int_{A_n} |\tilde{f}(x)| \mathrm{d}\mu \leqslant \int_{A_n} |f(x)| \mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(A_n),$$

又因为级数 $\sum_n \mu(A_n) = \mu(A)$ 收敛, 从级数(19)的收敛性推出级数

$$\sum_n \int_{A_n} |\tilde{f}(x)| \mathrm{d}\mu$$

的收敛性,即根据刚才证明的简单函数 $\tilde{f}$ 在A上的可积性. 但是根据(20)原来的函数f在A上也可积. 定理得证.

契贝谢夫(Чебышев)不等式 如果在A上$\varphi(x) \geqslant 0$并且$c > 0$,那么

$$\mu\{x: x \in A, \varphi(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)\mathrm{d}\mu. \tag{21}$$

事实上,设

$$A' = \{x: x \in A, \varphi(x) \geqslant c\}.$$

于是

$$\int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{A'} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{A\setminus A'} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{A'} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant c\mu(A').$$

推论 如果

$$\int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu = 0,$$

那么几乎处处都有$f(x)=0$.

事实上,根据契贝谢夫不等式,我们有:对于一切n,都有

$$\mu\left\{x: x \in A, |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\} \leqslant n\int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

因此

$$\mu\{x: x \in A, f(x) \neq 0\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left\{x: x \in A, |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\} = 0.$$

在上一段中曾经指出,任何函数f在零测度集上的勒贝格积分都等于零.

这个结论可视为下面这个重要定理的极端情形.

定理 5(勒贝格积分的绝对连续性) 如果$f(x)$是一个在集A上可和的函数,那么对于每一个$\varepsilon>0$就有这样的$\delta>0$存在,使得对于每一个这样的可测集$e\subset A$,只要$\mu(e)<\delta$都有

$$\left|\int_e f(x)\,\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon.$$

证明 首先我们注意,如果f是有界的,那么结论是明显的. 现在设f是A上的一个任意的可和函数. 令

$$A_n = \{x: x \in A, n \leqslant |f(x)| < n+1\}$$

与

$$B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n, \quad C_N = A\setminus B_N.$$

于是根据定理 3,

$$\int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu.$$

选择N使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu = \int_{C_N} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

又设

$$0<\delta<\frac{\varepsilon}{2(N+1)}.$$

如果现在$\mu(e)<\delta$,那么

$$\left|\int_e f(x)\,\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\int_e |f(x)|\,\mathrm{d}\mu$$

$$=\int_{e\cap B_N}|f(x)|\,\mathrm{d}\mu+\int_{e\cap C_N}|f(x)|\,\mathrm{d}\mu.$$

右端第一个积分不超过$\varepsilon/2$(性质V),而第二个积分大于取在整个集C_N上的那个积分,即也不超过$\varepsilon/2$. 这样一来,我们就得到

$$\int_e |f(x)|\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon.$$

作为集函数的积分所确立的这些性质可导出下述结果. 设f是一个在空间X上按测度μ可和的非负函数. 于是函数

$$F(A)=\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

对于一切可测集$A\subset X$都是确定的、非负的与σ可加的,即满足条件:如果$A=\bigcup_n A_n$与$A_i\cap A_j=\varnothing$,那么$F(A)=\sum_n F(A_n)$. 换言之,非负函数的积分作为集函数具有σ可加测度的一切性质. 这个测度与原来的测度μ都定义在同一的σ代数上,并且由下述条件与μ有联系:如果$\mu(A)=0$,那么$F(A)=0$.

5. 勒贝格积分号下取极限 在勒贝格积分号下取极限的问题,或者说成是关于收敛级数是否可以逐项积分的问题,经常在各种问题里发生.

在古典分析里已得到一个关于可以在积分号下取极限的充分条件为:对应的序列(级数)是一致收敛的.

现在我们来建立某些关于在勒贝格积分号下取极限的定理,而这些定理可以说是古典分析里对应定理的一种深刻的推广.

定理6(勒贝格) 如果序列$\{f_n\}$在A上收敛于f,并且对于所有的n都有

$$|f_n(x)|\leqslant\varphi(x),$$

其中φ在A上可积,那么极限函数f在A上可积,并且

$$\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu\to\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 从定理的条件容易推出$|f(x)|\leqslant\varphi(x)$. 因此$f$(第3段性质VII)是可积的. 设$\varepsilon>0$是任意的. 根据定理5(关于积分的绝对连续性)就可以找到这样的$\delta>0$,使得只要$\mu(B)<\delta$就有

$$\int_B \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{22}$$

根据叶果洛夫定理可以选取满足条件 $\mu(B)<\delta$ 的集 B，使得序列 $\{f_n\}$ 在 $C=A\setminus B$ 上一致收敛. 从而，可以找到这样的 N，使得在 $n\geqslant N$ 和 $x\in C$ 时满足不等式

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2\mu(C)}.$$

于是

$$\int_A f(x)\,d\mu-\int_A f_n(x)\,d\mu$$

$$=\int_C[f(x)-f_n(x)]\,d\mu+\int_B f(x)\,d\mu-\int_B f_n(x)\,d\mu.$$

又因为 $|f(x)|\leqslant\varphi(x)$ 和 $|f_n(x)|\leqslant\varphi(x)$，所以根据(22)就得到

$$\left|\int_A f(x)\,d\mu-\int_A f_n(x)\,d\mu\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

推论 如果 $|f_n(x)|\leqslant M=\text{const}$，并且 $f_n\to f$，那么

$$\int_A f_n(x)\,d\mu\to\int_A f(x)\,d\mu.$$

注 因为函数在一个测度为 0 的集上所取的值并不影响其积分之值，所以在定理 6 里只需假定 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f 就行了，并且每一个不等式 $|f_n(x)|\leqslant\varphi(x)$ 也只是几乎处处满足.

定理 7（列维（B. Lévy）） 设在集 A 上

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$$

并且函数 f_n 都可积而它们的积分全体有界：

$$\int_A f_n(x)\,d\mu\leqslant K.$$

于是在 A 上几乎处处都有（有限）极限

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\tag{23}$$

存在，函数 f 在 A 上可积，并且

$$\int_A f_n(x)\,d\mu\to\int_A f(x)\,d\mu.$$

这时在极限(23)不存在的那个集上可以任意给定函数 f，例如，在该集上可以令 $f(x)=0$.

证明 假定 $f_1(x)\geqslant 0$. 因为一般情形只要取函数

$$\bar{f}_n=f_n-f_1$$

就可以化为这种情形. 我们来考察集

$$\Omega = \{x : x \in A, f_n(x) \to \infty\}.$$

容易看出,$\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$,其中

$$\Omega_n^{(r)} = \{x : x \in A, f_n(x) > r\}.$$

根据契贝谢夫不等式(21)

$$\mu(\Omega_n^{(r)}) \leqslant K/r.$$

因为 $\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \cdots \subset \Omega_n^{(r)} \subset \cdots$,所以 $\mu(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}) \leqslant K/r$. 但对于任何 r 都有

$$\Omega \subset \bigcup_n \Omega_n^{(r)},$$

因此 $\mu(\Omega) \leqslant K/r$. 由于 r 的任意性,由此推出

$$\mu(\Omega) = 0.$$

这就证明了单调递增序列 $\{f_n(x)\}$ 在 A 上几乎处处具有有限极限 $f(x)$.

用 A_r 表示那些满足条件

$$r - 1 \leqslant f(x) < r, \quad r = 1, 2, \cdots$$

的点 $x \in A$ 所构成的集. 在 A_r 上令 $\varphi(x) = r$.

如果 $\varphi(x)$ 在 A 上的可积性能够得到证明,那么这个定理的结论就可以直接从定理 6 的推论推出. 令

$$R_s = \bigcup_{r=1}^{s} A_r.$$

因为在 B_s 上函数 f_n 与 f 都是有界的,并且永远都有 $\varphi(x) \leqslant f(x) + 1$,所以

$$\int_{B_s} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{B_s} f(x)\,\mathrm{d}\mu + \mu(A)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{B_s} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu + \mu(A) \leqslant K + \mu(A).$$

但

$$\int_{B_s} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{r=1}^{s} r\mu(A_r).$$

这些和是有界的就表明级数

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\mu(A_r) = \int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu$$

是收敛的. 这样一来,函数 φ 在 A 上的可积性就得到了证明. 在定理证明中函数 $f_n(x)$ 的单调非减条件显然可以换为单调非增条件.

推论　如果 $\psi_n(x) \geqslant 0$,并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_A \psi_n(x)\,\mathrm{d}\mu < \infty,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)$ 在 A 上几乎处处收敛,并且

$$\int_A\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\Big)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_A \psi_n(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

定理 8(法图(Fatou)) 如果非负可测函数列 $\{f_n\}$ 在 A 上几乎处处收敛于 f,并且

$$\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant K,$$

那么 f 在 A 上可积,并且

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant K.$$

证明 令

$$\varphi_n(x) = \inf_{k\geqslant n} f_k(x).$$

φ_n 可测,因为

$$\{x:\varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k\geqslant n}\{x: f_k(x) < c\}.$$

其次,$0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant f_n(x)$,因此 φ_n 可积,并且

$$\int_A \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant K.$$

最后

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \cdots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \cdots,$$

从而几乎处处都有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = f(x).$$

因此把上面的定理应用于 $\{\varphi_n\}$,我们就得到所要求的结果.

6. 无穷测度集上的勒贝格积分 到目前为止,我们所说的积分及其性质是在下述假定下讨论的:所论函数系给定在这种或那种具有有限测度的集上的. 但是经常必须处理给定在具有无穷测度的集上的函数,例如,给定在具有勒贝格测度的直线上的函数. 因此将积分概念推广到这种情形是很重要的. 这时我们仅限于讨论那种在实用上最重要的情形,当所论集 X 可以表示成可数个具有有限测度的集的和:

$$X = \bigcup_n X_n,\ \mu(X_n) < \infty. \tag{24}$$

如果空间 X(在其上给定了测度 μ)可以表示成可数个具有有限测度的集之和,

那么 X 上的测度 μ 称为 σ－有限（参看 §3 第 3 段）．直线上、平面上和 n 维空间中的勒贝格测度都是 σ－有限测度的例子．不满足 σ－有限性条件的测度，例如，可以这样得到，在直线上每一点都赋以权 1．于是直线的所有子集可以认为是可测的，并且有限集将具有有限测度，而其余的集则具有无穷测度．集 X 的满足条件（24）的可测子集的每一个单调递增序列 $\{X_n\}$ 称为枚举序列．现在引入下述定义．

定义 4 定义在具有 σ－有限测度 μ 的集 X 上的可测函数 f 称为在 X 上可和，如果它在每一个具有有限测度的可测子集 $A\subset X$ 上可和，并且只要对于每一个枚举序列 $\{X_n\}$ 极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{X_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu \tag{25}$$

都存在且与该序列的选取无关．这个极限称为 f 在集 X 上的积分并用符号

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

来表示．同样，显然，如果函数 f 在某一具有有限测度的集外等于零，那么对于它刚才所叙述的积分定义与第 3 段所给出的那个积分定义是等价的．

注 第 2 段中所给出的简单函数的积分定义可以逐字逐句照搬到无穷测度的情形．这时显然，为了简单函数的可和性，必须使得它仅在有限测度的集上取每一个异于零的值．第 3 段中所给出的可和性定义与集 X 的测度的有限性假定有密切联系．事实上，如果 $\mu(X)=\infty$，那么从简单可和函数列 $\{\varphi_n\}$ 的一致收敛性一般并不能推出它们的积分的序列的收敛性（请举例说明！）．

第 3 段和第 4 段中关于有限测度的情形所叙述的那些结果基本上适用于测度为无穷的集上的积分．

本质差别在于：在 $\mu(X)=\infty$ 的情形，X 上有界的可测函数不一定是可和的．特别，如果 $\mu(X)=\infty$，那么任何异于零的常数在 X 上不可积．

读者不难验证，勒贝格定理、列维定理和法图定理在无穷测度的情形仍是正确的．

7．勒贝格积分同黎曼积分之比较 我们来阐明勒贝格积分同黎曼积分之间的联系．同时仅限于讨论直线上的线性勒贝格测度这种最简单的情形．

定理 9 如果有黎曼积分

$$I=(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，那么 f 在 $[a,b]$ 上按勒贝格意义可积，并且

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu = I.$$

证明 我们用分点

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a)$$

将闭区间$[a,b]$分成2^n个子分划，并且与这个子分划相对应地造达布和数

$$\Omega_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}, \omega_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{nk},$$

其中M_{nk}是f在闭区间

$$x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k$$

上的上界，而m_{nk}是f在该同一闭区间上的下界. 根据黎曼积分的定义

$$I = \lim_{n\to\infty}\Omega_n = \lim_{n\to\infty}\omega_n.$$

令

$$\bar{f}_n(x) = M_{nk} \quad (x_{k-1} \leqslant x < x_k),$$
$$\underline{f}_n(x) = m_{nk} \quad (x_{k-1} \leqslant x < x_k).$$

函数$\bar{f}_n$和$\underline{f}_n$在点$x=b$可以任意重新定义. 容易算出

$$\int_{[a,b]}\bar{f}_n(x)\mathrm{d}\mu = \Omega_n, \int_{[a,b]}\underline{f}_n(x)\mathrm{d}\mu = \omega_n.$$

因为序列$\{\bar{f}_n\}$非递增，而序列$\{\underline{f}_n\}$非递减，所以几乎处处都有

$$\bar{f}_n(x) \to \bar{f}(x) \geqslant f(x), \underline{f}_n(x) \to \underline{f}(x) \leqslant f(x).$$

根据列维定理

$$\int_{[a,b]}\bar{f}(x)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\Omega_n = I = \lim_{n\to\infty}\omega_n = \int_{[a,b]}\underline{f}(x)\mathrm{d}\mu.$$

因此

$$\int_{[a,b]}|\bar{f}(x) - \underline{f}(x)|\mathrm{d}\mu = \int_{[a,b]}(\bar{f}(x) - \underline{f}(x))\mathrm{d}\mu = 0.$$

从而几乎处处有

$$\bar{f}(x) - \underline{f}(x) = 0,$$

即
$$\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x).$$

从而

$$\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}\mu = I.$$

定理得证.

容易举出在某一闭区间上的有界函数按勒贝格意义可积而按黎曼意义不可积的一些例子(例如,已经提过的在闭区间[0,1]的有理点等于1而在无理点等于0的狄利克雷(Dirichlet)函数就是一个很好的例子). 无界函数一般不可能按黎曼意义可积,但其中很多按勒贝格意义却可积. 特别,对于任一函数$f(x)\geqslant 0$,如果它的黎曼积分

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

对每个$\varepsilon>0$是存在的,而且当$\varepsilon\to 0$时有有限的极限I,那么f在$[a,b]$上按勒贝格意义可积,并且

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

反常积分

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

在

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \infty$$

的情形按勒贝格意义是不存在的,因为根据第3段性质Ⅷ,从函数$f(x)$的可和性推出函数$|f(x)|$也是可和的. 例如,积分

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

作为(条件收敛的)广义黎曼积分是存在的,但作为勒贝格积分却是不存在的.

如果在整个直线(或半直线)上讨论函数,那么对于这样的函数黎曼积分仅可能在广义的意义下存在. 又如果这样的积分绝对收敛,那么对应的勒贝格积分也在同样的意义下存在. 如果这个积分仅是条件收敛的,那么该函数在勒贝格意义下不可积. 例如,函数$\frac{\sin x}{x}$按勒贝格意义在整个直线上不可积,因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = \infty.$$

但是广义积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

大家知道是存在的,并且等于π.

§6. 集族及其测度的直积. 富比尼(Fubini)定理

在分析学里关于将二重积分(或一般是多重积分)化为迭积分的那些定理占有重要地位. 在本节末将证明的所谓富比尼定理是多重勒贝格积分论里的一个重要结果. 首先我们来建立某些辅助概念和事实,尽管它们本身也具有独立的意义.

1. 集族的乘积 一对有序的数偶(x,y)所构成的集Z(其中$x \in X, y \in Y$)称为集X和Y的直积,并且用符号$Z = X \times Y$来表示. 类似地,有序的有限序列$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$(其中$x_k \in X_k$)所构成的集Z称为集$X_1, X_2, \cdots, X_n$的直积,并且用符号

$$Z = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \boxtimes X_k$$

来表示. 在特殊情形下,当

$$X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$$

时,集Z是集X的n次幂:

$$Z = X^n.$$

例如n维坐标空间$\mathbf{R}^n$是数直线$\mathbf{R}$的n次幂. 单位立方体I^n(即由$\mathbf{R}^n$里坐标满足条件

$$0 \leqslant x_k \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

的元所构成的集)是单位闭区间$I^1 = [0,1]$的n次幂.

如果$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots, \mathfrak{S}_n$是集族$X_1, X_2, \cdots, X_n$的一个子集族,那么

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_n$$

就表示集族$X = \boxtimes X_k$的一个子集族,并且可以表成下面这种形式

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n,$$

其中$A_k \in \mathfrak{S}_k$.

如果$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \cdots = \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}$,那么$\mathfrak{R}$是集族$\mathfrak{S}$的$n$次幂

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}^n.$$

例如 $\mathbf{R}^n$ 里的超平行体族是 $\mathbf{R}$ 里的闭区间族的 n 次幂.

定理 1 如果$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots, \mathfrak{S}_n$都是半环,那么$\mathfrak{R} = \boxtimes \mathfrak{S}_k$也是一个半环.

证明 按照半环的定义我们应该验证,如果$A, B \in \mathfrak{R}$,那么$A \cap B \in \mathfrak{R}$. 此外,如果$B \subset A$,那么$A = \bigcap_{i=1}^{m} C_i$,其中$C_1 = B$. 当$i \neq j$时$C_i \cap C_j = \varnothing$,且$C_i \in \mathfrak{R}(i = 1, 2, \cdots, n)$. 对于$n = 2$的情形,我们引入证明如下.

Ⅰ. 设$A \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2, B \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$. 这表示

$$A = A_1 \times A_2, \quad A_1 \in \mathfrak{S}_1, \quad A_2 \in \mathfrak{S}_2;$$
$$B = B_1 \times B_2, \quad B_1 \in \mathfrak{S}_1, \quad B_2 \in \mathfrak{S}_2.$$

于是

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2).$$

又因为

$$A_1 \cap B_1 \in \mathfrak{S}_1, \quad A_2 \cap B_2 \in \mathfrak{S}_2,$$

所以

$$A \cap B \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2.$$

Ⅱ. 现在我们补充假定

$$B_1 \subset A_1, \quad B_2 \subset A_2.$$

又由于 $\mathfrak{S}_1$ 和 $\mathfrak{S}_2$ 都是半环,所以下面的这些分解式都是成立的:

$$A_1 = B_1 \cup B_1^{(1)} \cup \cdots \cup B_1^{(k)},$$
$$A_2 = B_2 \cup B_2^{(1)} \cup \cdots \cup B_2^{(l)}.$$

于是

$$\begin{aligned} A = A_1 \times A_2 = &(B_1 \times B_2) \cup (B_1 \times B_2^{(1)}) \cup \cdots \cup (B_1 \times B_2^{(l)}) \\ &\cup (B_1^{(1)} \times B_2) \cup (B_1^{(1)} \times B_2^{(1)}) \cup \cdots \cup (B_1^{(1)} \times B_2^{(l)}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cup (B_1^{(k)} \times B_2) \cup (B_1^{(k)} \times B_2^{(1)}) \cup \cdots \cup (B_1^{(k)} \times B_2^{(l)}). \end{aligned}$$

这个分解式的第一项是 $B_1 \times B_2 = B$,而所有的项都属于集族 $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$. 定理得证.

但是从假设族 $\mathfrak{S}_k (k = 1, \cdots, n)$ 都是环(或 σ - 代数),还可推出直积 $\boxtimes \mathfrak{S}_k$ 是一个环(对应的 σ 代数).

2. 测度积　设在诸半环 $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots, \mathfrak{S}_n$ 上分别给定了测度

$$\mu_1(A_1), \mu_2(A_2), \cdots, \mu_n(A_n), \quad A_k \in \mathfrak{S}_k.$$

为简单起见,我们将假定这些测度是有限的,尽管下面的推理和论据无需作重大修改就可搬到 σ 有限测度的情形上去(例如,可参看[21]).

我们在半环

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_n \tag{1}$$

上用公式

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\cdots\mu_n(A_n) \tag{2}$$

来定义测度

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n, \tag{3}$$

这里

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n.$$

剩下还需证明$\mu(A)$的确是一个测度,即这个集函数是可加的. 对于$n=2$的情形,我们来给出这个证明. 设给定了分解式

$$A = A_1 \times A_2 = \bigcup_k B^{(k)}, \text{当 } i \neq j \text{ 时 } B^{(i)} \cap B^{(j)} = \varnothing,$$

$$B^{(k)} = B_1^{(k)} \times B_2^{(k)}.$$

根据第一章§5引理2有这样的分解式

$$A_1 = \bigcup_m C_1^{(m)}, \quad A_2 = \bigcup_n C_2^{(n)}$$

存在,使得集$B_1^{(k)}$是某些$C_1^{(m)}$的并集,而集$B_2^{(k)}$则是某些$C_2^{(n)}$的并集. 显然

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = \sum_n \sum_m \mu_1(C_1^{(m)})\mu_2(C_2^{(n)}), \tag{4}$$

$$\mu(B^{(k)}) = \mu_1(B_1^{(k)})\mu_2(B_2^{(k)}) = \sum_m \sum_n \mu_1(C_1^{(m)})\mu_2(C_2^{(n)}), \tag{5}$$

并且在(5)中右端的和是对所有的$C_1^{(m)} \subset B_1^{(k)}$和$C_2^{(n)} \subset B_2^{(k)}$遍取的,而在等式(4)的右端所出现的所有那些项则是对一切$C_1^{(m)} \subset A_1$和$C_2^{(n)} \subset A_2$遍取的. 因此

$$\mu(A) = \sum_k \mu(B_k),$$

这就是所要证明的.

这样一来,特别,从直线上线性测度的可加性就可推出n维欧几里得空间中的初等测度的可加性.

由公式(2)所给出的那个给定在半环(1)上的测度(3)我们就称为$\mu_1,\cdots,\mu_n$的测度积.

定理2 如果测度$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$都是σ可加的,那么测度$\mu=\mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n$也是$\sigma$可加的.

证明 对于$n=2$的情形,我们来证明. 用λ_1表示测度μ_1的勒贝格测度扩张. 设$C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$,其中$C_n \cap C_m = \varnothing (n \neq m)$,并且集$C$和$C_n$都属于$\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$,即

$$C = A \times B, A \in \mathfrak{S}_1, B \in \mathfrak{S}_2,$$

$$C_n = A_n \times B_n, A_n \in \mathfrak{S}_1, B_n \in \mathfrak{S}_2.$$

设集A和$A_1,A_2,\cdots$属于空间X. 对于$x \in X$,令

$$f_n(x) = \begin{cases} \mu_2(B_n), & 若 x \in A_n, \\ 0, & 若 x \overline{\in} A_n. \end{cases}$$

容易看出，对于 $x \in A$

$$\sum_n f_n(x) = \mu_2(B).$$

因此，根据列维定理的推论（参看 §5 第 5 段）

$$\sum_n \int_A f_n(x)\mathrm{d}\lambda_1 = \int_A \mu_2(B)\mathrm{d}\lambda_1 = \lambda_1(A)\mu_2(B) = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

但
$$\int_A f_n(x)\mathrm{d}\lambda_1 = \mu_2(B_n)\mu_1(A_n) = \mu(C_n),$$

从而

$$\sum_n \mu(C_n) = \mu(C).$$

如果 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 分别是给定在 σ - 代数 $\mathfrak{S}_1,\cdots,\mathfrak{S}_n$ 上的 σ 可加测度，那么我们称它们之积为测度 $\mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n$ 的勒贝格扩张. 我们将用符号

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n \quad 或 \quad \otimes \mu_k$$

来表示.

特别，当

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$$

时，就得到测度 μ 的 n 次幂：

$$\mu^n = \otimes \mu_k, \mu_k = \mu.$$

例如，n 维勒贝格测度 μ^n 是线性勒贝格测度 μ 的 n 次幂.

注意，测度积自然而然是完全的（甚至当测度 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 不是完全的也是如此）.

3. 用截线的线性测度之积分表示平面测度之表达式. 勒贝格积分的几何意义
设 (x,y) 平面上的区域 G 由纵线 $x=a, x=b$ 和曲线 $y=\varphi(x), y=\psi(x)$ 所围成.

大家知道，区域 G 的面积可以用积分

$$V(G) = \int_a^b \{\varphi(x) - \psi(x)\}\mathrm{d}x$$

来表示.

这时差 $\varphi(x_0) - \psi(x_0)$ 等于由纵线 $x = x_0$ 所截割的区域 G 的截线长度. 我们的任务就是将这种面积测度的方法推广到任意测度积

$$\mu = \mu_x \otimes \mu_y$$

上去. 往后将假定测度 μ_x 和 μ_y 定义在 σ 代数上，它们是 σ 可加的，并且具有完全性（如果 $B \subset A$ 和 $\mu(A) = 0$，那么 B 是可测的），而这个性质，正如我们在以前早已指出

过的,为所有的勒贝格扩张所具有.

我们引入下列符号:

$$A_x = \{y:(x,y) \in A\} \quad (x \text{ 固定}),$$

$$A_y = \{x:(x,y) \in A\} \quad (y \text{ 固定}).$$

如果 X 和 Y 都是数直线(而 $X \times Y$ 是一个平面),那么 A_{x_0} 便是由纵线 $x = x_0$ 所截割的集 A 的截线在 Y 轴上的投影.

定理 3 在上面所列举的那些假设下,对于任何 μ 可测集[①] A 都有

$$\mu(A) = \int_X \mu_y(A_x)\,\mathrm{d}\mu_x = \int_Y \mu_x(A_y)\,\mathrm{d}\mu_y.$$

证明 只需证明等式

$$\mu(A) = \int_X \varphi_A(x)\,\mathrm{d}\mu_x, \text{其中 } \varphi_A(x) = \mu_y(A_x), \tag{6}$$

因为定理的第二个结论与第一个结论完全相仿. 我们注意,定理自然蕴涵这样的结论,对于几乎所有的 x(在测度 μ_x 的意义下)集 A_x 对测度 μ_y 是可测的,而函数 $\varphi_A(x)$ 对测度 μ_x 是可测的. 要是没有这个结论,公式(6)没有意义.

测度 μ 是定义在 $A = A_{y_0} \times A_{x_0}$ 这种形式的集族 $\mathfrak{S}_m$ 上的测度 $m = \mu_x \times \mu_y$ 的勒贝格扩张. 对于这样的集族,等式(6)是显然成立的,因为对于它们

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \mu_y(A_{x_0}), & \text{当 } x \in A_{y_0} \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x \overline{\in} A_{y_0} \text{ 时}. \end{cases}$$

不难将等式(6)推广到 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 里的那种按 $\mathfrak{S}_m$ 里的两两互不相交的集的有限和这种分解式的集族上去.

在一般情形,等式(6)的证明根据下面的引理,而该引理本身对于勒贝格扩张论具有独特的意义.

引理 对于任何 μ - 可测集 A,都有下面这种形式的集 B 存在:

$$B = \bigcap_n B_n, \quad B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots,$$

$$B_n = \bigcup_k B_{nk}, \quad B_{n1} \subset B_{n2} \subset \cdots \subset B_{nk} \subset \cdots,$$

其中集 B_{nk} 都属于 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$,并且 $A \subset B$,同时

---

① 注意,对 X 积分实际上可以化成对集 $\bigcup_y A_y \subset X$ 积分,在该集之外被积函数等于零. 类似地有 $\int_Y = \int_{\bigcup_x A_x}$.

$$\mu(A)=\mu(B). \tag{7}$$

证明 根据可测性定义，对于任何 n，集 A 可以嵌入集 $C_n=\bigcup_r \Delta_{nr}$——$\mathfrak{S}_m$ 里的集 Δ_{nr} 的并集，使得

$$\mu(C_n)<\mu(A)+1/n.$$

令 $B_n=\bigcap_{k=1}^{n} C_k$ 并注意集 B_n 具有 $B_n=\bigcup_s \delta_{ns}$ 这种形式，其中 δ_{ns} 属于 $\mathfrak{S}_m$. 最后令 $B_{nk}=\bigcup_{s=1}^{k}\delta_{ns}$，我们就得到具有所要求性质的集族 B_{nk}.

引理得证.

利用列维定理（§5 定理 7）甚易将等式(6)从集 $B_{nk}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ 推广到集 B_n 和 B 上去，这是因为

$$\varphi_{B_n}(x)=\lim_{k\to\infty}\varphi_{B_{nk}}(x),\quad \varphi_{B_{n1}}\leqslant\varphi_{B_{n2}}\leqslant\cdots,$$

$$\varphi_B(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{B_n}(x),\quad \varphi_{B_1}\geqslant\varphi_{B_2}\geqslant\cdots$$

的缘故. 根据测度的连续性，这些等式在每一点 x 都成立. 如果 $\mu(A)=0$，那么 $\mu(B)=0$，并且几乎处处有

$$\varphi_B(x)=\mu_y(B_x)=0.$$

因为 $A_x\subset B_x$，所以对于几乎所有的 x，集 A_x 是可测的，并且

$$\varphi_A(x)=\mu_y(A_x)=0,$$

$$\int\varphi_A(x)\,\mathrm{d}\mu_x=0=\mu(A).$$

从而对于测度为零的集 A，公式(6)是正确的. 在一般情形下将 A 表成形式 $B\setminus C$，其中根据(7)，$\mu(C)=0$. 因为公式(6)对于集 B 与集 C 都是正确的，那么容易看出它对集 A 也是正确的. 定理 3 证明完毕.

现在设 Y 是数直线，μ_y 是线性勒贝格测度，而集 A 是满足条件

$$\{(x,y):x\in M,0\leqslant y\leqslant f(x)\} \tag{8}$$

的点 (x,y) 所构成的点集，其中 M 是某 μ_x- 可测集，而 $f(x)$ 是一个非负的可积函数. 在这种情形下

$$\mu_y(A_x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in M \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\,\overline{\in}\, M \text{ 时},\end{cases}$$

而

$$\mu(A)=\int_M f(x)\,\mathrm{d}\mu_x.$$

这样一来,我们已经证明了下面的定理.

定理 4 非负函数 $f(x)$ 的勒贝格积分等于由关系式(8)所确定的集 A 的测度 $\mu=\mu_x\times\mu_y$.

当 X 是数直线,集 M 是个闭区间,而函数 $f(x)$ 按黎曼意义可积时,这个定理归结为大家所熟悉的,以展布在函数图像下面的面积来表示积分.

4. 富比尼定理 我们来考察三重积 $U=X\times Y\times Z$. 如果在 X,Y,Z 上给定了测度 μ_x,μ_y,μ_z,那么测度

$$\mu_u=\mu_x\otimes\mu_y\otimes\mu_z$$

可以定义为

$$(\mu_x\otimes\mu_y)\otimes\mu_z,$$

或定义为

$$\mu_x\otimes(\mu_y\otimes\mu_z).$$

事实上,容易验证,这些定义是等价的.

下面的定理是重积分理论的基础.

定理 5(富比尼) 设两个定义在 σ 代数上的测度 μ_x 和 μ_y 都是 σ - 可加的与完全的;又设

$$\mu=\mu_x\otimes\mu_y,$$

而函数 $f(x,y)$ 在集

$$A\subset X\times Y \tag{9}$$

上按测度 μ 可积. 于是[①]

$$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}\mu=\int_X\left(\int_{A_x} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_y\right)\mathrm{d}\mu_x$$

$$=\int_Y\left(\int_{A_y} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_x\right)\mathrm{d}\mu_y. \tag{10}$$

定理的结论蕴涵着在括号里的两个内积分对于积分变数的几乎所有的值都是存在的,而外积分就是根据内积分的存在而进行的.

证明 我们首先对于 $f(x,y)\geqslant 0$ 的情形证明定理. 为此考察三重积

$$U=X\times Y\times Z,$$

其中第三个因子是数直线,而测度积

$$\lambda=\mu_x\otimes\mu_y\otimes\mu^1=\mu\otimes\mu^1,$$

其中 μ^1 是线性勒贝格测度.

---

① 请参看 §6 第 3 段定理 3 的脚注.

我们按照下列条件来定义 U 里的子集 W：如果$(x,y)\in A, 0\leqslant z\leqslant f(x,y)$，那么$(x,y,z)\in W$. 根据定理4，

$$\lambda(W)=\int_A f(x,y)\mathrm{d}\mu. \tag{11}$$

另一方面，根据定理3

$$\lambda(W)=\int_X \xi(W_x)\mathrm{d}\mu_x, \tag{12}$$

其中 $\xi=\mu_y\times\mu^1$ 而 W_x 表示由(y,z)所构成的集，其中 y,z 满足条件$(x,y,z)\in W$. 这时，再根据定理4，

$$\xi(W_x)=\int_{A_x} f(x,y)\mathrm{d}\mu_y. \tag{13}$$

比较(11)，(12)和(13)，就得到

$$\int_A f(x,y)\mathrm{d}\mu=\int_X\left(\int_{A_x} f(x,y)\mathrm{d}\mu_y\right)\mathrm{d}\mu_x,$$

这就是所要证明的.

一般情形可以利用下面这些等式将其拆开而化为$f(x,y)\geqslant 0$ 这种情形：

$$f(x,y)=f^+(x,y)-f^-(x,y),$$

$$f^+(x,y)=\frac{|f(x,y)|+f(x,y)}{2}, f^-(x,y)=\frac{|f(x,y)|-f(x,y)}{2}.$$

注 下面所举的例子表明从迭积分

$$\int_X\left(\int_{A_x} f\mathrm{d}\mu_y\right)\mathrm{d}\mu_x \quad 和 \quad \int_Y\left(\int_{A_y} f\mathrm{d}\mu_x\right)\mathrm{d}\mu_y \tag{14}$$

的存在，一般说来，既不能推出等式(10)，又不能推出函数$f(x,y)$在 A 上可积. 但只要积分

$$\int_X\left(\int_{A_x} |f(x,y)|\mathrm{d}\mu_y\right)\mathrm{d}\mu_x \quad 或 \quad \int_Y\left(\int_{A_y} |f(x,y)|\mathrm{d}\mu_x\right)\mathrm{d}\mu_y \tag{15}$$

之一存在，那么$f(x,y)$在 A 上可积并且等式(10)是正确的.

事实上，例如，设(15)里的第一个积分存在并且等于 M. 函数 $f_n(x,y)=\min\{|f(x,y)|,n\}$在 A 上有界可测，而这就表明f_n 在 A 上可和. 根据富比尼定理

$$\int_A f_n(x,y)\mathrm{d}\mu=\int_X\left(\int_{A_x} f_n(x,y)\mathrm{d}\mu_y\right)\mathrm{d}\mu_x\leqslant M. \tag{16}$$

函数f_n 构成一个单调非递减序列，几乎处处收敛于$|f(x,y)|$. 根据列维定理，从不等式(16)推出函数$|f(x,y)|$在 A 上可和. 于是$f(x,y)$也是可和的. 而对于它富比尼定理为真. 由此得出我们的结论.

我们在测度 μ_x 和 μ_y(而这意味着 μ)是有限的假定下证明了富比尼定理. 但是,它在 σ 有限测度的情形仍然是正确的(例如,请参看[21],第 208 页).

我们举这样的函数为例,其迭积分(14)是存在的,但等式(10)却不成立.

例 1 设 $A=[-1,1]^2$,

当 $x^2+y^2>0$ 时 $f(x,y)=\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$,而 $f(0,0)=0$.

于是对于所有的 y 有

$$\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0.$$

而对于所有的 x 则有

$$\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

因此

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 0.$$

但那个展布在正方形上的勒贝格二重积分却不存在,因为

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \int_{0}^{1}\mathrm{d}r\int_{0}^{2\pi}\frac{|\sin\varphi\cos\varphi|}{r}\mathrm{d}\varphi = 2\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \infty.$$

例 2 设 $A=[0,1]^2$,

$$f(x,y)=\begin{cases} 2^{2n}, & \text{当}\dfrac{1}{2^n}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}},\dfrac{1}{2^n}\leqslant y<\dfrac{1}{2^{n-1}}\text{时}, \\ -2^{2n+1}, & \text{当}\dfrac{1}{2^{n+1}}\leqslant x<\dfrac{1}{2^n},\dfrac{1}{2^n}\leqslant y<\dfrac{1}{2^{n-1}}\text{时}, \\ 0, & \text{其余情形}. \end{cases}$$

可以算出

$$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = 0.$$

$$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 1.$$

第六章　勒贝格不定积分. 微分论

在这一章里,我们主要研究定义在直线上的函数的勒贝格积分. 假定按其取积分的测度,是通常的线性勒贝格测度.

如果f是定义在具有测度μ的可测空间X上的可和函数,那么,对每一个可测集$A\subset X$,积分

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \qquad (*)$$

存在;而对于固定的f,积分(*)是集函数,它对于所有的可测子集$A\subset X$有定义. 这样的积分称为**勒贝格不定积分**. 特别空间X可以是数轴上的闭区间. 这时,如果A也是某一闭区间,那么积分(*)将是点对——线段A之端点的函数,我们将假定,在这种情形下测度μ就是通常的勒贝格测度,并将$\mathrm{d}\mu$写成$\mathrm{d}t$. 在固定积分区间的一个端点(比方说左端点)之后,我们就可以作为单变量x的函数来研究闭区间$[a,x]$上的积分$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$的性质. 这个问题引导我们去讨论定义在直线上的某些重要函数类. 在§5,将阐明,把固定的函数f的勒贝格积分作为集函数而进行研究的一般问题.

由分析学初等课程知,下面两个基本等式揭示出微分运算与积分运算之间的联系:如果f是连续函数,而F是有连续导数的函数,那么

1)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x),$$

2)
$$\int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

试问:等式1)对于勒贝格意义下的可和函数是否成立? 满足等式2)的函数类是怎

样的(可能更广泛的)?

本章下面几节就研究这些问题.

§1. 单调函数.积分对上限的可微性

1. 单调函数的基本性质 我们从下面明显但是重要的注解:如果函数f是非负的,则$\Phi(x)$是单调非递减函数,开始研究作为上限的函数的勒贝格积分

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

的性质.其次,每一个可和函数是两个非负的可和函数之差:

$$f(t) = f_+(t) - f_-(t). \tag{2}$$

因此积分(1)可分解成两个单调非递减函数之差.从而,作为上限的函数的勒贝格积分的研究,可以化为同一类型的单调函数的研究.单调函数(不管它们的来源如何)具有一系列既简单又重要的性质.我们现在对这些性质加以阐述.

让我们来回忆某些概念.只要没有相反的声明,我们将处处讨论那些给定在某一闭区间上的函数.

函数f称为**单调非递减的**,倘若从$x_1 \leqslant x_2$推出

$$f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

类似地定义单调非递增函数.

设f是直线上的任意函数.极限①

$$\lim_{h \to 0+} f(x_0 + h)$$

(如果它存在),称为函数f在点x_0的**右极限**,并用$f(x_0+0)$表示.类似地定义函数f在点x_0的**左极限**$f(x_0-0)$.显然,等式$f(x_0+0)=f(x_0-0)$表示函数f在点x_0或者连续,或者具有可去间断点.这两个极限存在但彼此不相等的点称为**第一类间断点**,而差$f(x_0+0)-f(x_0-0)$称为函数f在该点的**跃度**.

如果$f(x_0)=f(x_0-0)$,那么f称为在点x_0**左连续**,而如果$f(x_0)=f(x_0+0)$,那么f称为在该点**右连续**.

我们来揭示单调函数的一些基本性质.为明确计,我们将只讨论单调非递减函数,显然下面所说的一切可以自动移植到单调非递增函数.

(1) 每一个在$[a,b]$上单调非递减的函数f可测并且有界,从而可和.

事实上,根据单调性的定义,对于任意$x \in [a,b]$,有

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b).$$

① 符号$h \to 0+$表示h趋于零时仅取正值.

其次，对于任何常数 c，集

$$A_c = \{x : f(x) < c\}$$

或者是闭区间，或者是半开区间（或者是空集）．事实上，设使 $f(x) < c$ 的点存在，又设 d 是这些 x 的上确界．于是 A_c 或者是闭区间 $[a,d]$ 或者是半开区间 $[a,d)$．

（2）单调函数只可能有第一类间断．

事实上，设 x_0 是 $[a,b]$ 上的任意点，而 $x_n \to x_0$，并且 $x_n < x_0$．于是序列 $\{f(x_n)\}$ 有下界和上界［例如函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$ 分别是下界和上界］．从而，它至少有一个极限点．但任何这样的序列若有若干个极限点显然就会与函数 f 的单调性相矛盾．这样一来，$f(x_0 - 0)$ 就存在．类似地可以确立 $f(x_0 + 0)$ 的存在性．

单调函数不一定是连续的．但是下面的结论是正确的．

（3）单调函数之间断点的集合最多是可数的．

事实上，在闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数 f 的任何有限个跃度之和不超过 $f(b) - f(a)$．从而，对于任意 n，其跃度值大于 $1/n$ 的个数是有限的．对所有的 $n = 1,2,\cdots$ 求和，可见跃度的总数是有限的或可数的．

在单调函数中间最简单的是所谓**阶跃函数**．它们可用下述方法来构造．设在区间 $[a,b]$ 上给定了有限个或可数个点

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

又设它们之中的每一个与正数 h_n 建立了对应关系，并且 $\sum\limits_n h_n < \infty$．我们在 $[a,b]$ 上定义函数 f，令

$$f(x) = \sum_{x_n < x} h_n. \tag{3}$$

显然，这个函数是单调非递减的．此外，它在每一点是左连续的①，而它的间断点全体与集 $\{x_n\}$ 重合②，并且在点 x_n 的跃度等于 h_n．事实上

$$f(x-0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} f(x-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sum_{x_n < x-\varepsilon} h_n,$$

但因每一个满足条件 $x_n < x$ 的 x_n，当 ε 充分小时也满足条件 $x_n < x - \varepsilon$，所以上式右端的极限等于 $\sum\limits_{x_n < x} h_n = f(x)$．这样一来，$f(x-0) = f(x)$．如果点 x 与诸点 x_n 之一重合，比如说与 $x = x_0$ 重合，那么

---

① 要是我们用公式

$$f(x) = \sum_{x_n \leqslant x} h_n$$

来定义 f，那么所得到的函数就会是右连续的．

② 只要诸点 x_n 中没有一个与 b 相重合，因为 $x_n = b$ 未进入和式(3)中．欲计算 b 点的跃度，应考虑用半开区间 $[a, b+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ 来代替 $[a,b]$．

$$f(x_{n_0}+0)=\lim_{\varepsilon\to 0+}f(x_{n_0}+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\sum_{x_n<x_{n_0}+\varepsilon}h_n=\sum_{x_n\leqslant n_0}h_n,$$

即$f(x_{n_0}+0)-f(x_{n_0}-0)=h_{n_0}$.

最后,如果 x 与诸点 x_n 中间的任何一个都不重合,那么阶跃函数在该点是连续的(试证明之!).

阶跃函数的最简单的类型是阶梯函数,它们的间断点可以排成一个单调序列

$$x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots.$$

在一般情形下阶跃函数可以具有更复杂的结构,例如,如果$\{x_n\}$是闭区间$[a,b]$上所有的有理点的集合,而$h_n=1/2^n$,那么公式(3)定义了这样一个阶跃函数,它在有理点是间断的,而在无理点则是连续的.

单调函数的另一种类型,在某种意义上与阶跃函数正好相反,是所谓的连续单调函数. 下面的结论是成立的.

(4) 每一个左连续的单调函数,可以表成连续的单调函数与(左连续的)阶跃函数之和,并且这种表示法是唯一的.

事实上,设f是一个非递减左连续函数,$x_1,x_2,\cdots$是它的全部间断点,而h_1, $h_2,\cdots$是它在这些点上的跃度. 令

$$H(x)=\sum_{x_n<x}h_n.$$

差$\varphi=f-H$是一个非递减的连续函数. 为了证明这一点让我们来考虑差

$$\varphi(x'')-\varphi(x')=[f(x'')-f(x')]-[H(x'')-H(x')],$$

其中$x'<x''$. 这里,右端是函数f在闭区间$[x',x'']$上的全增量与它在这个区间上的跃度之和的差. 显然,这个量是非负的,即φ是一个非递减函数. 其次,对于任意的点x^*,有

$$\varphi(x^*-0)=f(x^*-0)-H(x^*-0)=f(x^*-0)-\sum_{x_n<x^*}h_n,$$

$$\varphi(x^*+0)=f(x^*+0)-H(x^*+0)=f(x^*+0)-\sum_{x_n\leqslant x^*}h_n,$$

由此

$$\varphi(x^*+0)-\varphi(x^*-0)=f(x^*+0)-f(x^*-0)-h^*=0$$

(其中h^*是函数H在点x^*的跃度). 由此从f的左连续性和H的左连续性,可推出φ确是连续的.

2. 单调函数的可微性 现在我们转到讨论单调函数的导数存在的问题.

定理 1(勒贝格) 定义在闭区间$[a,b]$上的单调函数f在该闭区间上几乎处处有有限导数.

首先引入某些在证明这个定理时需要用到的概念.

大家知道,函数 f 在点 x_0 的导数就是比式

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4}$$

当 $x \to x_0$ 时的极限. 这个极限当然可以不存在. 但是下面的四种量(它们也可以取无穷大值)总是有意义的:

$\Lambda_{右}$ 是比式(4)当 x 从 x_0 右方趋向于 x_0 时(即使得 $x-x_0>0$)的上极限. 这个量称为**右上导数**.

$\boldsymbol{\lambda}_{右}$(**右下导数**)是比式(4)当 x 从 x_0 右方趋向于 x_0 时的下极限.

$\Lambda_{左}$(**左上导数**)是比式(4)当 x 从 x_0 左方趋向于 x_0 时的上极限.

$\boldsymbol{\lambda}_{左}$(**左下导数**)是比式(4)当 x 从 x_0 左方趋向于 x_0 时的下极限.

在图 19 上标明斜率分别为 $\Lambda_{右}, \boldsymbol{\lambda}_{右}, \Lambda_{左}, \boldsymbol{\lambda}_{左}$ 的直线. 显然,永远有

$$\boldsymbol{\lambda}_{右} \leqslant \Lambda_{右} \text{ 和 } \boldsymbol{\lambda}_{左} \leqslant \Lambda_{左}.$$

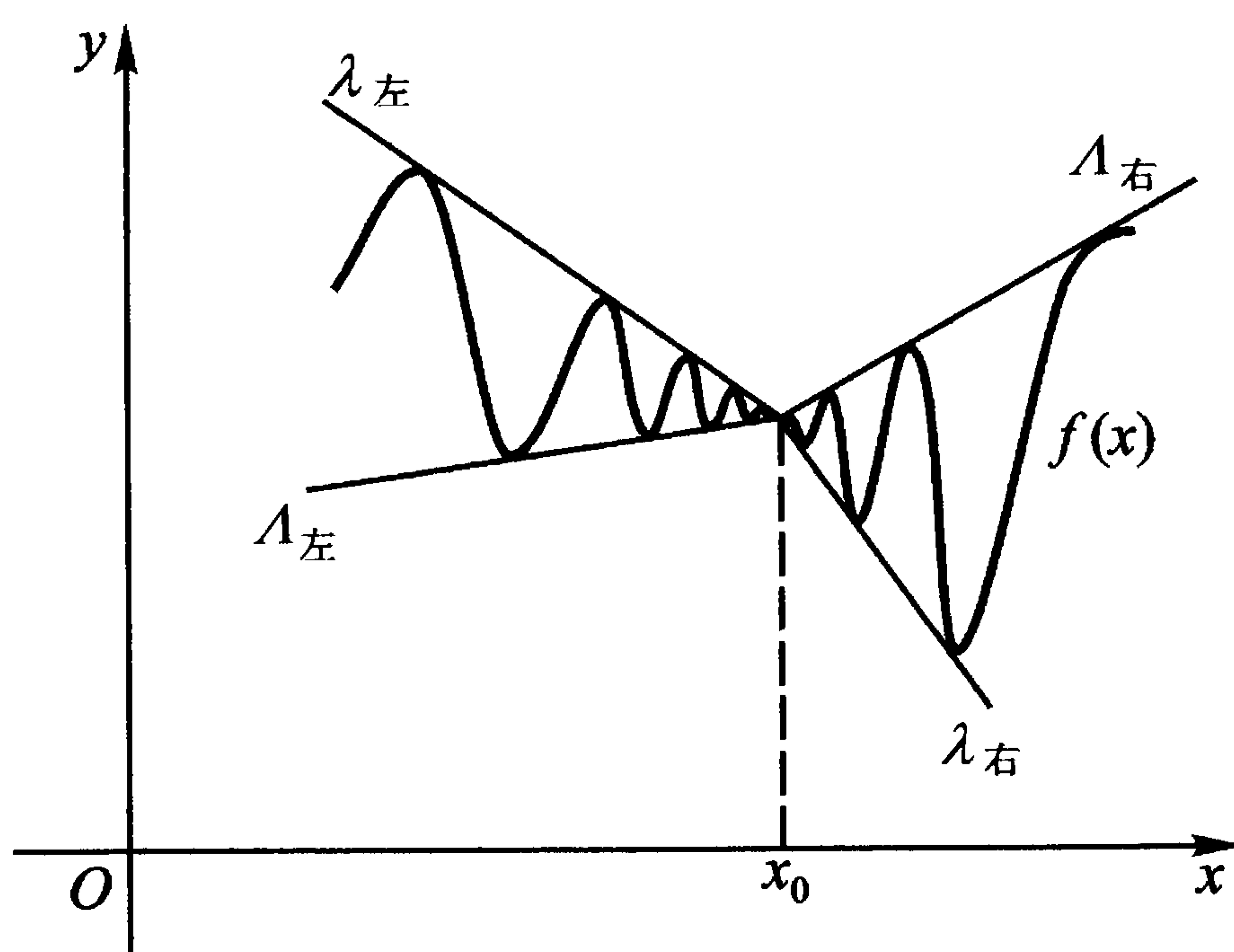


图　19

如果 $\Lambda_{右}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_{右}$ 有限并且彼此相等,那么它们的这个公共值就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数. 类似地,如果 $\Lambda_{左}=\boldsymbol{\lambda}_{左}$,那么它们的公共值就是左导数. f 在点 x_0 有有限导数,等价于在该点函数 f 的所有导数都有限并且彼此相等. 因此勒贝格定理的结论可以陈述如下:对于在 $[a,b]$ 上单调的函数,关系式

$$-\infty < \boldsymbol{\lambda}_{左} = \boldsymbol{\lambda}_{右} = \Lambda_{左} = \Lambda_{右} < \infty$$

在 $[a,b]$ 上几乎处处成立.

习题　设 $f^*(x)=-f(x)$. 问 f^* 的导数与 f 的导数有什么关系?

当 $f(x)$ 变为 $f(-x)$ 时,试回答同样的问题.

勒贝格定理的证明以下面的引理为依据,而这个引理我们今后也将用到它.

我们引入下述定义. 设 $g(x)$ 是一个给定在闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的连续函数. 这个闭区间上的点 x_0 称为函数 g 的**右不可见点**,倘若存在这样一点 $\xi(x_0<\xi\leqslant b)$,使得 $g(x_0)<g(\xi)$(图 20).

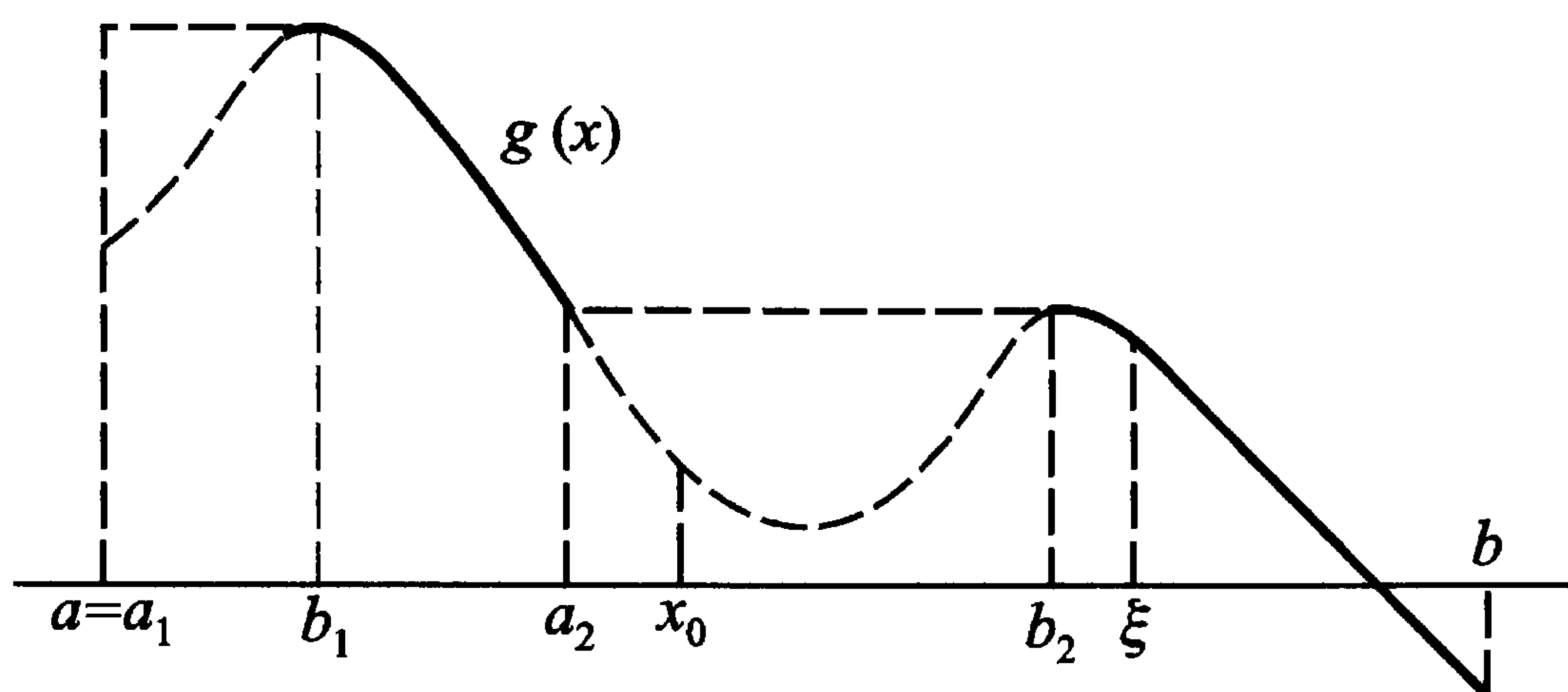


图 20

引理(里斯) 对于任何一个连续函数 g,右不可见点的集合在闭区间 $[a,b]$ 上是开的,从而可以表示成有限个或可数个两两互不相交的开区间 (a_k,b_k)(也可能包含点 a 的半开区间)之和. 这些开区间的端点满足不等式

$$g(a_k) \leqslant g(b_k). \tag{5}$$

引理的证明 如果 x_0 是 g 的右不可见点,那么,根据 g 的连续性,任何一个充分接近 x_0 的点也将具有同一性质. 从而,这样的一些点所构成的集在 $[a,b]$ 上是开的. 设 (a_k,b_k) 是它的构成区间之一,假定

$$g(a_k) > g(b_k). \tag{6}$$

那么在开区间 (a_k,b_k) 内可以找到一个内点 x_0 使得 $g(x_0)>g(b_k)$. 设 x^* 是 (a_k,b_k) 内使 $g(x)=g(x_0)$ 的一切点 x 里的最右面的一点.

因为 $x^*\in(a_k,b_k)$,就有这样的点 $\xi>x^*$ 存在,使得 $g(\xi)>g(x^*)$. 点 ξ 不可能位于开区间 (a_k,b_k) 内,因为 x^* 是该开区间内使 $g(x)=g(x_0)$ 的最右的一点,然而 $g(b_k)<g(x_0)$. 另一方面,不等式 $\xi>b_k$ 也不可能成立,因为否则就会有 $g(b_k)<g(x_0)<g(\xi)$,然而 b_k 并不是右不可见点. 所得到的这个矛盾表明不等式(6)不成立,即 $g(a_k)\leqslant g(b_k)$,因而引理得证. 读者不难验证,实际上 $g(a_k)=g(b_k)$,只要 $a_k\neq a$.

注 我们称点 x_0 是连续函数 $g(x)$ 的**左不可见点**,倘若有这样的点 $\xi<x_0$ 存在,使得 $g(\xi)>g(x_0)$. 同样的推理可以证明,左不可见点的集合是有限个或可数个两两互不相交的开区间 (a_k,b_k)(也可能包括含点 b 的半开区间)之和,并且

$$g(a_k) \geqslant g(b_k).$$

现在我们转到勒贝格定理本身的证明. 我们首先在 f 是单调非递减连续函数的假定下,证明该定理. 为此只需证明几乎处处有

1) $\Lambda_{右}<\infty$,2) $\lambda_{左}\geqslant\Lambda_{右}$.

事实上,如果我们假定 $f^*(x)=-f(-x)$,那么定义在闭区间 $[-b,-a]$ 上的函数 f^* 也将是单调非递减的连续函数. 如果 $\Lambda^*_{右}$ 和 $\lambda^*_{左}$ 分别是 f^* 的右上导数和左下导数,那么容易验证(参看前面的习题),函数 f 和 f^* 在相应点上的导数满足等式 $\Lambda^*_{右}=\Lambda_{左}$ 和 $\lambda^*_{左}=\lambda_{右}$. 因此,把不等式 2)用于 $f^*(x)$,就得到

$$\lambda_{右} \geqslant \Lambda_{左}. \tag{7}$$

将所得到的这些不等式联结起来写成一个不等式链,再利用导数的定义,就有

$$\Lambda_{右} \leqslant \lambda_{左} \leqslant \Lambda_{左} \leqslant \lambda_{右} \leqslant \Lambda_{右}.$$

而这就表示

$$\lambda_{左} = \lambda_{右} = \Lambda_{左} = \Lambda_{右}.$$

我们首先来证明,几乎处处有 $\Lambda_{右} < \infty$. 如果在某一点 x_0 处有 $\Lambda_{右} = \infty$,那么对于任何常数 $C > 0$,在点 x_0 之右可以找到这样一点 ξ,使得

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > C,$$

即

$$f(\xi) - f(x_0) > C(\xi - x_0),$$

或

$$f(\xi) - C\xi > f(x_0) - Cx_0.$$

换言之,点 x_0 是函数

$$g(x) = f(x) - Cx$$

的右不可见点. 根据里斯引理,这样的点所构成的集是开的,而在组成它的那些开区间 (a_k, b_k) 的端点上满足不等式

$$f(a_k) - Ca_k \leqslant f(b_k) - Cb_k,$$

即

$$f(b_k) - f(a_k) \geqslant C(b_k - a_k).$$

将所得到的这些不等式除以 C,再对所有的开区间 (a_k, b_k) 求和,就得到

$$\sum_k (b_k - a_k) \leqslant \sum_k \frac{f(b_k) - f(a_k)}{C} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{C}.$$

这里 C 可以取得任意地大. 这样一来,那些使 $\Lambda_{右} = \infty$ 的点所构成的集可以被一些开区间所覆盖,而且这些区间的长度之和可以任意地小. 从而,这个集的测度等于 0.

这个与里斯引理有联系的方法,还可以用来证明几乎处处有 $\lambda_{左} \geqslant \Lambda_{右}$,但现在这个方法需要运用两次. 我们来考虑这样的有理数偶 c 和 C,其中 $0 < c < C < \infty$. 令 $\rho = c/C$. 用 $E_{c,C}$ 表示那些使 $\Lambda_{右} > C$,而 $\lambda_{左} < c$ 的 x 的全体. 如果能证明 $\mu E_{c,C} = 0$,那么由此可见几乎处处有 $\lambda_{左} \geqslant \Lambda_{右}$,因为那些使 $\lambda_{左} < \Lambda_{右}$ 的点所构成的集,显然,可以表示成最多是可数个形如 $E_{c,C}$ 的集之和.

现在我们来建立一个基本不等式.

对于任何开区间$(\alpha,\beta)\subset[a,b]$,有

$$\mu(E_{c,C}\cap(\alpha,\beta))\leqslant\rho(\beta-\alpha).$$

事实上,我们首先考虑(α,β)中使$\lambda_{左}<c$的那些点x所构成的集. 对于每一个这样的点x,可以找到这样的$\xi<x$,使得$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}<c$,即$f(\xi)-c\xi>f(x)-cx$. 因此$x$是函数$f(x)-cx$的左不可见点,而根据里斯引理(参看前面的注)这样的x所构成的集可以表示成不多于可数个两两不交的开区间$(\alpha_k,\beta_k)\subset(\alpha,\beta)$之和,并且$f(\alpha_k)-c\alpha_k\geqslant f(\beta_k)-c\beta_k$,即

$$f(\beta_k)-f(\alpha_k)\leqslant c(\beta_k-\alpha_k).\tag{8}$$

在每一个开区间(α_k,β_k)里考虑那些使$\Lambda_{右}>C$的点x所构成的集G_k. 仍运用里斯引理(现在,正如对于右不可见点,证明不等式$\Lambda_{右}<\infty$时一样),我们就得到,G_k可以表示成不多于可数个两两不交的开区间(α_k,β_k)之和,并且

$$\beta_{kj}-\alpha_{kj}\leqslant\frac{1}{C}[f(\beta_{kj})-f(\alpha_{kj})].\tag{9}$$

显然,集$E_{c,C}\cap(\alpha,\beta)$被诸开区间$(\alpha_{kj},\beta_{kj})$所构成的集族所覆盖,并且根据(8)和(9)有

$$\begin{aligned}\sum_{k,j}(\beta_{kj}-\alpha_{kj})&\leqslant\frac{1}{C}\sum_{k,j}[f(\beta_{kj})-f(\alpha_{kj})]\\&\leqslant\frac{1}{C}\sum_{k}[f(\beta_k)-f(\alpha_k)]\leqslant\frac{c}{C}\sum_{k}(\beta_k-\alpha_k)\\&\leqslant\rho(\beta-\alpha),\end{aligned}$$

因而基本不等式得证.

现在容易证明$\mu E_{c,C}=0$.

这时只需利用集$E_{c,C}$的那个由不等式所描述的性质.

引理 假设在闭区间$[a,b]$上的可测集A具有这样的性质:对于任何开区间$(\alpha,\beta)\subset[a,b]$,满足不等式$\mu(A\cap(\alpha,\beta))\leqslant\rho(\beta-\alpha)$,其中$0<\rho<1$. 那么$\mu(A)=0$.

证明 设$\mu A=t$. 对于任何$\varepsilon>0$,存在这样一个开集G:它等于可数个两两不交的开区间(a_m,b_m)之和,且使$A\subset G$, $\sum_m(b_m-a_m)<t+\varepsilon$(参看第五章 §5 第7段中的习题). 令$t_m=\mu[A\cap(a_m,b_m)]$. 显然$t=\sum_m t_m$. 根据引理条件,$t_m\leqslant\rho(b_m-a_m)$. 从而,$t\leqslant\rho\sum_m(b_m-a_m)<\rho(t+\varepsilon)$. 因为$\varepsilon>0$是任意的,所以$t\leqslant\rho t$. 但是$0<\rho<1$,因此$t=0$.

引理得证. 从而,在f是连续函数这一假定下证明了定理1.

只要将里斯引理的推广用到具有第一类间断的函数就可以把同样的推理移植

到间断单调函数的情形.

设 g 是闭区间 $[a,b]$ 上仅具有第一类间断的函数. 我们称点 $x_0 \in [a,b]$ 是 $g(x)$ 的**右不可见点**,倘若有这样的 $\xi > x_0$ 存在,使得

$$\max[g(x_0 - 0), g(x_0), g(x_0 + 0)] < g(\xi).$$

那么和 g 是连续的情形一样,函数 g 的右不可见点所构成的集是开的,而在组成它的那些开区间 (a_k, b_k) 的端点上满足不等式

$$g(a_k) \leqslant g(b_k).$$

尽管定理 1 的证明相当长,它本身却有简单的直观意义. 例如,我们来解释为什么 $\Lambda_{右}$(和 $\Lambda_{左}$)一定是几乎处处有限的. 比式 $\Delta f/\Delta x$ 是在映射 f 下闭区间 $[a,b]$ 在给定点 x 的"延伸系数". 因为在这个映射下有限闭区间 $[a,b]$ 变为有限闭区间 $[f(a), f(b)]$,所以在正测度集上"延伸"不可能为无穷大.

下面关于单调函数项级数可以逐项微分的定理(有时称为"富比尼小定理")有时是有用的.

定理 2　处处收敛的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = F(x), \tag{10}$$

其中 F_n 是 $[a,b]$ 上的单调非递减函数,几乎处处容许逐项微分

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) = F'(x).$$

证明　将 $F_n(x)$ 用 $F_n(x) - F_n(a)$ 来代替后,可以认为所有的 $F_n(x)$ 都是非负的,且在 $x = a$ 处变为零.

根据定理 1,存在完全测度集 $E \subset [a,b]$,使得在其上所有的 $F'_n(x)$ 和 $F'(x)$ 都存在. 设 $x \in E$,而 $\xi \in [a,b]$ 是任意的. 我们有

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}[F_n(\xi) - F_n(x)]}{\xi - x} \leqslant \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}.$$

因为 $\xi - x$ 与 $F_n(\xi) - F_n(x)$ 同号(由于单调性!),故对于任意 N,有

$$\frac{\sum_{n=1}^{N}\{F_n(\xi) - F_n(x)\}}{\xi - x} \leqslant \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}.$$

当 $\xi \to x$ 时取极限,就得到

$$\sum_{n=1}^{N} F'_n(x) \leqslant F'(x).$$

因为所有的 $F'_n(x) \geqslant 0$,由此推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) \leqslant F'(x). \tag{11}$$

这样,由导数 $F'_n(x)$ 所组成的级数在 E 上处处收敛. 我们来证明,对于几乎所有的 x,(11)中等号成立. 对于每一个 k,可以找到级数(10)的这样的部分和 $S_{n_k}(x)$,使得

$$0 \leqslant F(b) - S_{n_k}(b) < 1/2^k.$$

因为函数 $F(x) - S_{n_k}(x) = \sum_{m>n_k} F_m(x)$ 是非递减的,所以对于任何 x,有

$$0 \leqslant F(x) - S_{n_k}(x) < 1/2^k.$$

由此推出,由非递减函数所组成的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} [F(x) - S_{n_k}(x)] \tag{12}$$

在整个闭区间 $[a,b]$ 上收敛(甚至是一致收敛). 于是,根据已经证明了的结果,由(12)逐项微分所得到的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} [F'(x) - S'_{n_k}(x)] \tag{13}$$

几乎处处收敛. 从而,级数(13)的通项几乎处处收敛于零,即几乎处处有 $S'_{n_k}(x) - F'(x) \to 0$. 但如果在不等式(11)中不等号 $<$ 成立,那么任何部分和序列都不可能收敛于 $F'(x)$. 从而几乎处处有

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) = F'(x).$$

定理得证.

推论 阶跃函数几乎处处有等于零的导数.

事实上,这样的函数是由非递减"阶梯"函数

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leqslant x_n \text{ 时}, \\ h_n, & \text{当 } x > x_n \text{ 时} \end{cases}$$

所组成的收敛级数之和,而每一个这样的阶梯函数都几乎处处有等于零的导数.

3. 积分对上限求导数 因为任何可和函数的积分

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt$$

可以表示成两个单调函数之差,故从定理 1 立即推出下列结果.

定理 3 对于每一个可和函数 φ,导数

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(t)\,dt \tag{14}$$

对于几乎所有的 x 都存在.

必须强调指出，虽然我们确立了导数(14)几乎处处存在，但是我们还没有讨论关于等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(x)$$

是否成立的问题. 事实上(参看§3)，这个等式对于任何可和函数 φ 几乎处处是正确的.

§2. 有界变差函数

关于勒贝格积分对上限是否可微的问题，引导我们研究一类可以表示成单调函数之差的函数. 在这一节里，我们对这些函数作不依赖于单调性概念的另一种描述，并且讨论它们的一些基本性质. 我们从一些必要的定义开始.

定义 1　给定在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 f 称为**有界变差函数**，倘若存在这样一个常数 C，对于闭区间 $[a,b]$ 用点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

所作的任何分割 f 都满足不等式

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant C. \tag{1}$$

每个单调函数都有有界变差，因为对于任意单调函数，(1)中左端的和与分割的取法无关，并且永远等于 $|f(b) - f(a)|$.

定义 2　设 f 是有界变差函数. 和式(1)对闭区间 $[a,b]$ 所有可能的有限分割的上确界，称为函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上的**全变差**，记作 $V_a^b[f]$. 这样一来，

$$V_a^b[f] = \sup\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

注　给定在整个直线上的函数 f 称为**有界变差函数**，倘若量 $V_a^b[f]$ 全有界. 这时

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} V_a^b[f]$$

称为函数 f 在直线 $-\infty < x < \infty$ 上的**全变差**，并用符号 $V_{-\infty}^{\infty}[f]$ 来表示.

我们来揭示全变差函数的一些基本性质.

(1) 如果 α 是常数，那么

$$V_a^b[\alpha f] = |\alpha| V_a^b[f].$$

这个性质立刻从 $V_a^b[f]$ 的定义推出.

(2) 如果 f 和 g 都是有界变差函数，那么 $f+g$ 也具有有界变差，并且

$$V_a^b[f+g] \leqslant V_a^b[f] + V_a^b[g]. \tag{2}$$

事实上,对于闭区间$[a,b]$的每种分割都有

$$\sum_k |f(x_k)+g(x_k)-f(x_{k-1})-g(x_{k-1})|$$
$$\leqslant \sum_k |f(x_k)-f(x_{k-1})| + \sum_k |g(x_k)-g(x_{k-1})|,$$

由此可见(2)式成立,因为永远有

$$\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B.$$

性质1和性质2表明,定义在给定闭区间$[a,b]$上的有界变差函数的线性组合仍是有界变差函数. 换言之,有界变差函数构成一个线性空间(与单调函数所构成的集不相同,单调函数并不构成线性空间).

(3) 如果$a<b<c$,那么

$$V_a^b[f] + V_b^c[f] = V_a^c[f]. \tag{3}$$

事实上,我们首先考虑闭区间$[a,c]$的这样的一种分割,使b作为它分点中的一个,比如说,$x_r=b$. 于是

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k)-f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^r |f(x_k)-f(x_{k-1})| +$$
$$\sum_{k=r+1}^n |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leqslant V_a^b[f] + V_b^c[f]. \tag{4}$$

现在我们来取闭区间$[a,c]$的任意分割. 显然,如果将它的分点再增加一个,即b点,那么由于这样增加分点,和

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

不减小. 从而,不等式(4)对于闭区间$[a,c]$的任何分割都是成立的,因此

$$V_a^c[f] \leqslant V_a^b[f] + V_b^c[f]. \tag{4'}$$

另一方面,对于每个$\varepsilon>0$,可以找到区间$[a,b]$和区间$[b,c]$的分割,使得

$$\sum_i |f(x'_i)-f(x'_{i-1})| > V_a^b[f] - \frac{\varepsilon}{2}$$

且

$$\sum_j |f(x''_j)-f(x''_{j-1})| > V_b^c[f] - \frac{\varepsilon}{2}.$$

将这两个分割联合,我们就得到闭区间$[a,c]$的分割. 对于所得分割,有

$$\sum_k |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= \sum_i |f(x'_i) - f(x'_{i-1})| + \sum_j |f(x''_j) - f(x''_{j-1})|$$

$$> V_a^b[f] + V_b^c[f] - \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性,由此可见

$$V_a^c[f] \geqslant V_a^b[f] + V_b^c[f]. \tag{5}$$

从(4′)和(5)推出(3).

因为任何函数在任何闭区间上的全变差是非负的,所以从性质 3 立刻推出性质 4:

(4) 函数

$$v(x) = V_a^x[f]$$

是单调非递减的.

(5) 如果 f 在点 x^* 左连续,那么 v 在该点也左连续.

事实上,设给定 $\varepsilon > 0$. 选取 $\delta > 0$ 使得当 $x^* - \delta < x \leqslant x^*$ 时,有 $|f(x^*) - f(x)| < \varepsilon/2$. 其次,选取分割

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x^*,$$

使得

$$V_a^{x^*}[f] - \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

这时我们可以认为

$$x^* - x_{n-1} < \delta$$

(否则,我们可以再增加一个分点,由此不等式(6)左端的差只可能减小). 因此,有

$$|f(x^*) - f(x_{n-1})| < \varepsilon/2.$$

从而

$$V_a^{x^*}[f] - V_a^{x_{n-1}}[f] < \varepsilon, \text{即} \; v(x^*) - v(x_{n-1}) < \varepsilon.$$

因为 v 是单调非递减函数,所以由此推出:对于一切满足不等式 $x_{n-1} \leqslant x \leqslant x^*$ 的 x,有 $v(x^*) - v(x) < \varepsilon$. 而这说明函数 v 在点 x^* 左连续.

如果函数 f 在点 x^* 右连续,那么通过类似的推理可以证明,v 在该点也右连续. 从而,如果 f 在某一点上(或在整个闭区间 $[a,b]$ 上)连续,那么 v 在该点(或在整个闭区间 $[a,b]$ 上)也连续.

设 f 是 $[a,b]$ 上的任意有界变差函数,而 v 是它在 $[a,x]$ 上的全变差. 考虑差

$$\varphi = v - f.$$

这个差是单调非递减函数. 事实上,设 $x'\leqslant x''$. 则有

$$\varphi(x'')-\varphi(x')=[v(x'')-v(x')]-[f(x'')-f(x')]. \tag{7}$$

但永远有

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant v(x'')-v(x')=V_{x'}^{x''}[f],$$

因此等式(7)的右端是非负的,从而等式(7)的左端也是非负的.

这样,由于

$$f=v-\varphi,$$

我们就得到了下面的结果.

定理 1 任意有界变差函数都可以表示成两个单调非递减函数之差.

逆定理是显然的:任意可以表示成两个单调函数之差的函数具有有界变差. 因此我们在上一节里已讨论过的,可表示成单调函数之差的函数的全体,就是有界变差函数的全体.

从定理 1 和上一节证明的关于单调函数有导数的勒贝格定理立刻可以推出,每一有界变差函数几乎处处具有有限导数.

将单调函数转换为有界变差函数,就可以利用下述方法来推广前面引入的阶跃函数的概念. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 是 $[a,b]$ 上的有限点集或可数点集. 与每一个这样的点 x_n 相对应地置两个数 g_n 和 h_n 使得

$$\sum_n(|g_n|+|h_n|)<\infty.$$

此外,我们还假定,当 $x_n=a$ 时,$g_n=0$,而当 $x_n=b$ 时,$h_n=0$.

令

$$\psi(x)=\sum_{x_n<x}g_n+\sum_{x_n<x}h_n. \tag{8}$$

现在我们就称任何形如(8)的函数为阶跃函数. 函数 $\psi(x)$ 的全变差显然等于

$$\sum_n(|g_n|+|h_n|).$$

数 g_n 和 h_n 中至少有一个不为零的那些 x_n 是函数(8)的间断点,并且

$$\psi(x_n)-\psi(x_n-0)=g_n,\quad \psi(x_n+0)-\psi(x_n)=h_n.$$

现在就容易得到下面的结论,它是上一节第 1 段结论 4 的推广.

每一个定义在 $[a,b]$ 上的有界变差函数 f,可以唯一地表示成

$$f=\varphi+\psi,$$

其中 φ 是连续函数,而 ψ 是阶跃函数.

习题 1 如果 f 在 $[a,b]$ 上有有界导数[即 $f'(x)$ 处处存在且 $|f'(x)|<C$],那么 f 是有界变差函数,并且

$$V_a^b[f] \leqslant C(b-a).$$

习题 2 设$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$而$f(0)=0$. 试证函数$f$在$[0,1]$上的变差是无穷大.

常数也仅有它们才是全变差为零的函数. 令

$$\|f\| = V_a^b[f].$$

量 $V_a^b[f]$具有范数的性质2)和3)(参见第二章 §3 第1段). 但不具有性质1). 如果仅考虑那些满足补充条件$f(a)=0$ 的函数,那么它们也构成线性空间,在该空间中量 $V_a^b[f]$已经具有范数的所有性质. $[a,b]$上那些满足条件$f(a)=0$,具有通常的加法定义和数乘的定义且赋有范数

$$\|f\| = V_a^b[f]$$

的有界变差函数所构成的空间 $V^0[a,b]$称为有界变差函数空间.(试证此空间的完备性.)

习题 3 证明: $\|f\| = |f(a)| + V_a^b[f]$是闭区间$[a,b]$上所有有界变差函数的空间中的范数,并且证明此空间的完备性.

§3. 勒贝格不定积分的导数

在 §1 里我们证明了,勒贝格积分

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

作为 x 的函数几乎处处具有有限导数. 但是我们当时还未阐明,这个导数与被积函数有什么关系. 现在我们来确立 §1 末尾所提到过的以下结果.

定理 1 对于每一个可和函数f,等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

几乎处处成立.

证明 令

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

我们首先来证明,几乎处处有

$$f(x) \geqslant \Phi'(x).$$

如果$f(x)<\Phi'(x)$,那么就可以找到有理数 α 和 β,使得

$$f(x) < \alpha < \beta < \Phi'(x). \tag{1}$$

设 $E_{\alpha\beta}$是那些满足不等式(1)的点所构成的集. 它是可测的,因为f 和 Φ'都是可测

的. 我们来证明,每一个这样的点集 $E_{\alpha\beta}$ 的测度都等于零. 因为这种集的个数是可数的,所以由此就可推出

$$\mu\{x: f(x) < \Phi'(x)\} = 0.$$

设 $\varepsilon>0$ 是任意的,又设 $\delta>0$ 使得当 $\mu(e)<\delta$ 时,有

$$\left|\int_e f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$$

(根据积分的绝对连续性,知对于任何 ε 这样的 δ 是存在的. 参看第五章 §5 定理 5). 现在我们选择一开集 $G\subset[a,b]$,使得

$$G\supset E_{\alpha\beta} \text{ 且 } \mu(G) < \mu(E_{\alpha\beta}) + \delta$$

(参看第五章 §5 第 7 段中的习题). 如果 $x\in E_{\alpha\beta}$,那么对于充分靠近 x 的那些 $\xi>x$ 都有

$$\frac{\Phi(\xi) - \Phi(x)}{\xi - x} > \beta. \tag{2}$$

将不等式(2)写成下述形式

$$\Phi(\xi) - \beta\xi > \Phi(x) - \beta x,$$

由此可见,在组成集 G 的任一开区间上,点 x 是函数 $\Phi(x)-\beta x$ 的右不可见点. 利用里斯引理,我们就可以指出这样一个由不相交开区间所组成的开集 $S=\bigcup\limits_k (a_k,b_k)$,使得 $E_{\alpha\beta}\subset S\subset G$ 且

$$\Phi(b_k) - \beta b_k \geqslant \Phi(a_k) - \beta a_k, \text{即 } \Phi(b_k) - \Phi(a_k) \geqslant \beta(b_k - a_k),$$

或

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \beta(b_k - a_k).$$

将这些不等式对组成 S 的所有的开区间 (a_k,b_k) 求和,即可得到

$$\int_S f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \beta\mu(S). \tag{3}$$

同时,有

$$\begin{aligned}\int_S f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{E_{\alpha\beta}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{S\setminus E_{\alpha\beta}} f(t)\,\mathrm{d}t < \alpha\mu(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon \\ &\leqslant \alpha\mu(S) + \varepsilon + |\alpha|\delta. \end{aligned}\tag{4}$$

比较(3)和(4),就得到

$$\alpha\mu(S) + \varepsilon + |\alpha|\delta \geqslant \beta\mu(S),$$

即

$$\mu(S) \leqslant \frac{\varepsilon + |\alpha|\delta}{\beta - \alpha}.$$

这样一来,集 $E_{\alpha\beta}$ 可以包含在具有任意小的测度的开集内(例如,我们可以认为 $|\alpha|\delta \leqslant \varepsilon$),而这就表示 $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$. 这样,我们就证明了几乎处处有

$$f(x) \geqslant \Phi'(x).$$

将 $f(x)$ 换为 $-f(x)$,我们用同样的方法可以得到,几乎处处有

$$-f(x) \geqslant -\Phi'(x), \text{即} f(x) \leqslant \Phi'(x).$$

从而,几乎处处有

$$f(x) = \Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

§4. 用函数的导数求原函数. 绝对连续函数

这样,我们解决了本章开头所提出的第一个问题,对于任何 $[a,b]$ 上可和的函数 f 建立了等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \quad (\text{几乎处处有}).$$

现在我们来讨论本章开头所陈述的第二个问题,阐明如何将牛顿 - 莱布尼兹公式

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

推广到勒贝格积分的情形,该公式在初等分析里在连续可微函数的情形下是大家所熟悉的.

我们自然仅限于讨论那些显然是几乎处处可微的函数 F(否则等式(1)根本无意义). 特别,正如我们已经知道,有界变差函数就是这样的函数.

另一方面,(1)式右端的积分是有界变差函数. 因此等式(1)不可能对更广泛的函数类是正确的. 因为每个有界变差函数是两个单调非递减函数之差,所以我们首先应该考虑单调函数.

但是对于任意单调函数,等式(1)一般是不成立的. 此外,下面的定理是正确的.

定理 1　单调非递减函数 f 的导数 f' 可和且满足

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(b) - f(a).$$

证明　根据定义,函数 f 在点 x 的导数是比式

$$\varphi_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

当 $h\to 0$ 时的极限①. 从 f 的单调性推出它的可和性,而这就表示每一个形如 φ_h 的函数的可和性. 因此等式(2)可以积分. 我们得到

$$\int_a^b \varphi_h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{h}\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

右端的表达式当 $h\to +0$ 时趋于 $f(b)-f(a+0)$(试证之!). 因此,应用法图定理(第五章 §5 定理 8),我们就得到

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \lim_{h\to 0}\int_a^b \varphi_h(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a+0) \leqslant f(b)-f(a).$$

(法图定理也保证了 f' 的积分的存在性).

定理得证.

不难举出满足严格不等式

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x < f(b)-f(a)$$

的单调函数的例子. 只需令

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } 1/2 < x \leqslant 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

然而饶有兴趣的是,有这样的连续单调函数,对于它们严格的不等式

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t < f(x)-f(a)$$

对于所有的 $x>a$ 都满足. 下面就是最简单的例子之一. 考虑闭区间 $[a,b]$ 上的康托尔集,且首先在它的邻接的开区间上定义函数 f: 在第 k 个邻接的 n 级开区间(包括它的端点)上令

$$f(t) = \frac{2k-1}{2^n}, k = 1,2,3,\cdots,2^{n-1}$$

(开区间从左到右进行编号). 从而,当 $1/3\leqslant t\leqslant 2/3$ 时,$f(t)=1/2$;当 $1/9\leqslant t\leqslant 2/9$ 时,$f(t)=1/4$;当 $7/9\leqslant t\leqslant 8/9$ 时,$f(t)=3/4$ 等等(图 21). 这样一来,f 在闭区间 $[0,1]$ 上除去康托尔集的第二类点(即既不属于邻接的开区间又不属于它们的端点的全体)外处处有定义. 现在我们用下述方法在剩下的这些点上补定义 f. 设 t^* 是这样的点之一,又设 $\{t_n\}$ 是收敛于 t^* 的第一类点(即邻接开区间的端点)的递增序列. 于是,极限

① 欲使表达式 $f(x+h)$ 对于任何 $x\in[a,b]$ 有意义,可以假定,当 $x>b$ 时 $f(x)=f(b)$ 而当 $x<a$ 时 $f(x)=f(a)$.

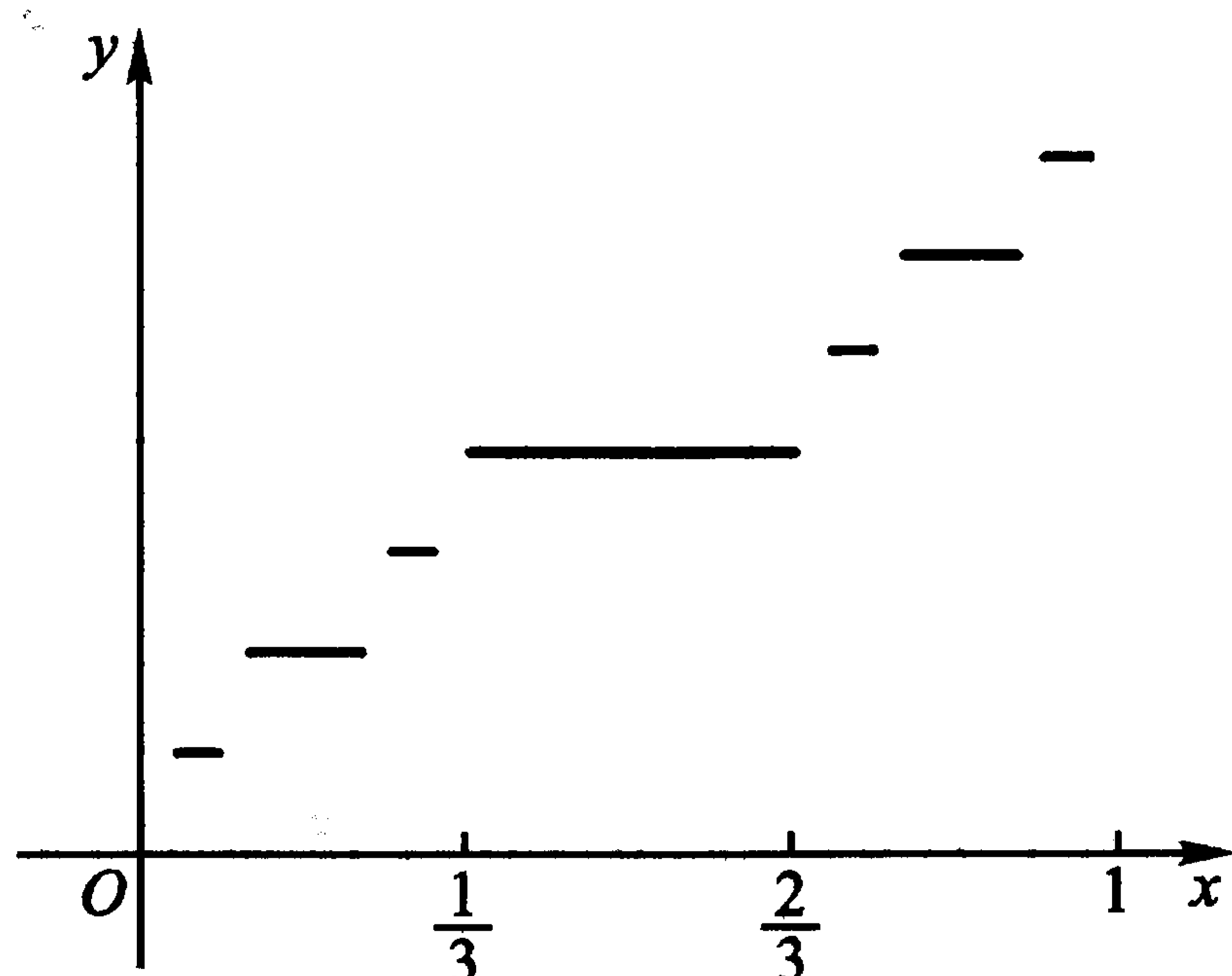


图　21

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) \tag{3}$$

存在. 如果$\{t'_n\}$是收敛于t^*的第一类点的递减序列,那么类似地,极限

$$\lim_{n\to\infty} f(t'_n) \tag{4}$$

存在,并且极限(3)和(4)彼此相等. 取这个公共值作为$f(t^*)$,我们就得到在整个闭区间[0,1]上是有定义且是连续的单调函数,称为“康托尔阶梯函数”. 它的导数在任何邻接的开区间的每一点上显然都等于零,即几乎处处都等于零. 从而,对于这个函数以及半开区间$0<x\leqslant 1$里的任何x,我们都有

$$0=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t<f(x)-f(0)=f(x).$$

顺便指出,在$f(x)$是单调函数的情形下,对于半开区间$a<x\leqslant b$的任意x,由等式$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t=f(b)-f(a)$可以导出等式

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a).$$

为了描述使等式

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t=f(b)-f(a)$$

成立的函数类,我们引入下面的定义.

定义 1　给定在某一闭区间$[a,b]$上的函数f,称为在该区间上是**绝对连续**的,倘若对于任何$\varepsilon>0$总可以找到这样的$\delta>0$,使得对于任何有限个两两不交的开区间

$$(a_k,b_k),k=1,2,\cdots,n,$$

只要其长度之和小于δ:

$$\sum_{k=1}^n (b_k-a_k)<\delta,$$

不等式

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

就得到满足. 显然,每个绝对连续的函数是一致连续的. 一般说来,逆命题是不正确的,例如,上面所描述的"康托尔阶梯函数"在闭区间[0,1]上是连续的(因而它在[0,1]上是一致连续的),但它在[0,1]上却不是绝对连续的. 事实上,康托尔集可以被长度之和可任意小的有限个开区间(a_k,b_k) $(k=1,2,\cdots,n)$所覆盖,同时对于每个这样的开区间集族,等式

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = 1$$

显然成立.

我们来指出绝对连续函数的一些基本性质.

(1) 首先注意,在定义1里我们不仅可考虑长度之和小于δ的有限个开区间族(其长度之和$<\delta$),而且还可考虑长度之和小于δ的任意有限个或可数个开区间. 事实上,设对于给定的$\varepsilon>0$,我们选取$\delta>0$,使得对于满足条件

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

的任何有限个开区间(a_k,b_k)都有

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

又设(α_k,β_k), $k=1,2,\cdots$,是长度之和不超过δ的可数个开区间. 那么,对于任何n有

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

当$n\to\infty$时取极限,就得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leqslant \varepsilon.$$

(2) 每个绝对连续函数具有有界变差.

事实上,由函数f在闭区间$[a,b]$上的绝对连续性知,对于每个$\varepsilon>0$可以选取$\delta>0$,使得函数f在长度小于δ的闭区间上的全变差不大于ε. 因为闭区间$[a,b]$可以分割为有限个长度小于δ的闭区间,所以函数f在$[a,b]$上的全变差是有限的.

(3) 绝对连续函数之和以及这样的函数与数之积,仍然是绝对连续函数.

这个性质立刻从绝对连续函数的定义、和之绝对值以及积之绝对值的性质推出.

性质 2 和性质 3 表示,绝对连续函数在所有的①有界变差函数的空间中构成线性流形.

(4) 每个绝对连续函数可以表示成两个绝对连续非递减函数之差.

事实上,绝对连续函数作为有界变差函数,可以表示成

$$f = v - g,$$

其中

$$v(x) = V_a^x[f] \quad \text{和} \quad g(x) = v(x) - f(x)$$

是两个非递减函数. 我们来证明,这两个函数都是绝对连续的. 只要对 v 进行验证就行了. 设给定了 $\varepsilon > 0$. 对于这个 ε 按函数 f 的绝对连续性的要求选择 $\delta > 0$. 我们取长度之和小于 δ 的 n 个开区间 (a_k, b_k),并考虑和

$$\sum_{k=1}^{n} (v(b_k) - v(a_k)). \tag{5}$$

这个和乃是数

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} |f(x_{k,l}) - f(x_{k,l-1})| \tag{6}$$

对开区间 $(a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n)$ 的所有可能的有限分割

$$a_1 = x_{1,0} < x_{1,1} < x_{1,2} < \cdots < x_{1,m_1} = b_1,$$

$$a_2 = x_{2,0} < x_{2,1} < x_{2,2} < \cdots < x_{2,m_2} = b_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,m_n} = b_n$$

所取的上确界. 因为构成和(6)的所有的开区间 $(x_{k,l-1}, x_{k,l})$ 的长度之和不超过 $\delta > 0$,所以和(6)中的每一项均不大于 ε. 从而,其上确界——和(5)也不大于 ε.

下面两个定理揭示了绝对连续性概念与勒贝格不定积分之间的密切关系.

定理 2 作为可和函数 $f(x)$ 的不定积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是绝对连续的.

证明 如果 $\{(a_k, b_k)\}$ 是互不相交的开区间所构成的某个集族,那么

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{a_k}^{b_k} f(t)\,\mathrm{d}t \right|$$

---

① 参看第六章 §2 末尾的习题.

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{\bigcup_k (a_k, b_k)} |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

由于勒贝格积分的绝对连续性,当开区间(a_k, b_k)的长度之和趋于零时,最后这个表达式趋于零.

定理 3(勒贝格) 给定在闭区间$[a,b]$上的绝对连续函数的导数$f = F'$,在该闭区间上是可和的,且对于每个$x(a \leqslant x \leqslant b)$都有

$$\int_a^x f(t) \mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

定理 2 和定理 3 表明,绝对连续函数且仅有绝对连续函数,可以借助于积分运算按其导数还原(准确到一个常数项).

为了证明定理 3 我们需要用到下面的引理.

引理 如果绝对连续单调非递减函数f的导数几乎处处等于 0,那么这个函数是常数.

证明 设f给定在$[a,b]$上. 因为f是单调连续函数,所以它的值域是闭区间$[f(a), f(b)]$. 我们来证明,如果几乎处处有$f'(x) = 0$,那么这个闭区间的长度就等于零. 因而引理将得到证明. 将闭区间$[a,b]$的点分为两类:使$f'(x) = 0$的那些x所构成的点集E和它的余集Z. 根据引理条件$\mu(Z) = 0$. 选取某个$\varepsilon > 0$,根据函数f的绝对连续性就可以找到与这个ε相对应的$\delta > 0$,并将Z包含于长度小于δ的开集内(这是可能的,因为$\mu(Z) = 0$). 换言之,Z被长度之和小于δ的有限或可数个开区间(a_k, b_k)所覆盖. 按照δ的选法,就得到

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

从而,由开区间(a_k, b_k)所构成的集族(当然也包括含于各开区间之和集内的集Z)经由函数f变为长度小于ε的集. 这样一来,$\mu(f(Z)) = 0$.

现在我们考虑集$E = [a,b] \setminus Z$. 设$x_0 \in E$. 那么,因为$f'(x_0) = 0$,故对于所有充分接近x_0的x,不等式

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \varepsilon$$

成立,即(为明确计我们假定$x > x_0$)

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon(x - x_0)$$

或

$$\varepsilon x_0 - f(x_0) < \varepsilon x - f(x).$$

这样一来,x_0是函数$g(x) = \varepsilon x - f(x)$的右不可见点. 从而,根据里斯引理,集$E$被由有限或可数个互不相交的开区间$(\alpha_k, \beta_k)$构成的集族所覆盖,而且在这些区间的端

点上满足条件

$$\varepsilon\beta_k - f(\beta_k) \geqslant \varepsilon\alpha_k - f(\alpha_k),$$

即

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leqslant \varepsilon(\beta_k - \alpha_k).$$

因此,有

$$\sum_k (f(\beta_k) - f(\alpha_k)) \leqslant \varepsilon \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leqslant \varepsilon(b-a).$$

换言之,集 E 经由函数 f 变为被长度之和小于 $\varepsilon(b-a)$ 的开区间族所覆盖的集. 由于 ε 的任意性,由此推出 $\mu(f(E))=0$.

这样,$f(E)$ 和 $f(Z)$ 的测度都为零. 但这两个集的和集构成闭区间 $[f(a),f(b)]$. 这就证明了这个闭区间的长度为零,即 $f(x)=\text{const}$.

现在已容易证明定理 3 本身. 只需限于函数 $F(x)$ 非递减的情形进行证明. 在这种情形下

$$\Phi(x) = F(x) - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

也是单调非递减的函数. 事实上,如果 $x''>x'$,那么根据定理 1

$$\Phi(x'') - \Phi(x') = F(x'') - F(x') - \int_{x'}^{x''} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

此外,Φ(作为两个绝对连续函数之差)绝对连续,并且(根据 §3 定理 1)几乎处处有 $\Phi'(x)=0$. 因此根据引理 Φ 是常数. 在(7)中令 $x=a$,可见这个常数等于 $F(a)$.

定理得证.

由 §2 知每个有界变差函数 f 可以表示成阶跃函数 H 与连续有界变差函数 φ 之和(§2):

$$f = H + \varphi.$$

现在我们来讨论连续但非绝对连续的有界变差函数 φ,且令

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

差

$$\chi = \varphi - \psi$$

是连续有界变差函数. 这时几乎处处有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\chi(x) = \varphi'(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

如果连续有界变差函数的导数几乎处处等于零,那么我们就称它为**奇异**的. 现在我们可以陈述下面的结果:

每个有界变差函数可以表示成三个分量之和:

$$f = H + \psi + \chi, \tag{8}$$

即阶跃函数、绝对连续函数与奇异函数之和.

不难证明,分解式(8)中的每一项准确到常数由函数f本身所唯一确定. 如果对出现在等式(8)中的函数加以规范化:使其中的两个在点 $x = a$ 处变为零,那么分解式(8)就已经是准确唯一的. 对等式(8)进行微分,可见几乎处处有

$$f'(x) = \psi'(x)$$

(因为H'和χ'几乎处处等于零). 从而,在对有界变差函数的导数进行积分时,被还原的并非这个函数本身,而仅是它的绝对连续分量. 其余两个量(阶跃函数和奇异函数)这时"无影无踪地消失了".

将本节的这些结果与广义函数论的有关结果加以比较将大有裨益. 在第四章中我们将广义函数理解为无穷可微有限支集函数空间 K 上的线性连续泛函. 这时,常义局部可和函数f,与按公式 $(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 作用在元素 $\varphi \in K$ 上的泛函相对应. 此泛函的广义导数是一泛函,它将数$(f',\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ 与元素 $\varphi \in K$ 相对应. 因为在广义函数类中方程 $y' = 0$ 仅有常义解(常数),所以每个广义函数准确到一常数可以由其导数还原. 特别,每个局部可和函数f,准确到一常数几乎处处可以由其广义导数f'还原. 现在假定函数f几乎处处具有导数,例如假设f是单调函数. 我们用记号$f_1 = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 表示函数f的常义导数. (我们已经看到 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 可以几乎处处等于0,尽管$f(x) \neq \mathrm{const}$!). 函数 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 是局部可和的(我们假定f是单调的),从而,我们可以使这个函数与泛函(广义函数)$(f_1,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 对应. 极重要的事实是,广义函数f_1一般并不与广义函数f'完全相同. 例如,如果

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x \leqslant 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

那么$f_1 = 0$,而$f' = \delta$(参看第四章§4第3段的例1).

实际上,定理3表示在所有的有界变差函数当中,只有绝对连续函数(而且仅仅只有它们!)的常义导数与该函数的广义导数完全相同.

这里我们又遇见了第四章§4中已经说过的那种情况:为了遵守分析学的一些基本运算(这里指函数通过它的导数还原的问题),究竟是仍然停留在古典定义的范围内,局限在十分窄狭的(绝对连续)函数的范围内,或是相反,从本质上扩充函数概念(同时扩充导数的定义).

习题1 证明上述绝对连续函数的定义与下面的定义等价:如果函数f将闭区间$[a,b]$的每一个测度为零的子集仍变为测度为零的集,那么函数f在该区间上称为是绝对连续的.

习题2 求出"康托尔阶梯函数"的广义导数.

习题 3　设 f 是有界变差函数，f' 是它的广义导数，而 f_1 是由函数 f 的"常义"导数 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 所确定的泛函（广义函数）．证明

a) 如果 f 绝对连续，那么 $f'=f_1$；

b) 如果 $f'=f_1$，那么 $f(x)$ 等价于绝对连续函数，即几乎处处与这样的函数完全相同．特别是，如果 $f'=f_1$ 而 f 连续，那么 f 绝对连续．

§5. 作为集函数的勒贝格积分．拉东－尼柯迪姆（Radon－Nikodým）定理

1. 荷．哈恩分解和约当分解　前面几节讲述的关于直线上的函数的一些概念和事实，多数可以推广到定义在任意具有测度的空间上的函数．

设 X 是某一具有（有限）测度 μ 的空间，而 f 是 X 上对 μ 可和的函数．这时，f 在集 X 的每个可测子集 A 上是可和的，从而积分（对于固定的 f）

$$\Phi(A)=\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \tag{1}$$

是 σ 可加集函数，它定义在由空间 X 中所有可测集构成的 σ 代数 $\mathfrak{S}_\mu$ 上．这时，对于可测集 A 的任何有限或可数分割

$$A=\bigcup_k A_k,$$

其中 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两不交的可测集，等式

$$\Phi(A)=\sum_k \Phi(A_k)$$

均满足．换言之，由等式(1)所定义的函数 Φ 具有 σ 可加测度的所有性质，只有非负性可能是例外（当 f 非负时 Φ 也是非负的）．

定义 1　定义在给定空间 X 中某子集 σ 代数上的任意（有限）σ 可加集函数 Φ，称为**广义测度**或简称为**荷**．

荷的概念是 σ 可加测度概念的自然推广，正如下面我们将看见的，在一定意义下会引出这个概念．

习题　证明：对于给定在集合的 σ 代数 $\mathfrak{S}$ 上的任何（有限）荷 Φ，总有这样的常数 c 存在，使得对于所有的 $A\in\mathfrak{S}$，都有

$$|\Phi(A)|\leqslant c.$$

如果考虑分布在某一曲面上的真实的电荷，那么这个曲面可以分为两个区域：带有正电荷的区域（即任何部分带有正电荷的区域）和带有负电荷的区域．这个事实在数学上与下面的定理 1 等价．

我们预先引入下面的术语. 设 Φ 是定义在空间 X 的子集的 σ 代数 $\mathfrak{S}$ 上的荷. 称集 $E\in\mathfrak{S}$ 关于 Φ 是负的,倘若对于任何 $F\in\mathfrak{S}$ 都有 $\Phi(E\cap F)\leqslant 0$;类似地,称集 E 关于 Φ 是正的,倘若对于任何 $F\in\mathfrak{S}$,都有 $\Phi(E\cap F)\geqslant 0$.

定理1 如果 Φ 是定义在 X 上的荷,那么存在一可测集 $A^-\subset X$,使得 A^- 关于 Φ 是负的,而 $A^+=X\backslash A^-$ 则关于 Φ 是正的.

证明 令

$$a=\inf\Phi(A),$$

其中下确界是对所有负集 A 取的. 设 $\{A_n\}$ 是一负集序列,满足

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(A_n)=a.$$

那么容易看出,$A^-=\bigcup_n A_n$ 就是一负集,并且满足

$$\Phi(A^-)=a.$$

我们来证明,A^- 就是所要求的集,即证明

$$A^+=X\backslash A^-$$

是正集. 假设不然,即设 A^+ 包含一可测子集 C_0,使得 $\Phi(C_0)<0$. 这时,集 C_0 不可能是负的,因为否则我们如将它与 A^- 取并集就会得到负集 $\tilde{A}$,它将满足

$$\Phi(\tilde{A})<a,$$

而这是不可能的. 因此有这样的最小整数 k_1 存在,使得在 C_0 内可以找到满足下面条件的子集 C_1:

$$\Phi(C_1)\geqslant\frac{1}{k_1}.$$

自然,$C_1\neq C_0$. 对于集 $C_0\backslash C_1$ 可以重复对 C_0 所进行的推理,我们就得到集 C_2,使之满足条件

$$\Phi(C_2)\geqslant\frac{1}{k_2}\quad(k_2\geqslant k_1),$$

如此等等. 最后,令

$$F_0=C_0\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i.$$

集 F_0 非空,因为 $\Phi(C_0)<0$,而 $\Phi(C_i)>0(i\geqslant 1)$. 从 F_0 的构造知 F_0 是负集. 因此,将它与 A^- 取并集,仍出现与 a 的定义相矛盾. 从而,对于所有的可测集 $E\subset X\backslash A^-$ 都有

$$\Phi(E)\geqslant 0,$$

即 $X\backslash A^-$ 是正集.

定理得证.

将空间 X 分为负部 A^- 和正部 A^+ 的分解,称为**哈恩分解**.

哈恩分解,一般不是唯一的,但若

$$X = A_1^- \cup A_1^+ \text{ 和 } X = A_2^- \cup A_2^+$$

是两个这样的分解,那么对于每个 $E \in \mathfrak{S}$,有

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-) \text{ 和 } \Phi(E \cap A_1^+) = \Phi(E \cap A_2^+). \tag{2}$$

事实上,有

$$E \cap (A_1^- \backslash A_2^-) \subset E \cap A_1^-, \tag{3}$$

由此推出 $\Phi(E\cap(A_1^- \backslash A_2^-))\leqslant 0$. 同时,有

$$E \cap (A_1^- \backslash A_2^-) \subset E \cap A_2^+, \tag{4}$$

因此 $\Phi(E\cap(A_1^- \backslash A_2^-))\geqslant 0$. 这样一来,$\Phi(E\cap(A_1^- \backslash A_2^-))=0$. 类似地得到 $\Phi(E\cap(A_2^- \backslash A_1^-))=0$. 由此推出

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-).$$

同样可以证明等式(2)中的第二个等式.

这样一来,$\mathfrak{S}$ 上的荷 Φ 单值地由两个非负集函数所确定,即由

$$\Phi^+(E) = \Phi(E \cap A^+)$$

和

$$\Phi^-(E) = -\Phi(E \cap A^-)$$

所唯一确定,它们分别称为荷 Φ 的**上变差**和**下变差**. 这时,显然有

1) $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$.

2) Φ^+ 和 Φ^- 是非负 σ 可加的集函数,即是测度.

函数 $|\Phi| = \Phi^+ + \Phi^-$ 显然也是测度,称为荷 Φ 的**全变差**,而将 Φ 表示成上变差与下变差之差这种形式称为该荷的**约当分解**.

注 我们现在讨论了有限荷,即这样的函数 Φ,其函数值既有上界又有下界(参看第六章 §5 第 1 段中的习题). 这时 Φ^+ 和 Φ^- 都是有限测度. 上述情况可以推广到只在一侧有界的荷上去,即可以推广到 $\sup \Phi(A)$ 和 $\inf \Phi(A)$ 当中至少有一个有限的荷.

2. 荷的基本类型 设 μ 是定义在空间 X 中某 σ 代数 $\mathfrak{S}$ 上的一 σ 可加测度. $\mathfrak{S}$ 内的集将称为**可测**的. 我们来引入下面的一些概念.

我们说定义在集 $E\subset\mathfrak{S}$ 上的荷 Φ **集中在可测集** A_0 **上**,倘若对于每个 $E\subset X\backslash A_0$,都有 $\Phi(E)=0$. 这时集 A_0 称为荷 Φ 的**承载子**.

荷 Φ 称为**连续**的,倘若对于任何单点集 E 都有 $\Phi(E)=0$. 荷 Φ 称为**离散**的,倘若它集中在某一有限集或可数集上. 换言之,离散荷表明有这样的有限点集或可数

点集 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$存在,使得对于每个 $E \subset X$ 都有

$$\Phi(E) = \sum_{c_k \in E} \Phi(c_k).$$

称荷 Φ(对已知测度 μ)**绝对连续**,倘若对于每个 $\mu(A)=0$ 的可测集 A 都有 $\Phi(A)=0$.

荷 Φ 称为(对测度 μ)**奇异**的,倘若它集中在某个 μ 测度为零的集上. 显然,如果荷同时对 μ 既是绝对连续的又是奇异的,那么它是零测集.

3. 绝对连续荷. 拉东－尼柯迪姆定理 固定可和函数 f 的勒贝格积分

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

作为集函数,是对已知测度 μ 为绝对连续荷的例子. 原来它们已穷尽了所有的绝对连续荷. 换言之,下面的定理是正确的.

定理 2(拉东－尼柯迪姆) 设 μ 是定义在空间 X 里子集的 σ 代数 $\mathfrak{S}$ 上的某一有限 σ 可加测度,而 Φ 是定义在同一 σ 代数上的对 μ 绝对连续的荷. 那么在 X 上存在对 μ 可和的函数 f,使得对于每个可测集 A 都有

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

这个函数称为荷 Φ 对测度 μ 的**导数**,其中 f 准确到 μ 等价性是唯一的.

(两个函数称为是 μ 等价的,倘若它们对测度 μ 几乎处处相等).

证明 每个荷可以表示成两个非负函数之差(参看第 1 段),并且绝对连续荷可以表示成绝对连续集函数之差. 因此只需对非负的荷(即测度)进行证明定理就行了. 这样,设 Φ 是对已知测度 μ 绝对连续的测度. 我们来证明下面的引理.

引理 设测度 Φ 对 μ 绝对连续且不恒等于零. 那么存在 n 和可测集 B,使得 $\mu(B)>0$ 且 B 关于荷 $\Phi - \frac{1}{n}\mu$ 是正的.

引理的证明 设 $X = A_n^- \cup A_n^+$ 是关于荷 $\Phi - \frac{1}{n}\mu\ (n=1,2,\cdots)$ 的哈恩分解,又设

$$A_0^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^-, \quad A_0^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^+.$$

那么对于所有的 n 都有

$$\Phi(A_0^-) \leqslant \frac{1}{n}\mu(A_0^-),$$

即 $\Phi(A_0^-)=0$,从而 $\Phi(A_0^+)>0$,而这表示 $\mu(A_0^+)>0$(根据 Φ 对 μ 的绝对连续性). 因此可以找到这样的 n,使得 $\mu(A_n^+)>0$. 这个 n 与集 $B=A_n^+$ 满足引理条件.

现在我们转入对定理直接进行证明. 设 K 是 X 上具有下列性质的函数 f 所构成

的集：f 非负，对 μ 可积且对每个可测集 A 都有 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \Phi(A)$. 设

$$M = \sup\left\{\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \text{ 对所有的 } f \in K\right\}.$$

从 K 里取一函数列 $\{f_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = M.$$

令

$$g_n(x) = \max(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)).$$

我们来证明，$g_n \in K$，即对于每个可测集 E 都有

$$\int_E g_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \Phi(E).$$

事实上，E 可以表示成 $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ 的形式，其中 E_k 互不相交且在 E_k 上 $g_n(x) = f_k(x)$. 因此

$$\int_E g_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f_k(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Phi(E_k) = \Phi(E).$$

令

$$f(x) = \sup\{f_n(x)\}.$$

显然，这时 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$，从而根据列维定理，有

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = M.$$

现在我们来证明

$$\Phi(E) - \int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

根据作法，集函数

$$\lambda(E) = \Phi(E) - \int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

是非负的，且具有测度的所有性质. 此外，它对 μ 是绝对连续的. 如果 $\lambda \neq 0$，那么根据引理就可以找到这样的 $\varepsilon > 0$ 和这样的 B，$\mu(B) > 0$，使得对于任何可测集 E 都有

$$\varepsilon\mu(E \cap B) \leqslant \lambda(E \cap B).$$

那么，令 $h(x) = f(x) + \varepsilon\chi_B(x)$，其中 χ_B 是集 B 的特征函数，我们就会得到，对于任何可测集 E 都有

$$\int_E h(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(E \cap B)$$

$$\leqslant \int_{E \setminus B} f(x) \mathrm{d}\mu + \Phi(E \cap B) \leqslant \Phi(E).$$

这表示函数 h 属于上面定义的集 K. 但同时却有

$$\int_X h(x) \mathrm{d}\mu = \int_X f(x) \mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(B) > M,$$

而这就与 M 的定义相矛盾. 这样,使得

$$\Phi(A) = \int_A f(x) \mathrm{d}\mu$$

的函数 f 的存在性得证. 我们来证明它的唯一性. 如果对于所有的 $A \in \mathfrak{S}$,有

$$\Phi(A) = \int_A f_1(x) \mathrm{d}\mu = \int_A f_2(x) \mathrm{d}\mu,$$

那么对于任何 n,集

$$A_n = \{x : f_2(x) - f_1(x) > 1/n\}$$

满足

$$\mu(A_n) \leqslant n \int_{A_n} (f_1(x) - f_2(x)) \mathrm{d}\mu = 0.$$

类似地,对于 $B_m = \{x : f_1(x) - f_2(x) > 1/m\}$,有

$$\mu(B_m) = 0.$$

因为

$$\{x : f_1(x) \neq f_2(x)\} = (\bigcup_n A_n) \cup (\bigcup_m B_m),$$

所以

$$\mu\{x : f_1(x) \neq f_2(x)\} = 0,$$

即几乎处处有 $f_1(x) = f_2(x)$. 证明完毕.

注 拉东－尼柯迪姆定理,显然是关于"绝对连续函数是其导数之积分"的勒贝格定理的自然推广. 但是在讨论直线上的函数时,计算 Δf 与 Δx 之比的极限仍然是求导数的有效方法,拉东－尼柯迪姆定理仅确立了绝对连续荷 Φ 对测度 μ 的导数 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}\mu$ 的存在性,但未给出它的计算方法. 可以指出这样的方法,但是我们不准备讲到它. 粗略地说,这种方法就是:关于在确定的意义下"收缩"于给定点的集族来求比 $\Phi(A)/\mu(A)$ 的极限. 例如,在[53]中有关于这些问题的详细讨论.

§6. 斯蒂尔切斯(Stieltjes)积分

1. 斯蒂尔切斯测度 在上一章§1中,讲到直线上的勒贝格测度的构造时,我们已经提到了下面的构造法. 设在某个闭区间$[a,b]$上给定了单调非递减函数 F:为

明确计，我们假定它是左连续的．我们用等式

$$\begin{cases} m(\alpha,\beta) = F(\beta) - F(\alpha+0), \\ m[\alpha,\beta] = F(\beta+0) - F(\alpha), \\ m(\alpha,\beta] = F(\beta+0) - F(\alpha+0), \\ m[\alpha,\beta) = F(\beta) - F(\alpha) \end{cases} \tag{1}$$

来定义属于基本闭区间$[a,b]$上的所有闭区间，开区间和半开区间的测度，然后可以利用测度扩张的勒贝格程序，将这种测度开拓到某个含$[a,b]$的所有开子集和闭子集（从而含$[a,b]$的所有博雷尔子集）的 σ 代数 μ_F 上去．借助于这样的构造法而得到的测度 μ_F，称为对应于函数 F 的**勒贝格－斯蒂尔切斯测度**，而函数 F 本身称为这个测度的**生成函数**①．

我们来讨论勒贝格－斯蒂尔切斯测度的某些特殊情形．

（1）设 F 是阶跃函数，$x_1,x_2,\cdots$是它的间断点，而 $h_1,h_2,\cdots$是它在这些点上的跃度．那么对应于函数 F 的测度 μ_F 可以按下述方法建立：闭区间$[a,b]$的所有子集是可测的，而点集 A 的测度等于

$$\mu_F(A) = \sum_{x_i\in A} h_i. \tag{2}$$

事实上，从勒贝格－斯蒂尔切斯测度的定义立刻看出，每个点 x_i 的测度等于 h_i，而集$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$的余集的测度等于零．根据测度 μ_F 的 σ 可加性，对于任何 $A\subset[a,b]$都可推出等式(2)．根据任何阶跃函数构造的测度 μ_F 称为**离散测度**．

（2）设 F 是$[a,b]$上的绝对连续非递减函数，而$f=F'$是它的导数．那么相应的测度 μ_F 在闭区间$[a,b]$的所有勒贝格可测子集上一定有定义，并且对于每个这样的集 A 都有

$$\mu_F(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

事实上，根据勒贝格定理，对于每个半开区间$[\alpha,\beta)$都有

$$\mu_F[\alpha,\beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为每个 σ 可加测度的勒贝格扩张，唯一地决定于它在原半环上的值，由此推出等式(3)对于所有的勒贝格可测集 $A\subset[a,b]$都是成立的．对应于绝对连续函数 F 的测度 μ_F 称为**绝对连续测度**．

（3）如果 F 是奇异连续函数，那么与它对应的测度 μ_F 完全集中在勒贝格测度为零的一集上，在该集上 F'不等于零或不存在．这时，测度 μ_F 本身称为**奇异测度**．

---

① 如果单调非递减函数 F 不是左连续的，那么根据它同样可以定义测度．为此，只需在公式(1)中作些明显的修改．例如，应该令 $m[\alpha,\beta]=F(\beta+0)-F(\alpha-0)$，等等．

显然,如果 $F=F_1+F_2$,那么 $\mu_F=\mu_{F_1}+\mu_{F_2}$. 因此,由于单调函数可以分解为阶跃函数、绝对连续函数与奇异函数三者之和,可见每个勒贝格-斯蒂尔切斯测度可以表示成离散测度、绝对连续测度与奇异测度三者之和. 单调函数分解为三个成分之和只准确到一常数项. 因此每个勒贝格-斯蒂尔切斯测度可以唯一地分解成离散测度、绝对连续测度与奇异测度三者之和.

上面所讲的是闭区间上的勒贝格-斯蒂尔切斯测度. 如果现在 F 是整个直线上的有界(有上界和下界)的单调非递减函数,那么在借助类似于(1)的公式定义了直线上任何闭区间、开区间和半开区间的测度之后,即可得到整个直线上的有限测度,也称为勒贝格-斯蒂尔切斯测度. 特别是,这时整个直线的测度等于

$$F(\infty)-F(-\infty),$$

其中

$$F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x),\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

(从 F 的单调性和有界性,可见这些极限都存在).

勒贝格-斯蒂尔切斯测度概念的确穷尽了直线上所有的测度(即所有的有限 σ 可加非负集函数). 事实上,设 μ 是任意这样的测度. 令

$$F(x)=\mu(-\infty,x).$$

我们就得到这样一个单调函数,它所对应的勒贝格-斯蒂尔切斯测度与原来的测度 μ 完全相同. 这样一来,"勒贝格-斯蒂尔切斯测度"这个术语实际并没有刻画出直线上的某种特殊测度类,它只不过指出了构造这样测度的一种确定的方法——按已知生成函数来构造测度.

2. 勒贝格-斯蒂尔切斯积分 设 μ_F 是闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数 F 生成的测度. 对于这种测度可以用通常的方法来定义可和函数类,并引入勒贝格积分概念

$$\int_a^b f(x)\,d\mu_F.$$

这种按对应于函数 F 的测度 μ_F 求的积分,称为**勒贝格-斯蒂尔切斯积分**,记作

$$\int_a^b f(x)\,dF(x).$$

我们来讨论某些特殊情形.

(1) 如果 F 是阶跃函数(即如果 μ_F 是离散测度),那么积分 $\int_a^b f(x)\,dF(x)$ 显然化为和 $\sum_i f(x_i)h_i$,其中 x_i 是函数 F 的间断点,而 h_i 是函数 F 在点 x_i 的跃度.

(2) 如果 F 是绝对连续函数,那么勒贝格-斯蒂尔切斯积分 $\int_a^b f(x)\,dF(x)$ 等于 $\int_a^b f(x)F'(x)\,dx$,即 $f(x)F'(x)$ 对通常的勒贝格测度的积分. 事实上,如果在某个可

测集 $A \subset [a,b]$ 上 $f(x) = \text{const}$，而在 A 外 $f(x) = 0$，那么由(3) 可得等式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}F(x) = \int_a^b f(x)F'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

根据积分的 σ 可加性，等式(4)也可推广到关于测度 μ_F 可和的简单函数上去. 现在设 $\{f_n\}$ 是一致收敛于 f 的简单函数列. 这时，可以假定序列 $\{f_n\}$ 是非递减的. 于是 $\{f_n(x)F'(x)\}$ 是非递减序列，几乎处处收敛于 $f(x)F'(x)$，而根据列维定理，可以在等式

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}F(x) = \int_a^b f_n(x)F'(x)\,\mathrm{d}x$$

中当 $n\to\infty$ 时取极限.

从适才所述，显然，如果 F 是阶跃函数与绝对连续函数之和，那么关于测度 μ_F 的勒贝格－斯蒂尔切斯积分相应地化为级数(或有限和)与关于通常的勒贝格测度的积分. 要是 F 含有奇异测度，那么这样的简化是不可能的.

勒贝格－斯蒂尔切斯积分概念，可以极自然地从单调函数推广到任意有界变差函数. 设 Φ 就是这样的函数. 我们将它表示成两个单调函数之差

$$\Phi = v - g,$$

其中 v 是函数 Φ 在闭区间 $[a,x]$ 上的全变差. 现在引入关于 Φ 的勒贝格－斯蒂尔切斯积分，根据定义，令

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}v(x) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x).$$

不难验证，如果 Φ 用某种其他的方法表示成两个单调函数之差，比如说，

$$\Phi = w - h,$$

那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}v(x) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}w(x) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}h(x),$$

即为了计算关于已知函数 Φ 的勒贝格－斯蒂尔切斯积分，可以利用这个函数表示成两个单调函数之差的任何一种形式.

3. 勒贝格－斯蒂尔切斯积分在概率论中的某些应用　勒贝格－斯蒂尔切斯积分无论在分析中还是在许多实际问题里都有应用. 特别是，这个概念广泛应用于概率论. 我们回忆一下，对于每个 x 由等式

$$F(x) = P(\xi < x)$$

所定义的函数 F 称为**随机变量 ξ 的分布函数**，即 $F(x)$ 是随机变量 ξ 取值小于 x 的概率. 显然，每个分布函数是单调非递减的，左连续的，且满足条件

$$F(-\infty) = 0,\quad F(\infty) = 1.$$

反之,可以把每个这样的函数看作是某个随机变量的分布函数.

随机变量的数学期望

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(x) \tag{5}$$

和方差

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2\mathrm{d}F(x) \tag{6}$$

是它的重要特征.

随机变量通常又分为所谓的离散型随机变量和连续型随机变量. 随机变量称为**离散型**的,倘若它只能取有限个或可数个值

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

(例如,电话交换台在某一段时间内的呼唤次数就是离散随机变量).

如果 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ 是变量 ξ 取值 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 的概率,那么 ξ 的分布函数显然是阶跃函数. 对于它,积分(5)和(6)分别变为和

$$M\xi = \sum_i x_i p_i$$

和

$$D\xi = \sum_i (x_i - a)^2 p_i \quad (a = M\xi).$$

随机变量 ξ 称为**连续型**的,倘若它的分布函数 F 是绝对连续的. 这个分布函数的导数 F' 称为随机变量 ξ 的**概率分布密度**. 按照上一段所述,对于连续型随机变量,表示它的数学期望和方差的斯蒂尔切斯积分是按通常的勒贝格测度的积分:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x, \quad D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 p(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $p = F'$ 是 ξ 的概率分布密度而 $a = E\xi$.

在概率论初等教程里通常局限于研究离散型随机变量和连续型随机变量,它们基本上是在实际问题中遇到的仅有的两种类型. 但是,一般说来,随机变量的分布函数也可以含有奇异型分量. 因此并不是每个随机变量都可以表示成离散型随机变量与连续型随机变量的组合.

设 ξ 是随机变量,F 是它的分布函数,而 $\eta = \varphi(\xi)$ 是另一随机变量,它是 ξ 的博雷尔函数. 随机变量 η 的数学期望 $E\eta$,按照定义,可以写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}\Phi(x),$$

其中 Φ 是 η 的分布函数. 然而,重要的是,如果对 φ 按由直线上的函数 F 产生的测度可和,那么变量 η 的数学期望可以通过变量 ξ 的分布函数 F 写成:

$$M\eta = M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}F(x).$$

事实上，函数 $y=\varphi(x)$ 定义了直线上的一个映射．它将具有（由 F 所产生的）已知测度 μ_F 的直线（$-\infty<x<\infty$）变为具有测度 μ_Φ 的直线（$-\infty<y<\infty$），这时映射 $y=\varphi(x)$ 将 μ_F 变为 μ_Φ．但是从第五章的一些结果推出，如果 (X,μ) 和 (Y,ν) 是两个具有测度的空间，φ 是将 (X,μ) 变为 (Y,ν) 的保测映射（即使得 $\nu(A)=\mu(\varphi^{-1}(A))$ 的映射），而 f 是 (Y,ν) 上的可和函数，那么

$$\int_Y f(y)\,\mathrm{d}\nu = \int_X f(\varphi(x))\,\mathrm{d}\mu$$

（勒贝格积分中的变量替换）．这里令 $f(y)=y$ 和 $\mu=\mu_F,\nu=\mu$，我们就得到所要求的等式．这样一来，为了计算随机变量 ξ 的函数的数学期望（当然，方差也一样），只需知道变量 ξ 本身的分布函数就行了．

4. 黎曼－斯蒂尔切斯（Riemann－Stieltjes）积分　上面讨论了勒贝格－斯蒂尔切斯积分，它实际上是给定函数关于直线上的两个测度的勒贝格积分之差．除此之外，还可以定义所谓的黎曼－斯蒂尔切斯积分，它是作为类似于普通黎曼积分和的一种积分和的极限而引入的．

仍设 Φ 是某个给定在半开区间 $[a,b)$ 上的左连续有界变差函数，而 f 则是同一半开区间上的任意函数．考虑半开区间 $[a,b)$ 上的某一分割①：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

这些点将 $[a,b)$ 划分为子区间 $[x_{i-1},x_i)$，并在每个子区间里选取任意点 ξ_i，然后构造积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1})] \tag{7}$$

（这时 $\Phi(x_n)$ 理解为 $\Phi(b-0)$）．如果当 $\max(x_i-x_{i-1})\to 0$ 时积分和（7）趋于某一极限（假设该极限既与半开区间 $[a,b)$ 的分割无关，又与分割的每个子区间中的点 ξ_i 的取法无关），那么这个极限就称为函数 f 对函数 Φ 在 $[a,b)$ 上的**黎曼－斯蒂尔切斯积分**，并用符号

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x) \tag{8}$$

表示．

定理 1　如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么它的黎曼－斯蒂尔切斯积分（8）存在，并且与相应的勒贝格－斯蒂尔切斯积分完全相同．

证明　积分和（7）可以视为阶梯函数

$$f_n(x)=f(\xi_i)\quad (x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i)$$

的勒贝格－斯蒂尔切斯积分．当半开区间 $[a,b)$ 的分割变动时，这些函数列一致收敛于 f，因此这些积分和的极限存在，并且就是极限函数 f 的勒贝格－斯蒂尔切斯积分

---

① 因为斯蒂尔切斯积分中个别点的贡献可能不等于零，分割的子区间不应该有公共点，因此我们这里处处取半开区间．

(积分号下取极限的定理). 也正是这个极限,我们曾称之为黎曼 - 斯蒂尔切斯积分(8).

我们来揭示黎曼 - 斯蒂尔切斯积分的某些基本性质.

(1) 下面的估计式是正确的(中值定理):

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x)\right| \leqslant \max|f(x)|\,V_a^b[\Phi] \tag{9}$$

($V_a^b[\Phi]$是函数 Φ 在$[a,b]$上的全变差).

事实上,对于半开区间$[a,b)$的任何分割,不等式

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1}))\right| &\leqslant \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\,|\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1})| \\ &\leqslant \max|f(x)|\sum_{i=1}^n|\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1})| \\ &\leqslant \max|f(x)|\,V_a^b[\Phi]\end{aligned}$$

都满足. 对这个不等式取极限,我们就得到估计式(9). 当 $\Phi(x)=x$ 时,它变为大家所熟悉的黎曼积分的估计式

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant (b-a)\max|f(x)|.$$

(2) 如果 $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$,那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_1(x) + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_2(x).$$

事实上,对于半开区间$[a,b)$的每个分割,关于积分和满足的相应等式,从而在取极限后相应等式仍然成立,即对于积分也成立.

注 1 我们定义了黎曼 - 斯蒂尔切斯积分(8),假定函数 $\Phi(x)$是左连续的. 但是这个积分的定义(作为积分和(7)的极限),对于任何有界变差函数 $\Phi(x)$显然仍然适用.

注 2 关于有限半开区间上的黎曼 - 斯蒂尔切斯积分所讲的一切,容易推广到整个直线或半直线上的积分情形.

此外,我们定义了半开区间$[a,b)$上的斯蒂尔切斯积分. 类似地可以定义$(a,b]$上的积分以及$[a,b]$和(a,b)上的积分. 在斯蒂尔切斯积分的情形,与通常的黎曼积分有所不同,开区间(a,b)上积分的值、闭区间$[a,b]$上积分的值、以及半开区间$(a,b]$和$[a,b)$上积分的值,一般说来,彼此并不相等. 例如,如果 a 是函数 Φ 的间断点,那么$[a,b]$上的积分等于$(a,b]$上的积分加上形如$f(a)h$ 的项,其中 $h=\Phi(a+0)-\Phi(a)$.

上面所列举的性质 1 和 2,对于出现在它们的表达式里有意义的任何函数f,都是满足的. 如果假定$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,那么相应的积分还具有下面的一

些重要性质(这时积分可以理解为是取在闭区间$[a,b]$上的,或取在任一半开区间$(a,b]$或$[a,b)$上的).

(3) 如果Φ_1和Φ_2是$[a,b)$上的两个有界变差函数,除了在这个半开区间的有限个或可数个内点外几乎处处相等,那么对于$[a,b]$上的任何连续函数f都有

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi_1(x) = \int_a^b f(x)\,d\Phi_2(x).$$

为了证明这个性质我们首先考虑$\Phi_2 \equiv 0$的情形. 即首先证明下面的结论.

(3)′ 如果ψ是仅在(a,b)内的有限个或可数个点上不等于零的有界变差函数,那么对于$[a,b]$上的任何连续函数f,都有

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x) = 0.$$

事实上,对于仅在一个点x_0上不为零的函数,这个等式是显然成立的(如果取半开区间$[a,b)$的分割任意地小,并且分点中不包含有x_0,那么就会得到积分和等于零),从而根据可加性,这个等式对于任何仅在有限个点上不为零的函数是正确的. 现在设ψ仅在点$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$上不为零,而$y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$是它在这些点上的函数值. 因为$\psi$具有有界变差,所以$\sum\limits_n |y_n| < \infty$. 这样选择自然数$N$,使得$\sum\limits_{n>N} |y_n| < \varepsilon$,然后将$\psi$表示成和

$$\psi = \psi_N + \tilde{\psi},$$

其中ψ_N在点$r_1,r_2,\cdots,r_N$上取值$y_1,y_2,\cdots,y_N$,而在所有其余的点上等于0;而$\tilde{\psi}$仅在点$r_{N+1},r_{N+2},\cdots$上不等于0. 根据性质2,有

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x) = \int_a^b f(x)\,d\psi_N(x) + \int_a^b f(x)\,d\tilde{\psi}(x).$$

右端的第一个积分(根据适才所证)等于零,而第二个积分(根据性质1)有如下估计

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\tilde{\psi}(x)\right| < \max|f(x)|\,2\varepsilon$$

$\left(\text{因为显然有 } V_a^b[\tilde{\psi}] = 2\sum\limits_{n>N}|y_n| < 2\varepsilon\right)$. 由于$\varepsilon$的任意性,由此推出我们的结论.

现在为了证明性质3,我们来考虑差$\psi = \Phi_1 - \Phi_2$. 它仅在属于(a,b)的有限个或可数个点上异于零. 其次应用性质2和3′. 特别是,因为有界变差函数最多有可数个间断点,我们就得到下面的性质.

(4) 如果函数f是连续的,那么黎曼-斯蒂尔切斯积分$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x)$不依赖于函数Φ在它的位于(a,b)内的间断点上的值.

因为连续函数的黎曼-斯蒂尔切斯积分,等于相应的勒贝格-斯蒂尔切斯积分,所以对于连续函数$f(x)$的黎曼-斯蒂尔切斯积分,倘若Φ是阶跃函数,等式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x) = \sum_i f(x_i)h_i$$

是正确的;而倘若 Φ 是绝对连续函数,则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x) = \int_a^b f(x)\Phi'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

这时,如果 Φ' 黎曼可积,那么(10)中右端的积分可以理解为黎曼积分.

5. 斯蒂尔切斯积分号下取极限 在第五章中我们证明了一系列关于勒贝格积分号下取极限的定理. 这里,问题的提法是:给定函数列 $\{f_n\}$ 及其按某一固定测度的积分,我们感兴趣的是能否在积分号下取极限. 但是应用于斯蒂尔切斯积分时该问题却有另外的提法:给定有界变差函数列 $\{\Phi_n\}$. 对于固定的函数 f 在怎样的一些条件下可以在积分号

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_n(x)$$

下取极限?

这时下面的定理是成立的.

定理 2(赫利(Helly)第一定理) 设闭区间 $[a,b]$ 上的有界变差函数 Φ_n 在该区间的每一点收敛于某一函数 Φ,并且函数 Φ_n 的全变差一致有界:

$$V_a^b[\Phi_n] \leqslant C \quad (n = 1,2,\cdots).$$

那么极限函数 Φ 也具有有界变差,且对于任何连续函数 f,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_n(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x). \tag{11}$$

证明 我们首先来证明,极限函数 Φ 的全变差不超过常数 C,其中 C 是定理条件中所有 $V_a^b[\Phi_n]$ 的上界. 事实上,对于闭区间 $[a,b]$ 的任何分割(其分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$)都有

$$\sum_{k=1}^m |\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^m |\Phi_n(x_k)-\Phi_n(x_{k-1})| \leqslant C,$$

从而

$$V_a^b[\Phi] \leqslant C.$$

现在我们来证明,当 f 是阶梯函数时关系式(11)也满足. 设 f 在半开区间 $[x_{k-1},x_k)$ 上取值 h_k. 那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_n(x) = \sum_k h_k[\Phi_n(x_k)-\Phi_n(x_{k-1})]$$

和

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x) = \sum_k h_k[\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})].$$

显然,这些表达式当中的第一个表达式当 $n \to \infty$ 时趋于第二个表达式.

现在设 f 是连续函数而 ε 是任意的正数. 我们这样选取阶梯函数 f_ε,使得

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon/(3C).$$

于是

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_n(x)\right| \leqslant \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x) - \int_a^b f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}\Phi(x)\right| + \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}\Phi(x) - \int_a^b f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}\Phi_n(x)\right| + \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}\Phi_n(x) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_n(x)\right|.$$

根据斯蒂尔切斯积分的中值定理,这里的第一项和第三项小于 $\varepsilon/3$,而第二项对于一切足够大的 n 均小于 $\varepsilon/3$. 由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的,由此推出定理的结论.

注　这个定理也适用于积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_n(x)$$

中的一个积分限或两个积分限是无穷大的情形. 但是这时函数 f 应该在无穷远点趋于某一有限极限(这就容许在整个无穷区间上用仅取有限个值的阶梯函数来一致地逼近它).

赫利第一定理确立了,在黎曼 - 斯蒂尔切斯积分号下对某个有界变差函数列 $\{\Phi_n\}$ 取极限的条件,而赫利第二定理则阐明什么时候可以保证满足第一定理条件的序列本身的存在性.

定理 3(赫利第二定理)　从定义在某闭区间 $[a,b]$ 上且满足条件

$$\max|\Phi(x)| \leqslant C, \quad V_a^b[\Phi] \leqslant K \tag{12}$$

的函数 Φ 的每一个无穷集合 M 中,都可以选取一个在 $[a,b]$ 的每一点上都收敛的序列(其中 C 和 K 是常数,并且与 $\Phi \in M$ 无关).

证明　只需对单调函数来证明这个定理就行了. 事实上,设

$$\Phi = v - g,$$

其中 $v(x)$ 是函数 Φ 在闭区间 $[a,x]$ 上的全变差. 那么对应于所有的 $\Phi \in M$ 的函数 v 均满足不等式(即满足定理的条件(12)):

$$\max|v(x)| \leqslant K, V_a^b[v] = V_a^b[\Phi] \leqslant K,$$

并且是单调的. 假定对于单调函数定理得证,我们从 M 里选取序列 $\{\Phi_n\}$,使得相应的序列 $\{v_n\}$ 收敛于某一极限 v. 其次,函数

$$g_n = v_n - \Phi_n$$

也是单调的,并且满足定理的条件. 因此从$\{\Phi_n\}$里可以选取这样的子序列$\{\Phi_{n_k}\}$,使得相应的序列$\{g_{n_k}\}$收敛于某一极限g. 于是

$$\Phi_{n_k}(x) \to \Phi(x) = v(x) - g(x).$$

现在,我们来对于单调函数族M证明定理. 设$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$是闭区间$[a,b]$的一切有理点. 根据(12),数$\Phi(r_1)$(其中$\Phi$遍历了整个$M$)构成有界集,因此可以找到在点$r_1$上收敛的序列$\{\Phi_n^{(1)}\}$. 其次,从$\{\Phi_n^{(1)}\}$中可以选取子序列$\{\Phi_n^{(2)}\}$,使其在点$r_2$上收敛(当然也在点$r_1$上收敛). 从$\{\Phi_n^{(2)}\}$里可以选取子序列$\{\Phi_n^{(3)}\}$在点$r_3$上收敛,等等. 对角线序列$\{\Phi_n^{(n)}\}$显然在闭区间$[a,b]$的一切有理点上都收敛. 它的极限是非递减函数$\Phi$,暂时仅在点$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$上有定义. 在闭区间$[a,b]$的其余的那些点上我们来补充它的定义:对于无理点$x$,令$\Phi(x) = \lim\limits_{r \to x-0} \Phi(r)$($r$是有理数). 我们来证明,用这样的方法所得到的非递减函数Φ在一切点上是连续的,并且Φ是序列$\{\Phi_n^{(n)}\}$的极限. 设x^*是Φ的连续点. 那么对于给定的$\varepsilon > 0$总可以找到这样的$\delta > 0$,使得只要$|x^* - x| < \delta$,则

$$|\Phi(x^*) - \Phi(x)| < \varepsilon/6. \tag{13}$$

我们这样选取有理点r'和r'',使得$r' < x^* < r''$且$r' > x^* - \delta, r'' < x^* + \delta$;现在设$n_0$是充分大,使得当$n > n_0$时不等式

$$|\Phi_n(r') - \Phi(r')| < \varepsilon/6 \text{ 和 } |\Phi_n(r'') - \Phi(r'')| < \varepsilon/6 \tag{14}$$

得到满足. 从式(13)和式(14)推出

$$|\Phi_n(r') - \Phi_n(r'')| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

因为函数Φ_n是非递减的,所以$\Phi_n(r') \leqslant \Phi_n(x^*) \leqslant \Phi_n(r'')$. 因此

$$\begin{aligned} & |\Phi(x^*) - \Phi_n(x^*)| \\ \leqslant & |\Phi(x^*) - \Phi(r')| + |\Phi(r') - \Phi_n(r')| + |\Phi_n(r') - \Phi_n(x^*)| \\ \leqslant & \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{4\varepsilon}{6} = \varepsilon, \end{aligned}$$

而这就表示$\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x^*) = \Phi(x^*)$.

这样,我们从M中选出一函数列,它处处收敛于极限函数Φ只有在函数Φ的间断点可能例外. 因为这样的点集有穷或可数,所以再运用对角线过程,就可以从序列$\{\Phi_n\}$里选出子序列,使之在这些点上也收敛,即在$[a,b]$上处处收敛.

6. 连续函数空间中线性连续泛函的一般形式 上面我们已经指出了斯蒂尔切斯积分的某些应用. 现在我们还讨论一个与这个概念有密切联系的问题,即我们来阐明空间$C[a,b]$中线性泛函的一般形式.

定理 4(里斯) 空间$C[a,b]$中的每个线性连续泛函F可以表示成:

$$F(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\Phi(x), \tag{15}$$

其中 Φ 是某个有界变差函数①. 这时

$$\| F \| = V_a^b[\Phi].$$

证明　空间 $C[a,b]$ 可视为由闭区间 $[a,b]$ 上一切有界函数 f 所构成的函数空间 $M[a,b]$ 的子空间. f 具有与 $C[a,b]$ 中的范数一样的范数

$$\| f \| = \sup | f(x) |.$$

设 F 是 $C[a,b]$ 上的线性连续泛函. 根据哈恩 - 巴拿赫定理，它可以从 $C[a,b]$ 扩张到整个 $M[a,b]$ 上而保持范数不变. 特别是，这样扩张的泛函系定义在一切形如

$$h_a(a) \equiv 0, \quad h_\tau(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \leqslant \tau \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x > \tau \text{ 时，倘若 } \tau > a \end{cases} \tag{16}$$

的函数上，令

$$\Phi(\tau) = F(h_\tau). \tag{17}$$

我们来证明，函数 Φ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有有界变差. 事实上，取这个闭区间的任意分割

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \tag{18}$$

且令

$$\alpha_k = \operatorname{sgn}(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})) \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

于是

$$\sum_{k=1}^n | \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) | = \sum_{k=1}^n \alpha_k(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}))$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_k F(h_{x_k} - h_{x_{k-1}}) = F\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k(h_{x_k} - h_{x_{k-1}})\right)$$

$$\leqslant \| F \| \cdot \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k(h_{x_k} - h_{x_{k-1}}) \right\|.$$

但是函数 $\sum_{k=1}^n \alpha_k(h_{x_k} - h_{x_{k-1}})$ 仅取值 ±1 和 0. 从而它的范数等于 1. 这样一来

$$\sum_{k=1}^n | \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) | \leqslant \| F \|.$$

因为这个不等式对于闭区间 $[a,b]$ 的任何分割都成立，所以

① 这里指的是闭区间 $[a,b]$ 上的积分.

$$V_a^b[\Phi] \leqslant \|F\|.$$

这样,我们根据泛函 F 构造了有界变差函数 Φ. 我们来证明,正是借助于这个函数,泛函 F 可以写成斯蒂尔切斯积分(15)的形式.

设 f 是$[a,b]$上的任意连续函数. 给定正数 ε 和选取 $\delta>0$,使得只要 $|x''-x'|<\delta$ 则 $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$. 现在我们这样选取分割(18),使得每个子区间的长度小于 δ. 考虑阶梯函数 f_ε:

$$f_\varepsilon=f(x_k),\text{当 } x_{k-1}<x<x_k \text{ 时}, k=1,2,\cdots,n,$$
$$f_\varepsilon(a)=f(a).$$

它显然可以写成如下形式

$$f_\varepsilon(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left[h_{x_k}(x)-h_{x_{k-1}}(x)\right],$$

其中 h_τ 是由等式(16)所定义的函数. 显然,对于所有的 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 都有 $|f(x)-f_\varepsilon(x)|<\varepsilon$,即

$$\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|<\varepsilon.$$

我们来求泛函 F 在元素 f_ε 上的值. 根据这个泛函是线性的和函数 h_τ 的定义,它等于

$$\begin{aligned}F(f_\varepsilon)&=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left[F(h_{x_k})-F(h_{x_{k-1}})\right]\\&=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left[\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\right],\end{aligned}$$

即积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x)$$

的积分和. 因此对于闭区间$[a,b]$的足够小的分割,有

$$\left|F(f_\varepsilon)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x)\right|<\varepsilon.$$

但是同时,有

$$|F(f)-F(f_\varepsilon)|\leqslant\|F\|\cdot\|f-f_\varepsilon\|\leqslant\|F\|\cdot\varepsilon.$$

从而

$$\left|F(f)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x)\right|<\varepsilon(1+\|F\|),$$

因此由于 ε 的任意性就得到等式

$$F(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x).$$

我们证明了，由公式(17)所定义的函数 Φ 的全变差满足不等式

$$V_a^b[\Phi] \leqslant \|F\|. \tag{19}$$

另一方面，从黎曼－斯蒂尔切斯积分的中值定理立刻推出

$$\|F\| \leqslant V_a^b[\Phi]. \tag{20}$$

比较式(19)和式(20)就得到等式

$$\|F\| = V_a^b[\Phi].$$

定理完全得证.

注　显然，若取闭区间 $[a,b]$ 上的任意有界变差函数 Φ，且令

$$F(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x),$$

我们就得到空间 $C[a,b]$ 上的线性泛函. 这时，两个在 $[a,b]$ 上(除去这个闭区间的不多于可数个内点所构成的集外)处处相等的函数 Φ_1 和 Φ_2，决定同一线性泛函；反之，设对于每个连续函数 f，Φ_1 和 Φ_2 决定 $C[a,b]$ 上的同一线性泛函，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_1(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_2(x).$$

由此容易推出，在函数 $\Phi_1 - \Phi_2$ 的一切连续点上 $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{conts}$，即可能除去有限或可数点外，处处有 $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}$.

这样一来，$C[a,b]$ 上的每个连续线性泛函就与 $[a,b]$ 上的有界变差函数相对应，并且函数 Φ_1 和 Φ_2 属于同一类函数当且仅当它们之差最多在闭区间 $[a,b]$ 的可数个内点上不为常数. 在每个这样的函数类中，可以选取一个且仅能选取一个函数，使之在点 a 上等于零，而在半开区间 $(a,b]$ 上处处右连续. 在 $[a,b]$ 上一切有界变差函数的空间中，满足这些条件的函数构成一个闭线性子空间，我们用符号 $V^0[a,b]$ 来表示. 最后我们指出，对于 $C[a,b]$ 上的任何泛函 F，由等式(17)所定义的函数 $\Phi(\tau)$ 正是 $V^0[a,b]$ 里的函数. 因为对于这样的 $\Phi(\tau)$ 曾经证明了等式 $\|F\| = V_a^b[\Phi]$，所以定理 4 可以用下面的形式给出.

定理 4′　在空间 $(C[a,b])^*$ 和 $V^0[a,b]$ 之间存在由等式

$$F(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x)$$

所建立的同构(即一对一、线性和等距)对应关系.

线性泛函由 $V^0[a,b]$ 中函数的这种表示，称为**标准表示**

从这个定理很容易得到如下连续函数和连续可微函数空间 $C^1[a,b]$ 上，线性泛函的标准表示定理，该定理在变分问题里起着重要的作用.

定理 5　空间 $C^1[a,b]$ 中的每个线性泛函，可以用一种且仅有一种方法表示成下面的形式

$$F(f) = \alpha f(a) + \int_a^b f'(x)\mathrm{d}\Phi(x), \tag{21}$$

其中 α 是数,而 $\Phi \in V^0[a,b]$.

证明 考虑 $C^1[a,b]$中满足条件$f(a)=0$ 的函数所构成的子空间 $\mathring{C}^1[a,b]$,以及将这个子空间变为全空间 $C[a,b]$的算子 $A=\mathrm{d}/\mathrm{d}x$. 设 F 是 $C^1[a,b]$上的线性泛函. 我们首先仅在子空间 $\mathring{C}^1[a,b]$上来讨论它. 现在可以把拼三组引理(第四章 §5 第4段)应用到算子 $A:\mathring{C}^1[a,b]\to C[a,b]$和泛函 $F:\mathring{C}^1[a,b]\to R$. 根据这个引理,可以找到这样的线性变换:

$$\psi: C[a,b] \to R,$$

使得对于每个函数 $g \in \mathring{C}^1[a,b]$,都有

$$F(g) = \psi(Ag). \tag{22}$$

每个函数$f \in C^1[a,b]$可以表示成下面的形式

$$f(x) = f(a) + g(x), \quad g \in \mathring{C}^1[a,b].$$

因此

$$F(f) = F(f(a)) + F(g). \tag{23}$$

根据里斯定理、等式(22)和算子 A 的定义,有

$$F(g) = \psi(Ag) = \int_a^b g'(x)\mathrm{d}\Phi(x),$$

或

$$F(g) = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}\Phi(x), \tag{24}$$

因为$f'(x)=g'(x)$. 设 α 是泛函 F 在恒等于 1 的函数上的值. 于是从式(23)和式(24)最后就得到表示式(21).

第七章　可和函数空间

可和函数空间，首先是所有可和函数的空间 L_1 和平方可和函数空间 L_2，是最重要的赋范空间类. 现在我们来研究这些空间的基本性质. 本章内容，一方面依赖于第二至第四章所叙述的度量空间与线性赋范空间的一般性质，另一方面又依赖于第五章引入的勒贝格积分的概念.

§1. 空间 L_1

1. 空间 L_1 的定义与基本性质　设 X 是一个测度为 μ 的空间，并且这个空间 X 本身的测度可能是有限的或是无限的. 我们假定测度 μ 是**完全**的（即任何测度为零的集的任一子集可测）. 考虑所有在 X 上为可和的函数 f 的总体. 由于可和函数的线性组合可和，这个总体连同通常的函数加法运算及函数乘以数的运算，就形成一个线性空间. 我们以 $L_1(X,\mu)$ 表示这个空间，或者简记为 L_1. 在 L_1 中定义范数如下①：

$$\|f\| = \int |f(x)| \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

显然，这时有

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$$

及

① 此处与今后，符号 $\int$ 将表示在整个空间 X 上的积分.

$$\|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|.$$

然而,为了满足范数的最后一个性质,即

$$\|f\| > 0, \quad 如果 f \neq 0,$$

必须对于 X 上互相等价的函数不加区别,即认为它们是空间 L_1 的同一元素. 特别, L_1 中的零元素是所有几乎处处为零的函数的总体. 这时(1)式具有范数的所有性质. 于是我们便有如下定义:

定义 1　以彼此等价的可和函数类为元素的赋范空间称为**空间** L_1;在 L_1 中,元素的加法与元素乘以数象普通的函数的加法和数乘那样定义①,范数由公式

$$\|f\| = \int |f(x)| \mathrm{d}\mu$$

给出. 在 L_1 中如同在所有赋范空间中一样,由公式

$$\rho(f,g) = \|f - g\|$$

来引入距离. 可和函数序列在这个距离意义下的收敛性称为**平均收敛**. 可以假定空间 L_1 由复函数组成(复 L_1),或认为仅由实函数组成(实 L_1). 本节的内容包括了这两种情形.

下述事实对许多分析问题极为重要.

定理 1　空间 L_1 是完备的.

证明　设$\{f_n\}$是 L_1 中的基本列,即当 $n,m\to\infty$ 时

$$\|f_n - f_m\| \to 0.$$

那么可以找到下标的递增序列$\{n_k\}$,使得

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| = \int |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \mathrm{d}\mu < 1/2^k.$$

由此不等式和列维定理推出:级数

$$|f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \cdots$$

在 X 上几乎处处收敛. 于是级数

$$f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \cdots$$

在 X 上几乎处处收敛于某个函数

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x).$$

这样一来,L_1 中的基本列含有几乎处处收敛的子序列.

---

① 要确切地:在 L_1 中的每个元素,是彼此等价的可和函数类;为将两个这样的类相加,必须在两类中各取一代表且把包含所选代表之和的类解释为和. 显然,此和不依赖于代表的选取. 对于 L_1 中元素乘以数的运算也类似.

现在证明子序列$\{f_{n_k}\}$平均收敛于同一函数f. 由于序列$\{f_n\}$是基本序列,对于任意固定的$\varepsilon>0$和所有充分大的k与l,有

$$\int |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

根据法图(Fatou)定理,当$l\to\infty$时在这个不等式里可以在积分号下取极限. 于是,有

$$\int |f_{n_k}(x) - f(x)| \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon,$$

由此得出$f\in L_1$且$f_{n_k}\to f$. 但是根据基本序列含有收敛于某一极限的子序列,可以推出这个基本列也收敛于同一极限. 定理得证.

2. L_1 中处处稠密的集合　对任意在X上可和的函数f,及任意的$\varepsilon>0$,存在这样一个简单可和函数$\varphi(x)$,使得

$$\int |f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

其次,由于对在集$E_1,E_2,\cdots$上取值分别为$y_1,y_2,\cdots$的简单可和函数,其积分定义为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(E_n)$$

的和(在此级数绝对收敛的条件下),显然,可以把任何简单可和函数表成仅具有有限个数值的简单函数序列(在平均意义下的)极限. 于是,仅具有有限个数值的函数(即是特征函数的有限线性组合)在空间L_1中处处稠密.

设R是一度量空间,在其中引入满足如下条件的测度(即在欧几里得空间或在许多其他实际上有价值的情形下,勒贝格测度满足的条件):在R中的一切开集与一切闭集均可测,且对任何可测集$M\subset R$及任意$\varepsilon>0$,存在[①]这样的开集$G\supset M$,使得

$$\mu(G/M) < \varepsilon. \tag{2}$$

于是下述定理为真:

定理 2　所有连续函数的集合在$L_1(R,\mu)$中处处稠密.

证明　根据前面所说的只需证明,任何只具有有限个数值的简单函数,是连续函数序列在平均收敛意义下的极限. 其次,因为任何具有有限个数值的可和简单函数,是有限测度可测集的特征函数$\chi_M(x)$的线性组合,那么只需对特征函数进行证明. 设M是度量空间R中的可测集,且$\mu(M)<\infty$. 于是从条件(2)立即推得,对于任意$\varepsilon>0$可以找到闭集F_M和开集G_M,使得

$$F_M \subset M \subset G_M \quad 且 \quad \mu(G_M) - \mu(F_M) < \varepsilon.$$

---

① 参看第五章 §4 第 7 段中的习题.

定义函数 $\varphi_\varepsilon(x)$ 如下①:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\rho(x,R/G_M)}{\rho(x,R/G_M) + \rho(x,F_M)}.$$

此函数当 $x \in R/G_M$ 时为零,当 $x \in F_M$ 时等于1. 由于函数 $\rho(x,F_M)$ 及 $\rho(x,R/G_M)$ 连续且两个函数的和恒不为零,可见函数 $\varphi_\varepsilon(x)$ 是连续的. 函数 $|\chi_M - \varphi_\varepsilon|$ 在 G_M/F_M 上不超过1,在集 G_M/F_M 外为零. 因此

$$\int |\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \mathrm{d}\mu < \varepsilon,$$

由此就推得定理的论断.

显然,空间 $L_1(X,\mu)$ 还依赖于空间 X 的选择及在此空间中测度 μ 的选择. 例如,如果测度 μ 集中于有限个点,那么 $L_1(X,\mu)$ 实际是有限维的空间. 无穷维的,但含有处处稠密的可数子集的空间 L_1 在分析中起着重要的作用. 为了刻画这样的空间 L_1,还要引入一个本质上属于一般测度论的概念.

定义 2　测度 μ 称为**具有可数基的测度**,如果存在空间 X 的可测子集的这样的可数组 $\mathscr{A} = \{A_n\}$ $(n = 1,2,\cdots)$(测度 μ 的**可数基**),使得对任何可测的 $M \subset X$ 与任意的 $\varepsilon > 0$,总可找到这样的 $A_k \in \mathscr{A}$,有

$$\mu(M \triangle A_k) < \varepsilon.$$

特别,如果测度 μ 可以表为定义在某个可数半环 $\mathfrak{S}$ 上的测度 m 的勒贝格扩张,则测度 μ 有可数基. 事实上,在这种情况下环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$(显然,它是可数的)乃是所求的基. 由此可以看出,例如,区间上的勒贝格测度具有可数基,因为对于勒贝格测度可取以有理数为端点的半开区间的总体作为所求的半环.

具有可数基的两个测度 μ_1 与 μ_2 的积 $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ 同样具有可数基,因为很容易验证,测度 μ_1 的基中的元与测度 μ_2 的基中的元之积的有限和,形成测度 $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ 的基. 所以平面上(同样,在 n 维空间中)的勒贝格测度有可数基

设

$$A_1^*, A_2^*, \cdots, A_n^*, \cdots \tag{3}$$

是测度 μ 的可数基. 易见,经扩充集组(3),可以形成这个测度的一个新可数基

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \tag{4}$$

这个新可数基对减法、取有限和与有限交这些运算是封闭的,即是一个环.

定理 3　如果测度 μ 有可数基,那么在 $L_1(X,\mu)$ 中存在可数的、处处稠密的函数集.

证明　我们证明,有限和

---

① $\rho(x,A)$ 表示点 x 到集 A 的距离.

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x) \tag{5}$$

在 $L_1(X,\mu)$ 中形成一可数的、处处稠密的集合，其中 c_k 是有理数，而 f_k 是测度 μ 之可数基的元的特征函数.

这个集的可数性是显然的，我们证明这个集在 $L_1(X,\mu)$ 中处处稠密. 如我们已经指出的，仅具有有限个数值的阶梯函数所成的集在 L_1 中处处稠密. 因为任意这样的函数，可以用同类型的但只取有理值的函数来任意准确地逼近，所以只需证明在集

$$E_1,E_2,\cdots,E_n\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X,\quad 当 i\neq j 时 E_i\cap E_j = \varnothing\right)$$

上分别取值为

$$y_1,y_2,\cdots,y_n\quad(所有 y_i 是有理数)$$

的任意阶梯函数 f，可以在 L_1 度量的意义下用形如(5)的函数任意准确地逼近. 根据所作的说明，不失普遍性可以假设测度 μ 的基是环.

根据测度 μ 的可数基的定义，对任意 $\varepsilon>0$，在基中存在这样的集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，使得

$$\mu(E_k\triangle A_k) < \varepsilon.$$

令

$$A'_k = A_k/\bigcup_{i<k} A_i\quad(k = 1,2,\cdots,n);$$

定义 f^*，令

$$f^*(x) = \begin{cases} y_k, 当 x\in A'_k, \\ 0, 当 x\in R/\bigcup_{i=1}^{n} A'_i. \end{cases}$$

易见，对充分小的 ε，测度

$$\mu\{x: f(x)\neq f^*(x)\}$$

任意小. 因此对充分小的 ε，积分

$$\int |f(x) - f^*(x)|\,\mathrm{d}\mu \leqslant (2\max|y_k|)\mu\{x: f(x)\neq f^*(x)\}$$

任意小.

根据我们对测度 μ 的基所作的假定，函数 f^* 是形如(5)的函数.

定理证毕.

对于 X 是数直线上的区间，μ 是勒贝格测度这种特殊的情形，例如可更简单地取所有的具有有理系数的多项式的集合，作为 L_1 中可数的、处处稠密的集合. 这个

集合在连续函数集合中处处稠密(甚至是在一致收敛的意义下),而连续函数的集合在 $L_1(X,\mu)$ 中形成处处稠密的集合.

§2. 空间 L_2

1. 定义与基本性质　如我们所见,空间 L_1 是完备的赋范(即巴拿赫)线性空间. 但它不是欧几里得空间,因为定义在此空间上的范数不能借助任何内积给出. 由第三章 §4 第 8 段所建立的平行四边形定理可推出这点. 例如对于在闭区间 $[0,2\pi]$ 可积的函数 $f\equiv 1, g=\sin x$,关系式

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2)$$

在 L_1 中不成立.

取平方可积的函数的总和,可以建立不仅是赋范的,而且是欧几里得的泛函空间. 我们引入相应的定义. 首先考虑在某个给定了测度 μ 的空间 X 上定义的实函数 f. 假定所有这些函数是可测的且在 X 上几乎处处有定义. 彼此等价的函数不加区别.

定义 1　函数 f 称为在 X 上**平方可积的函数**,如果积分

$$\int f^2(x)\,\mathrm{d}\mu$$

存在(有限). 所有这样的函数的总和用 $L_2(X,\mu)$ 表示,或者简记为 L_2.

我们来确立平方可积函数的基本性质.

(1) 两个平方可积的函数之积是可积函数.

这可由不等式

$$|f(x)g(x)|\leqslant\frac{1}{2}[f^2(x)+g^2(x)]$$

及勒贝格积分的性质直接推出.

推论　任何在具有有限测度的空间中平方可积的函数 f 是可积的.

事实上,只要置 $g(x)\equiv 1$ 并应用性质 1 即可.

(2) 两个 L_2 中函数之和同样属于 L_2.

实际上,

$$(f(x)+g(x))^2\leqslant f^2(x)+2|f(x)g(x)|+g^2(x).$$

由于性质 1,右边的三项中每一项都是可积的.

(3) 如果 $f\in L_2$, α 是任意的一个数,那么 $\alpha f\in L_2$.

实际上,如果 $f\in L_2$,那么

$$\int[\alpha f(x)]^2\mathrm{d}\mu=\alpha^2\int f^2(x)\,\mathrm{d}\mu<\infty.$$

性质 2 与性质 3 表明,L_2 中函数的线性组合仍属于 L_2;同时,显然 L_2 中函数的加法以及把这样的函数乘以数的运算满足线性空间定义中所列举的一切条件(第三章§1). 于是平方可积函数的总和 L_2 是线性空间.

现在,在 L_2 中定义内积为

$$(f,g) = \int f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

很明显,内积定义(参看第三章§4)中的所有条件都满足,即

1) $(f,g)=(g,f)$,

2) $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$,

3) $(\alpha f,g)=\alpha(f,g)$,

4) $(f,f)>0$,如果 $f\neq 0$.

特别地,条件 4)是由彼此等价的函数不加区别这件事来保证的(于是,可取在 X 上等价于 $f\equiv 0$ 的所有函数的总和作为零元素).

这样,对于平方可积的函数,引入加法和数乘运算以及引入内积以后,我们便得到下面最终的定义.

定义 2　由彼此等价的平方可积函数类所组成的线性空间是**欧几里得空间**,其中内积由公式

$$(f,g) = \int f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu$$

定义.

在 L_2,如同在一切欧几里得空间中一样,成立柯西 - 布尼雅可夫斯基不等式和三角形不等式,在这里这两个不等式的形式为

$$\left(\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu\right)^2 \leqslant \int f^2(x)\,\mathrm{d}\mu \int g^2(x)\,\mathrm{d}\mu$$

及

$$\sqrt{\int (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}\mu} \leqslant \sqrt{\int f^2(x)\,\mathrm{d}\mu} + \sqrt{\int g^2(x)\,\mathrm{d}\mu}.$$

特别,当 $\mu(X)<\infty$ 及 $g(x)\equiv 1$ 时,柯西 - 布尼雅可夫斯基不等式变为如下有用的估计式:

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}\mu\right)^2 \leqslant \mu(X)\int f^2(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

L_2 中的范数由公式

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int f^2(x)\,\mathrm{d}\mu}$$

定义,而函数 f 与 g 之间的距离由公式

$$\rho(f,g) = \|f-g\| = \sqrt{\int (f(x)-g(x))^2 \mathrm{d}\mu}$$

定义. 量

$$\int (f(x)-g(x))^2 \mathrm{d}\mu = \|f-g\|^2$$

也称为函数f与g彼此之间的**均方差**.

在空间L_2度量意义下函数序列的收敛称为**均方收敛**. 如果不致于把这种收敛与上一节所定义的L_1中的收敛混淆时,我们在这里也将应用更简单的术语"平均收敛".

定理 1 当$\mu(X)<\infty$时,空间$L_2(X,\mu)$是完备的.

证明 设$\{f_n\}$是L_2中的基本列,即

$$\text{当 } n,m\to\infty \text{ 时}, \|f_n-f_m\|\to 0,$$

那么,由估计式(1)得

$$\int |f_n(x)-f_m(x)| \mathrm{d}\mu \leqslant [\mu(X)]^{1/2}\left\{\int (f_n(x)-f_m(x))^2 \mathrm{d}\mu\right\}^{1/2}$$

$$\leqslant \varepsilon[\mu(X)]^{1/2}, \tag{2}$$

即序列$\{f_n\}$在空间L_1的度量下也是基本列. 重复证明空间L_1完备性时所进行的论证,从$\{f_n\}$中选取子列$\{f_{n_k}\}$,使得该子列几乎处处收敛到某一函数f. 对子序列中的各项,当k与l充分大时,不等式

$$\int (f_{n_k}(x)-f_{n_l}(x))^2 \mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

为真. 应用法图定理,当$l\to\infty$时,可以在不等式中取极限. 我们得到

$$\int (f_{n_k}(x)-f(x))^2 \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon,$$

由此推得$f\in L_2$及$f_{n_k}\to f$. 为了完成余下的证明,如在§1定理1中一样,只要利用下面的事实:如果基本列包含收敛子列,那么这个基本列本身也收敛于同一极限.

2. 无穷测度的情形 我们仅仅研究了定义在测度有限的某个空间X上的平方可积函数. 这时,条件$\mu(X)<\infty$的应用是十分重要的. 即在第一步证明平方可和函数是可和的,首先应用了这一条件,其后,在导出借以证明空间L_2的完备性时所用的不等式(2)时,又用了这一条件. 如果在测度为无穷的集合(例如,在具有勒贝格测度的全直线)上研究函数,那么并非任何L_2的函数都属于L_1. 例如,函数$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$在全数轴上是不可积的,但它的平方却可积. 其次,当$\mu(X)<\infty$时,不等式(1)成立,这意味着,由函数序列在L_2中收敛可推出它在L_1中收敛. 而当$\mu(X)=\infty$时,这也不成立:例如在数轴上的函数序列

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1/n, & 当 |x|\leqslant n,\\ 0, & 当 |x|>n,\end{cases}$$

在直线上的平方可和函数空间 $L_2(-\infty,\infty)$ 中收敛到零,但是在 $L_1(-\infty,\infty)$ 中却不收敛于任何极限. 然而,当 $\mu(X)=\infty$ 时,空间 L_2 完备的定理仍然正确①.

我们来证明这个论断. 如同在第五章 §5 第 6 段我们引入对测度无穷的集合的积分概念时所作的那样,假定整个空间 X 可表为测度有限的集合的可数和. 设

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n,\mu(X_n)<\infty,当 n\neq m 时 X_n\cap X_m=\varnothing$$

是这样的表示;设 $\{f_n\}$ 是 $L_2(X,\mu)$ 中的基本列. 于是,对任意 $\varepsilon>0$ 存在这样的 N,使得对所有的 $k,l\geqslant N$,

$$\int[f_k(x)-f_l(x)]^2\mathrm{d}\mu<\varepsilon.$$

引入记号

$$\varphi^{(n)}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & 当 x\in X_n,\\ 0, & 对其余的 x.\end{cases}$$

根据勒贝格积分的 σ 可加性,有

$$\int[f_k(x)-f_l(x)]^2\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{X_n}[f_k^{(n)}(x)-f_l^{(n)}(x)]^2\mathrm{d}\mu<\varepsilon.$$

对每一个有限的 M 更加成立

$$\sum_{n=1}^{M}\int_{X_n}[f_k^{(n)}(x)-f_l^{(n)}(x)]^2\mathrm{d}\mu<\varepsilon. \tag{3}$$

在每个 X_n 上平方可积的函数的总和是完备空间. 置

$$f^{(n)}(x)=\lim_{l\to\infty}f_l^{(n)}(x)$$

(这里的收敛性应理解为在空间 $L_2(X_n,\mu)$ 的收敛性),我们可以在不等式(3)中当 $l\to\infty$ 时取极限,得

$$\sum_{n=1}^{M}\int_{X_n}[f_k^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)]^2\mathrm{d}\mu\leqslant\varepsilon.$$

因为这个不等式对任何 M 都成立,那么在此不等式中可以令 $M\to\infty$ 取极限. 于是有

$$\sum_{n=1}^{M}\int_{X_n}[f_k^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)]^2\mathrm{d}\mu\leqslant\varepsilon.$$

若对于 $x\in X_n$,令

---

① 在 §1 中所作的空间 L_1 完备性的证明,显然不依赖于空间 X 的测度有限的假定.

$$f(x) = f^{(n)}(x),$$

则我们可以把上述不等式改写成

$$\int [f_n(x) - f(x)]^2 \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon.$$

由此推出$f \in L_2(X,\mu)$及序列$\{f_n\}$收敛于f.

习题　定义$L_p(X,\mu)$为彼此等价的函数类的总和,其中每个函数f满足$\int |f(x)|^p \mathrm{d}\mu < \infty$,而$1 \leqslant p < \infty$. 证明$L_p(X,\mu)$是关于范数$\|f\| = \left(\int |f(x)|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$的巴拿赫空间.

3. 在L_2中处处稠密的集合. 同构定理　这样,平方可积函数空间$L_2(X,\mu)$是完备的欧几里得空间. 除了退化的情形外,这个空间的维数是无穷的. 从各种应用的观点,在分析中重要的是阐明什么时候空间$L_2(X,\mu)$是可分的,即含有可数的处处稠密的集合. 在§1我们证明了,对于空间$L_1(X,\mu)$,由测度μ的可数基的存在性可推出可分性. 不难验证,这个条件也保证$L_2(X,\mu)$的可分性. 事实上,$L_2(X,\mu)$中的每个函数可以以任意的准确度用这样一些函数逼近:其中每个函数都在某个测度有限的集合外为零①. 其次,在证明§1定理3时所作的论证表明,在这样一些函数的集合中可以选出可数的、处处稠密的集合.

于是,如果测度μ有可数基,那么空间$L_2(X,\mu)$是完备的可分欧几里得空间. 换句话说,放下$L_2(X,\mu)$有有限维数的情况不提,我们得到如下结果:如果测度μ有可数基,那么$L_2(X,\mu)$是可分希尔伯特空间.

根据希尔伯特空间关于同构的定理,这意味着所有这样的$L_2(X,\mu)$彼此同构. 特别,每一个这样的$L_2(X,\mu)$与空间l_2同构,这里空间l_2是平方和收敛的数列空间. 当X可数时l_2可看作$L_2(X,\mu)$,而μ定义在X的所有子集上,且对每个点μ等于1. 下面我们将仅仅考虑与具有可数基的测度相对应的$L_2(X,\mu)$. 当不致发生误解时,每一个这样的空间都简记为L_2.

如同我们已解释过的,由于空间L_2是希尔伯特空间的实现第三章§4中所确立的抽象希尔伯特空间的所有概念与事实都可移植到L_2中来.

特别,根据里斯定理,希尔伯特空间H中的所有线性泛函都可表示为内积的形式:

$$F(h) = (h,a),$$

其中a是H中的一个固定向量. 所以L_2中所有的线性泛函具有如下形式

$$F(f) = \int f(x) g(x) \mathrm{d}\mu,$$

其中g是X中固定的平方可积函数.

---

① 如果$\mu(X) < \infty$,那么这步可以省去.

4. 复空间 L_2 我们刚刚研究过实空间 L_2. 所叙述的结果很容易推到复空间的情形. 假设 f 是定义在某具有给定测度 μ 的空间 X 中的复函数,如果积分

$$\int_X |f(x)|^2 d\mu$$

有限,则称 f 为**平方可积函数**. 用通常的方式定义了这些函数的加法与数乘,并用公式

$$(f,g) = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu$$

引入内积,我们得到欧几里得空间,此空间被称为**复空间** L_2.(这时,如同实空间的情形,我们认为彼此等价的函数是空间的同一个元素.)这个空间是完备的,而如果测度 μ 有可数基,那么它也是可分的. 这样一来(除去有限维的情形)我们得到,与具有可数基的测度相对应的复空间 L_2 是复可分希尔伯特空间. 所有这样的空间彼此同构,第三章 §4 中所叙述的结果对于这些空间都正确.

5. 均方收敛及它与其他类型的泛函序列收敛性的联系 在空间 L_2 中引入范数,从而对平方可积函数我们定义了下面的收敛概念:如果

$$\lim_{n\to\infty} \int [f_n(x) - f(x)]^2 d\mu = 0,$$

则

$$f_n \to f.$$

我们把这样的收敛称为均方收敛. 我们来看,这样的收敛性是怎样与其他类型泛函序列的收敛性相联系的. 首先假定空间 -“承载子”X 的测度是有限的.

(1) 如果 $L_2(X,\mu)$ 中的函数序列 $\{f_n\}$ 在 $L_2(X,\mu)$ 的度量下收敛,那么这个序列在 $L_1(X,\mu)$ 度量下也收敛.

事实上,根据不等式(2)有

$$\int |f_n(x) - f(x)| d\mu \leqslant [\mu(X) \int (f_n(x) - f(x))^2 d\mu]^{1/2},$$

由此可推出我们的论断.

(2) 如果序列 $\{f_n\}$ 一致收敛,那么它均方收敛.

事实上,对于每个 $\varepsilon > 0$,对所有充分大的 n 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

因此

$$\int [f_n(x) - f(x)]^2 d\mu < \varepsilon^2 \mu(x),$$

由此可推出我们的论断.

(3) 如果可和函数序列$\{f_n\}$平均收敛,则它在 X 上依测度也收敛.

这个论断可从契贝谢夫(Чебыщев)不等式(参看第五章 §5 第 4 段)立即推出.

由此及第五章 §4 定理 8 推出:

(4) 如果序列$\{f_n\}$平均收敛,那么从这个序列中可选出几乎处处收敛的子序列$\{f_{n_k}\}$.

我们指出,在证明关于空间 L_1 的完备性定理时,我们已经建立了这一事实,但当时并未凭借第五章 §4 的定理 8.

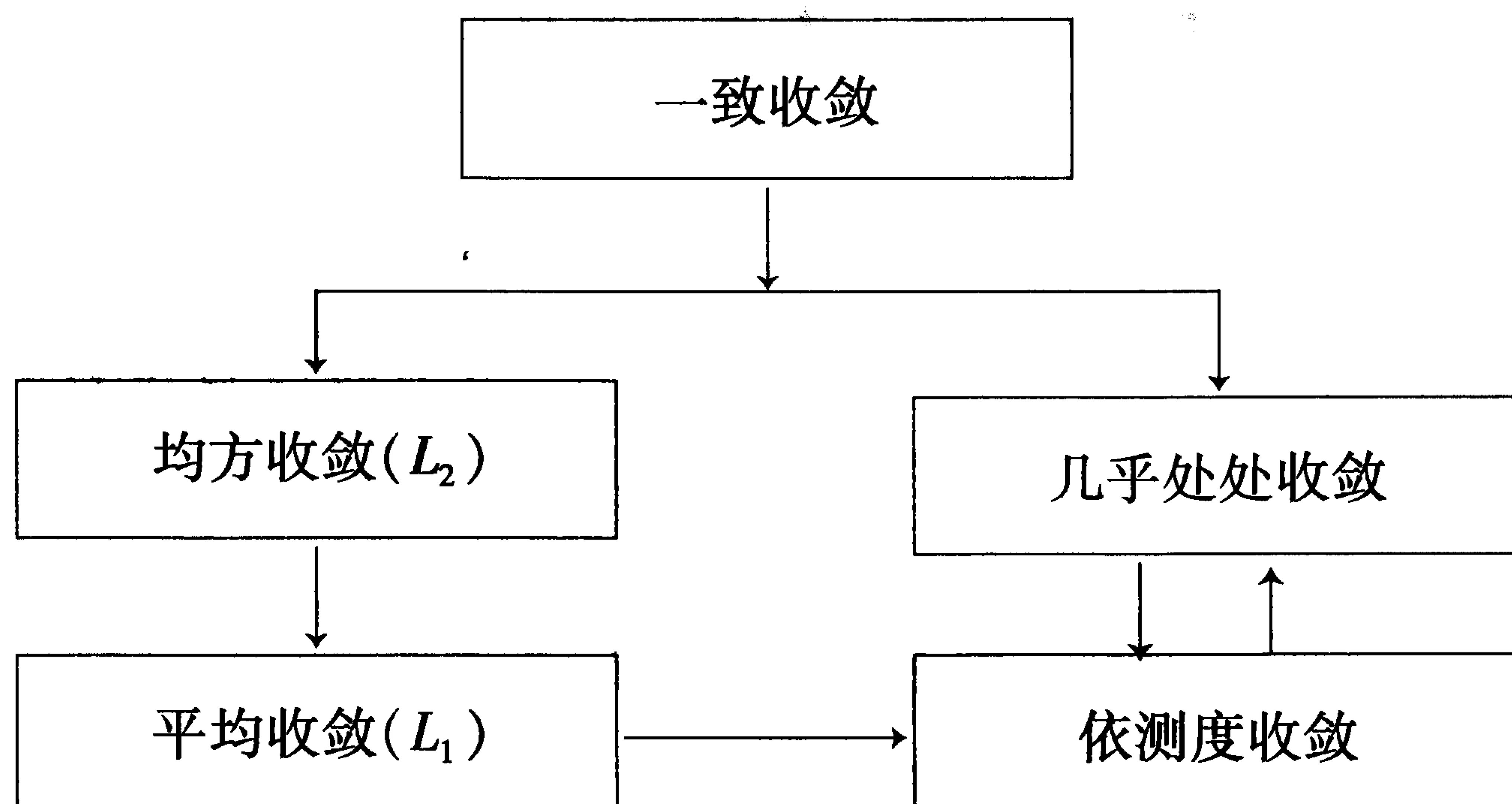
不难验证,从某个序列的平均收敛性(甚至于是均方收敛),一般说来不能推出它几乎处处收敛. 实际上,在第五章 §4 第 6 段所构造的序列$\{f_n\}$平均(甚至于均方)收敛于$f\equiv 0$,而同时,但是如我们所见,这时它在每一个点上都不收敛于零. 反之,序列$\{f_n\}$可能几乎处处(甚至于处处)收敛而同时却不平均收敛. 例如我们考虑闭区间[0,1]上的函数序列

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{当 } x \in (0,1/n], \\ 0, & \text{对其余的 } x. \end{cases}$$

显然,对所有 $x \in [0,1]$,$f_n(x)\to 0$. 但是,这时对任何 n,却有

$$\int_0^1 |f_n(x)|\, dx = 1.$$

在 $\mu(X) < \infty$ 时各种类型的收敛之间的联系,可用下面的图解表示:



其中向上的箭头表示,可以从依测度收敛的序列中抽取几乎处处收敛的子序列.

在 $\mu(X) = \infty$ 的情形(例如对于在具有勒贝格测度的数轴上的函数),前面所建立的联系已经不成立了. 例如序列

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{n}, & \text{当 } |x| \leqslant n, \\ 0, & \text{当 } |x| > n \end{cases}$$

在整个数轴上一致收敛于函数$f\equiv 0$,然而这个序列既不平均收敛,也不均方收敛. 其次,当$\mu(X)=\infty$时,如我们已经指出过的,由均方收敛(即在L_2中的收敛)不能得出同一序列平均收敛(即在L_1中收敛).

此外我们指出,无论是当$\mu(X)<\infty$,尤其是$\mu(X)=\infty$,一般说来从平均收敛不能推出均方收敛.

§3. L_2中的正交函数系. 按正交系展开的级数

在第三章§4中对欧几里得空间所建立的一般定理告诉我们,在L_2中存在完备正交(特别,标准正交)函数系. 例如,把在那里所叙述的正交化方法应用到某个完备系,便可以得到完备正交系. 如果在L_2中选好某个完备正交系$\{\varphi_n\}$,那么仍然按照第三章§4相应的一般结果,每个元$f\in L_2$可以表为级数和

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n.$$

此级数即函数f关于正交系$\{\varphi_n\}$的傅里叶级数,其中系数c_n是函数f关于系φ_n的傅里叶系数,决定于公式

$$c_n=\frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}\mu\quad\left(\|\varphi_n\|^2=\int\varphi_n^2(x)\mathrm{d}\mu\right).$$

在本节我们研究在空间L_2中最重要的正交系的例子及与此相应的展开.

1. 三角函数系. 傅里叶三角级数　考虑在闭区间$[-\pi,\pi]$上具有通常勒贝格测度的平方可积函数的空间$L_2[-\pi,\pi]$. 在这个函数空间中函数

$$1,\cos nx,\sin nx\quad(n=1,2,\cdots)\tag{1}$$

组成一个完备正交系,称为**三角函数系**. 其正交性易于通过直接计算进行验证,例如,当$n\neq m$时

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\frac{n+m}{2}x+\cos\frac{n-m}{2}x\right]\mathrm{d}x=0$$

等等. 系(1)的完备性可从关于用三角多项式逼近任意连续的周期函数的魏斯特拉斯定理推出①. 系(1)不是标准的. 相应的标准系是由函数

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\quad(n=1,2,\cdots)$$

组成的. 设f是$L_2[-\pi,\pi]$中的函数;它的关于函数$1,\cos nx\ \sin nx$的傅里叶系数通

---

① 在第八章§2我们将证明费耶定理(这个定理是魏斯特拉斯定理的加强). 从而给出三角函数系完备性的证明(当然,这个证明不依靠这里所叙述的事实).

常表为 $a_0/2$，a_n和 b_n. 于是按照傅里叶系数的一般公式，我们有

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \quad 即 \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

及

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

对应的傅里叶级数具有如下形式：

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

且对任意函数 $f \in L_2$，上述级数正是均方收敛于 f. 如果

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

是傅里叶级数的部分和，那么 f 的均方差 S_n 可由公式

$$\|f(x) - S_n(x)\|^2 = \|f\|^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right)$$

求得. 对给定的 n，在所有的三角多项式

$$T_n(n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + \beta_k\sin kx$$

当中，傅里叶级数的部分和 S_n 给出函数 f（在 L_2 的度量下）的最佳逼近. 关于三角函数系的贝塞耳不等式具有如下形式：

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x,$$

但是由于三角函数系是完备的，事实上对 L_2 中的任意函数成立帕塞瓦尔等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

对任意函数 $f \in L_2$，其傅里叶系数的平方构成一个收敛级数. 反之，如果数 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$ 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ 收敛，那么级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

同样（在 L_2 中）收敛，而其和就是以 a_0, a_n, b_n 为傅里叶系数的函数.

所有这些（由第三章§4 的一般结果直接推出的）论断很容易转移到给定在任意长的区间（比如说 $[-l,l]$）上的函数上去. 如果 f 是 $[-l,l]$ 上的平方可和函数，那

么代换 $x=\pi t/l$,即 $t=lx/\pi$ 把 $f(t)$ 变为 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 $f^*(x)=f\left(\frac{lx}{\pi}\right)$.

因此,

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t,n=0,1,\cdots$$

及

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t,n=1,2,\cdots.$$

对给定在长为 $2l$ 的区间上的函数 f,其傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}.$$

注 1　法国数学家傅里叶在他的数学物理方面的工作中,首先在热传导理论中应用了三角级数. 其实,关于 a_n 与 b_n 的公式已为欧拉所发现. 后来,在黎曼、狄利克雷及其他人的工作中,三角级数的理论得到了发展. 最初,术语"傅里叶级数"、"傅里叶系数"等等正是与三角函数系相联系,后来,相当迟才开始在第三章 §4 所叙述的一般意义下使用这些术语(即适用于任意欧几里得空间中的任意正交系).

注 2　从三角函数系的完备性与第三章 §4 的一般定理得知,对于任意 $f\in L_2$,其傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

平均收敛于所给函数 f. 然而,从分析的具体问题的观点来看,更重要的是建立这个级数在另外的意义下收敛的条件(比如说在每点收敛或一致收敛的条件). 在下一章我们研究这一范围的问题.

2. 在闭区间 $[0,\pi]$ 上的三角函数系　函数

$$1,\cos x,\cos 2x,\cdots \tag{2}$$

与

$$\sin x,\sin 2x,\cdots \tag{3}$$

合起来组成闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上的完备正交系. 我们证明这两个系(2)与(3)中每一个在闭区间 $[0,\pi]$ 上都是正交完备的. 正交性可直接计算来验证. 我们来证明系(2)的完备性. 设 f 是在 $[0,\pi]$ 上平方可积的函数. 在半开区间 $[-\pi,0)$ 上用公式

$$f(-x)=f(x)$$

补充定义函数 f,且把它按系

$$1,\cos nx,\sin nx\quad(n=1,2,\cdots)$$

展成傅里叶级数. 由于现已定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 f 是偶函数,它关于正弦的所

有系数为零. 这显然立即可由系数公式看出:对偶函数f,当 $n\geqslant 1$ 时

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\ &= -\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\ &= 0.\end{aligned}$$

换句话说,可以用系(2)的元素的线性组合,以任意精确度,在$[-\pi,\pi]$(从而在$[0,\pi]$)上均方逼近这个函数. 由此得出函数系(2)的完备性. 类似地,可以证明系(3)在$[0,\pi]$上的完备性,这只要先把给定在$[0,\pi]$上的函数f按公式

$$f(-x) = -f(x)$$

奇延拓到半开区间$[-\pi,0)$上. 这样延拓后所得到函数是在$(-\pi,\pi]$上的奇函数,且在此闭区间上只按正弦展开.

3. 复形式的傅里叶级数 如果应用欧拉公式

$$\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} \quad 及 \quad \sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

可以把三角级数紧凑地写出来. 把上述表达式代入傅里叶级数,得

$$\begin{aligned}&\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} - ib_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},\end{aligned}$$

其中 $c_0 = a_0/2$,当 $n\geqslant 1$

$$\begin{cases} c_n = \dfrac{a_n-ib_n}{2} \\ c_{-n} = \dfrac{a_n+ib_n}{2} \end{cases} \tag{4}$$

表达式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

称为**复形式的傅里叶三角级数**. 这个级数的系数 c_n是借助公式(4)由 a_n与 b_n来表示

的;然而,对于它们也很容易写出直接的公式.事实上,直接计算表明

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & 当 \quad n \neq m, \\ 2\pi & 当 \quad n = m. \end{cases}$$

所以,将等式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{5}$$

乘以 $e^{-imx}(m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 并积分之,得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\mathrm{d}x = 2\pi c_m,$$

即

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\mathrm{d}x \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{6}$$

对在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积的复函数,展开式(5)仍然有效.换言之,函数 e^{inx} 在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上模平方可积的复函数空间 $L_2[-\pi,\pi]$ 中构成一组基.这时,表达式(6)正是在这个复空间中 f 与 e^{imx} 的内积.

以函数 $e^{i\frac{n\pi}{l}x}$ 代替 e^{inx},可以把上面说的移植到定义在任意长 $2l$ 的闭区间上的复函数空间 $L_2[-l,l]$ 中去.

4. 勒让德(Legendre)多项式　函数

$$1, x, x^2, \cdots \tag{7}$$

的线性组合就是所有多项式的总合.因此,系(7)在任意闭区间上函数的空间 L_2 中是完备的[①].将系(7)在闭区间 $[-1,1]$ 上按内积

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

正交化,我们得到完备正交系

$$Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \cdots,$$

其中 Q_n 是 n 次多项式.我们来证明,每个多项式 Q_n 如不计常数因子与多项式

$$R_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

是相同的.事实上,一则系 $\{R_n\}$ 是正交的.设 $n \geqslant m$,因为对 $k=0,1,\cdots,n-1$,有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2-1)^n\right|_{x=-1} = \left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2-1)^n\right|_{x=1} = 0.$$

---

① 多项式系在任意闭区间 $[a,b]$ 上平方可积函数的空间 $L_2[a,b]$ 中的完备性,可由魏斯特拉斯定理推出.这个定理是说在闭区间上的任意连续函数可用多项式一致逼近.参看第八章 §2 第2段.

那么，由分部积分，得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} R_m(x)R_n(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(x^2-1)^m \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\mathrm{d}x \\ &= \cdots \\ &= (-1)^n\int_{-1}^{1}\left[\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^m\right](x^2-1)^n\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{8}$$

如果 $m<n$，那么上式中最末一个积分号下恒为零，由此得出系$\{R_n\}$的正交性.

再则，显然多项式 R_n 是 n 次的，即每一个 R_n 属于由系(7)前 $n+1$ 个元所生成的子空间. 于是系$\{R_n\}$与系$\{Q_n\}$都具有下述性质：

1）正交性，

2）系的第 n 个元属于由元 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 生成的子空间.

但是，如不计数值因子，则系的每一个元由这两条性质唯一确定（第三章 §4 定理 1）.

现在来求 $R_n(x)$ 的规范因子. 在 $n=m$ 的情形下，等式(8)给出

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} R_n^2(x)\,\mathrm{d}x &= (-1)^n\int_{-1}^{1}\left[\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^2-1)^n\right](x^2-1)^n\mathrm{d}x \\ &= (2n)!\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1}\text{①}.\end{aligned}$$

换言之，多项式 R_n 的范数等于 $n!\ 2^n\sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$. 于是多项式系

$$\frac{1}{n!2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}R_n(x)$$

不仅是正交的，而且是标准的.

通常研究的不是这些标准多项式而是由公式

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

确定的多项式. 这些多项式称为**勒让德多项式**，而这个公式称为**罗德里格斯(Rodrigues)公式**. 由所进行的计算得：

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当 } n\neq m, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{当 } n=m. \end{cases}$$

我们列出前五个明显的勒让德多项式：

---

① 最后的这个积分，应用递推公式或把它归结为 B－函数，可以用初等方法计算出来.

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}.$$

函数f在闭区间$[-1,1]$上的勒让德多项式的展开具有如下形式：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

其中

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. 乘积正交系. 多重傅里叶级数 设在集合X'与X''上分别定义了测度μ'与μ''. 相应的平方可积函数空间用L'_2与L''_2表示. 在乘积

$$X = X' \times X''$$

中考虑测度

$$\mu = \mu' \otimes \mu'',$$

且用L_2表示与该测度相对应的平方可积函数空间. L_2中的函数写成两个变量的函数.

定理 1 如果$\{\varphi_m\}$与$\{\psi_n\}$分别是L'_2与L''_2中的完备正交系,则所有乘积

$$f_{mn}(x,y) = \varphi_m(x)\psi_n(y)$$

的系是L_2中的完备正交系.

证明 根据富比尼定理(注)

$$\int_X f_{mn}^2(x,y)\,\mathrm{d}\mu = \int_{X'} \varphi_m^2(x)\left(\int_{X''}\psi_n^2(y)\,\mathrm{d}\mu''\right)\mathrm{d}\mu' = 1.$$

如果$m \neq m_1$,则根据同一定理,有

$$\int_X f_{mn}(x,y) f_{m_1 n_1}(x,y)\,\mathrm{d}\mu$$

$$= \int_{X''}\psi_n(y)\psi_{n_1}(y)\left(\int_{X'}\varphi_m(x)\varphi_{m_1}(x)\,\mathrm{d}\mu'\right)\mathrm{d}\mu'' = 0,$$

因为两个变量的函数$f_{mn}(x,y)f_{m_1 n_1}(x,y)$在$X = X' \times X''$可和.

如果 $m=m_1$，而 $n\neq n_1$，则

$$\int_X f_{mn}(x,y)f_{m_1n_1}(x,y)\mathrm{d}\mu$$

$$=\int_{X'}\varphi_m^2(x)\left(\int_{X''}\psi_n(y)\psi_{n_1}(y)\mathrm{d}\mu''\right)\mathrm{d}\mu' = 0.$$

我们来证明系$\{f_{mn}\}$的完备性. 我们假定，在L_2中存在与所有函数f_{mn}正交的函数f. 令

$$F_m(y) = \int_{X'}f(x,y)\varphi_m(x)\mathrm{d}\mu'.$$

易见，函数$F_m(y)$平方可积. 所以$F_m(y)\psi_n(y)$对任何n可积. 再次应用富比尼定理，我们得到

$$\int_{X''}F_m(y)\psi_n(y)\mathrm{d}\mu'' = \int_X f(x,y)f_{mn}(x,y)\mathrm{d}\mu = 0.$$

根据系$\{\psi_n\}$的完备性，由此推出，对于几乎所有y

$$F_m(y) = 0.$$

此时，对所有m，对几乎每一个y成立等式

$$\int_{X'}f(x,y)\varphi_m(x)\mathrm{d}\mu' = 0.$$

根据系$\{\varphi_m\}$的完备性，由此得出，几乎对每一个y，使

$$f(x,y)\neq 0$$

的点x的集合具有零测度. 根据富比尼定理这意味着，在X上，函数$f(x,y)$几乎处处为零.

我们把这个定理应用于某个具体的正交系. 在两个变量的平方可积的函数

$$f(x,y)\quad(-\pi\leqslant x,,y\leqslant\pi)$$

的空间中，系

$$1,\cos mx,\sin mx\quad(m=1,2,\cdots)$$

与

$$1,\cos ny,\sin ny\quad(n=1,2,\cdots)$$

的元素的两两乘积，即函数

$$1,\cos mx,\sin mx,\cos ny,\sin ny,\cos mx\sin ny,$$

$$\cos mx\cos ny,\sin mx\sin ny,\sin mx\cos ny$$

组成一个完备正交系. 相应的傅里叶级数就显得有些烦琐了，所以这里应用指数函数

$$e^{imx}e^{iny}=e^{i(mx+ny)}\quad(n,m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

更为方便. 与这个基相对应的傅里叶级数为

$$f(x,y)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}c_{mn}e^{i(mx+ny)},$$

其中

$$c_{mn}=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)e^{-i(mx+ny)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

勒让德多项式由定义在正方形

$$-1\leqslant x,y\leqslant 1$$

上的函数空间内给出,该多项式

$$Q_{mn}(x,y)=\sqrt{\frac{(2m+1)(2n+1)}{m!n!2^{m+n+1}}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(y^2-1)^n$$

组成完备正交系. 所有上述结果都可以以显然的方式推到多元函数. 特别,对 k 个自变量的函数,傅里叶三角级数具有如下形式

$$f(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{n_1,\cdots,n_k=-\infty}^{\infty}c_{n_1\cdots n_k}e^{i(n_1x_1+\cdots+n_kx_k)},$$

其中

$$c_{n_1\cdots n_k}=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}f(x_1,\cdots,x_k)e^{-i(n_1x_1+\cdots+n_kx_k)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k.$$

6. 关于给定权正交的多项式 对应于闭区间$[-1,1]$上通常的勒贝格测度的内积

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

将函数

$$1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots\tag{9}$$

正交化,我们便得到勒让德多项式. 如果在这个闭区间上给定任何一个别的测度 μ,使得在相应的具有内积 $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}\mu$ 的空间 L_2上,函数(9)是线性无关的,那么对(9)式应用正交化过程以后,我们得到某个多项式系$\{Q_n\}$,一般说来它依赖于测度 μ 的选择. 我们假设测度 μ 对于闭区间$[-1,1]$的勒贝格可测子集由下面的公式定义:

$$\mu(E)=\int_E g(x)\mathrm{d}x,\tag{10}$$

其中 g 是固定的非负可和函数. 正交性条件

$$(Q_m,Q_n)=\begin{cases}1, & 当\ m=n,\\ 0, & 当\ m\neq n\end{cases}$$

在这种情况下记为

$$\int_{-1}^{1}Q_m(x)Q_n(x)g(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}1, & 当\ m=n,\\ 0, & 当\ m\neq n.\end{cases}\tag{11}$$

确定测度(10)的函数 g 称为**权或权函数**. 于是,关于满足条件(11)的诸多项式,说它们是**关于权 g 正交的**. 选择不同的权便得到不同的多项式系. 特别,置

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

我们得到这样的多项式,它与所谓的**契贝谢夫多项式**只差一常数因子. 契贝谢夫多项式由公式

$$T_n(x)=\cos n\arccos x\quad(n=1,2,\cdots)$$

确定,它在各种插值问题中起重要作用.

这些多项式对于权 $1/\sqrt{1-x^2}$ 的正交性易于验证. 事实上,令

$$x=\cos\theta,\mathrm{d}x=-\sin\theta\mathrm{d}\theta,\sqrt{1-x^2}=\sin\theta,$$

我们得到

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos m\theta\cos n\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & 当\ m=n,\\ 0, & 当\ m\neq n.\end{cases}$$

7. 空间 $L_2(-\infty,\infty)$ 与 $L_2(0,\infty)$ 中的正交基 前面我们研究了在闭区间上,即有限测度集合上的正交系. 现在来研究无穷测度,即在整个数轴上平方可积函数的空间 $L_2(-\infty,\infty)$ 的情形. 在此空间中既不能由多项式也不能由三角函数来构造其正交函数系,因为它们都不属于这个空间. 构造 $L_2(-\infty,\infty)$ 中基的"材料"自然应从在无穷远处减少充分快的函数当中去寻求. 特别,将序列

$$x^ne^{-x^2/2}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

正交化后,可以得到这样的基. 事实上,任何形如 $P(x)e^{-x^2/2}$ 的函数显然属于 $L_2(-\infty,\infty)$,其中 P 是多项式,而下面的系(12)的完备性将在第八章§4第3段证明.

对函数 $x^ne^{-x^2/2}$ 应用正交化过程,我们得到形如

$$\varphi_n(x)=H_n(x)e^{-x^2/2}\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{12}$$

的函数系，其中 H_n 是 n 次多项式. 这些多项式称为**埃尔米特多项式**，函数 φ_n 本身称为**埃尔米特函数**. 不难证明埃尔米特多项式与多项式

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

只相差一常数因子. 事实上，多项式 H_n^* 显然是 n 次的，而正交性关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m^*(x) H_n^*(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad (m \neq n)$$

易于从分部积分得出. 根据正交化定理，如不计常数因子仅存在一个形如 $P_n(x)e^{-x^2/2}$ 的正交函数系，其中 P_n 是 n 次多项式.

所得结果可作这样的解释. 考虑直线上具有密度 e^{-x^2} 的测度，即

$$d\mu = e^{-x^2} dx,$$

这是有限测度. 在依此测度平方可积函数的空间中，内积具有如下形式：

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-x^2} dx,$$

而埃尔米特多项式在这个空间中组成正交系.

最后，我们研究在半直线上平方可积函数的空间 $L_2(0,\infty)$. 在这个空间中取函数系

$$x^n e^{-x} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

并对它应用正交化过程以后，我们得到函数系

$$L_n(x) e^{-x},$$

这是所谓的**拉盖尔**(Laguerre)**函数**.

相应的多项式 L_n 称为**拉盖尔多项式**. 拉盖尔多项式可看作按测度

$$d\mu = e^{-x} dx$$

在半直线 $(0,\infty)$ 上平方可积函数空间中的正交基. 在第八章 §4 第 3 段我们将证明拉盖尔函数系在 $L_2(0,\infty)$ 中完备.

8. 关于离散权的正交多项式　设正数 $p_0, p_1, \cdots, p_n$ 是赋予实直线上 $n+1$ 个不同点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的“权”，而测度 μ 由公式

$$\mu(E) = \sum_{x_k \in E} p_k$$

定义，即 $\mu(E)$ 等于含在 E 中的点 x_k 的权之和. 在这里，直线上的任意集合与函数，按这个“退化的”测度是可测的，同时任何不包含点 $x_k (k=0,1,\cdots,n)$ 的任意集合 E 具有零测度. 因而在整个实直线上对函数 f 的积分等于

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k),$$

而内积则由公式

$$(f,g) = \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k) g(x_k)$$

给出. 显然, 如果在所有的点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上

$$f(x_k) = g(x_k)$$

时, 且仅在这种情况下, 函数 f 与 g 按测度 μ 等价.

对于这种退化情形, 在 L_2 中距离下的最佳逼近问题, 归结为确定一和数

$$c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m,$$

使表达式

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \{f(x_k) - \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i(x_k)\}^2$$

取极小值, 即归结为"按最小二乘法插值"的问题.

由于用给定阶的多项式按最小二乘法插值的问题, 契贝谢夫发展了正交多项式的理论. 为了叙述契贝谢夫有关的结果, 我们指出, 系

$$1, x, x^2, \cdots, x^n \tag{13}$$

在我们所说测度 μ 下线性无关, 因为内积 (x^r, x^s) 用公式

$$(x^r, x^s) = \sum_{k=0}^{n} p_k x_k^{r+s}$$

表示, 且系(13)的格拉姆(Gram)行列式是($\sum$是对 k 从 0 到 n 求和)

$$\begin{vmatrix} \sum p_k & \sum p_k x_k & \sum p_k x_k^2 & \cdots & \sum p_k x_k^n \\ \sum p_k x_k & \sum p_k x_k^2 & \sum p_k x_k^3 & \cdots & \sum p_k x_k^{n+1} \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \sum p_k x^n & \sum p_k x_k^{n+1} & \sum p_k x^{n+2} & \cdots & \sum p_k x_k^{2n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sqrt{p_0} & \sqrt{p_1} & \cdots & \sqrt{p_n} \\ \sqrt{p_0}x_0 & \sqrt{p_1}x_1 & \cdots & \sqrt{p_n}x_n \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \sqrt{p_0}x_0^n & \sqrt{p_1}x_1^n & \cdots & \sqrt{p_n}x_n^n \end{vmatrix}^2$$

$$= p_0 p_1 \cdots p_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}^2 \neq 0.$$

反之,当 $r > n$ 时,x^r 与函数系(13)线性相关,因为在此情形下,L_2 的维数为 $n+1$. 所以由正交化过程得正交多项式的有限系

$$P_0, P_1, \cdots, P_n,$$

这些多项式在这样的意义下正交标准化:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k P_r(x_k) P_s(x_k) = \delta_{rs},$$

且每个函数 f 可展成有限项的级数

$$f \sim \sum_{r=0}^{n} c_r P_r,$$

其中

$$c_r = \sum_{k=0}^{n} p_k P_r(x_k) f(x_k).$$

在点 x_k,成立如下等式:

$$f(x_k) = \sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x_k) \quad (k = 0, 1, \cdots, n).$$

即级数的完全和是拉格朗日简单插值多项式. 非完全和

$$Q_m = \sum_{r=0}^{m} c_r P_r \quad (m < n)$$

是在 x_k 点以最佳方法逼近 f 的 m 次多项式,这里的最佳方法的意义是:表达式

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \{ f(x_k) - Q_m(x_k) \}^2$$

对 Q_m 比对任何其他同为 m 次的多项式都小.

9. 哈尔(Haar)系与拉德马赫-沃尔什(Rademacher-Walsh)系 哈尔曾构造如下的在闭区间[0,1]上函数的完备系. 这个系由函数

$$\varphi_0 = 1$$

与系列

$$\varphi_{01}$$

$$\varphi_{11}, \varphi_{12},$$

$$\varphi_{21}, \varphi_{22}, \varphi_{23}, \varphi_{24},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \cdots, \varphi_{n2^n}.$$

组成(第 n 个系列包含 2^n个函数),其中

$$\varphi_{01} = \begin{cases} +1, & 0 < x < 1/2, \\ -1, & 1/2 < x < 1, \end{cases}$$

$$\varphi_{11} = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 < x < 1/4, \\ -\sqrt{2}, & 1/4 < x < 1/2, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases} \quad \varphi_{12} = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1/2, \\ \sqrt{2}, & 1/2 < x < 3/4, \\ -\sqrt{2}, & 3/4 < x < 1. \end{cases}$$

一般,令

$$\varphi_{ni} = \begin{cases} 2^{n/2}, & \frac{i-1}{2^n} < x < \frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \\ -2^{n/2}, & \frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{i}{2^n}, \\ 0, & x \notin \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right] \end{cases}$$

$$(n = 0,1,2,\cdots; i = 1,2,\cdots,2^n)$$

(在间断点,函数值可取任意值). 易见,所构造的系是标准正交的. 我们来证明这个系的完备性.

将闭区间[0,1]分成 2^{n+1} 个相等的区间 Δ_i,考虑在每个区间 Δ_i上保持常值的函数的集合 M_{n+1}. 显然,M_{n+1}是 2^{n+1}维的线性子空间. 此外,这个系中直到第 n 个系列所有的函数都包含在 M_{n+1}当中. 因为根据我们讨论的系的标准正交性,这些函数是线性无关的. 又因其个数为

$$1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1},$$

于是函数 φ_0与 $k=0,1,\cdots,n$ 的诸系列的函数 φ_{ki}在 M_{n+1}中组成线性无关向量的一个完备系. 由此考虑到任意连续函数可用 M_{n+1}(n 充分大)中的函数任意准确地逼近. 我们证明了这个系的完备性.

我们再研究闭区间[0,1]上另一个标准正交函数系的例子,这个例子是属于拉德马赫的. 置

$$\varphi_m = (-1)^{[2^m x]}.$$

换句话说,函数 φ_m是由下述方法得到的:把闭区间[0,1]分成 2^m 个相等的部分 Δ_i,同时在区间 Δ_i($i=1,2,\cdots,2^m$)上函数 φ_m轮流取值 +1 与 −1.

系

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots \tag{14}$$

的标准正交性是显然的. 这个系不完备. 例如,从函数

$$\varphi_{12} = \varphi_1\varphi_2 = \begin{cases} 1, & \text{如}\, 0 < x < 1/4 \text{或} 3/4 < x < 1, \\ -1, & \text{如}\, 1/4 < x < 3/4 \end{cases}$$

与系(14)的所有函数正交即可推出这一点. 然而在(14)中添加形如

$$\varphi_{m_1 m_2 \cdots m_k} = \varphi_{m_1}\varphi_{m_2}\cdots\varphi_{m_k} \quad (0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_k) \tag{15}$$

的函数以后,可将其扩充成完备标准正交系.

这样扩充的函数系称为拉德马赫 - 沃尔什系,它显然仍是标准正交的. 此外,这个函数系已是完备的. 这一点的证明与哈尔函数系完备性的证明类似.

第八章　三角级数. 傅里叶变换

§1. 傅里叶级数收敛的条件

1. 傅里叶级数在一点收敛的充分条件　我们仍研究在闭区间$[-\pi,\pi]$上平方可和函数空间$L_2[-\pi,\pi]$. 如同在第七章已经证明过的,这个空间是完备的无穷维欧几里得空间,即希尔伯特空间. 诸函数

$$1,\cos nx,\sin nx \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1}$$

在这个空间中构成完备正交系,所以对于每一个函数$f\in L_2[-\pi,\pi]$,傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{2}$$

均方收敛于f,也就是在空间$L_2[-\pi,\pi]$的度量下收敛于f,其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x,b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x. \tag{3}$$

然而,由于傅里叶级数在数学物理问题及其他问题中的应用,确定保证傅里叶级数不仅仅是平均收敛于f,而且在已知点、处处收敛或者甚至是一致收敛于f的条件是重要的. 我们现在就来建立三角级数在已知点收敛的充分条件. 我们先作某些初步的讨论.

代替给定在闭区间$[-\pi,\pi]$上的函数,我们可以谈论整个实轴上以2π为周期的周期函数,因为每一个给定在闭区间上的函数都可以作周期延拓①. 其次,构成三

① 如果必要,以等价的函数代替$f(x)$以后,我们可以认为$f(-\pi)=f(\pi)$.

角函数系的函数是有界的，所以按这个函数系确定傅里叶系数的公式(3)对任意可和函数有意义[①](而不仅是对平方可和函数有意义). 于是，与每个函数$f \in L_1[-\pi,\pi]$相对应的，是其傅里叶系数的全体和它的傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

现在转向这个级数在已知点 x 收敛于函数f在这点的值的问题. 令

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \tag{4}$$

在(4)式中以积分表达式(3)代换系数 a_k与 b_k以后，我们首先变换 $S_n(x)$. 积分变量用 t 表示，我们得到

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt\right\}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right\}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

利用熟知的公式[②]

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cdots + \cos nu = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}u}{2\sin \frac{u}{2}}, \tag{5}$$

则有

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin \frac{t-x}{2}}\mathrm{d}t. \tag{6}$$

这个表达式 $S_n(x)$及它的各种变形称为**狄利克雷积分**.

令 $t-x=z$，作代换. 由于在(6)式中积分号下是以 2π 为周期的周期函数，该函数在任何长为 2π 的区间上的积分有同样的值. 所以，当对 z 取积分时，我们可以保留原来的积分限 $-\pi$ 与 π. 我们得到

---

① 当然，这时对任意可和函数，关于级数(2)的收敛性我们不作任何判断.

② 为了得到这个公式，只需将下列等式求和：

$$\sin\frac{u}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{u}{2},$$

$$\sin\frac{3u}{2} - \sin\frac{u}{2} = \cos u \cdot 2\sin\frac{u}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\frac{2n+1}{2}u - \sin\frac{2n-1}{2}u = \cos nu \cdot 2\sin\frac{u}{2}.$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\mathrm{d}z.$$

函数

$$D_n(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}$$

称为**狄利克雷核**. 从等式(5)立即可见,对任何 n

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\,\mathrm{d}z = 1.$$

利用这个等式,我们把差 $S_n(x)-f(x)$ 写成如下形式:

$$S_n(x)-f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+z)-f(x)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}\mathrm{d}z. \tag{7}$$

于是,我们把 $S_n(x)$ 收敛于 $f(x)$ 的问题归结为积分(7)趋于零的问题. 这个积分的研究依靠如下引理.

引理 1 如果函数 φ 在闭区间 $[a,b]$ 上可和,则

$$\lim_{p\to\infty}\int_b^a \varphi(x)\sin px\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明 如果 φ 是连续可微函数,那么借助于分部积分,当 $p\to\infty$ 时,有

$$\int_a^b \varphi(x)\sin px\,\mathrm{d}x = -\varphi(x)\frac{\cos px}{p}\Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x)\frac{\cos px}{p}\mathrm{d}x \to 0. \tag{8}$$

现在设 φ 是 $[a,b]$ 上任意可和的函数. 由于连续可微函数在 $L_1[a,b]$ 内处处稠密,对于任意 $\varepsilon>0$,可找到这样的连续函数 φ_ε,使得

$$\int_a^b |\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

其次,有

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b \varphi(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right| \\ \leqslant &\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\sin px\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

由于(9)式,右边第一项小于 $\varepsilon/2$;而根据(8)式,当 $p\to\infty$ 时第二项趋于零.

引理证毕.

现在,我们可容易地证明下述傅里叶级数收敛的充分条件.

定理 1　如果f是可和函数,且对固定的x与某个$\delta>0$,积分

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|\mathrm{d}t \tag{10}$$

存在,那么函数f的傅里叶级数的部分和S_n在这一点x收敛于$f(x)$.

证明　把积分(7)改写成如下形式:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}\sin\frac{2n+1}{2}z\mathrm{d}z. \tag{11}$$

如果函数

$$\frac{f(x+z)-f(x)}{z}$$

在从$-\delta$到δ的范围内(对z)可积,那么它在整个闭区间$[-\pi,\pi]$上可积(因为$f\in L_1[-\pi,\pi]$). 于是函数

$$\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\cdot\frac{z}{2\sin(z/2)}$$

也可积. 所以可把引理 1 应用于积分(11),于是便得知,当$n\to\infty$时积分(11)趋于零.

注 1　积分(10)的收敛性称为**迪尼(Dini)条件**. 特别,如果在给定点x,函数f连续且有有限导数或者至少有左导数和右导数,那么就满足迪尼条件.

如果要求下列两积分

$$\int_{-\delta}^{0}\frac{f(x+z)-f(x-0)}{z}\mathrm{d}z\quad 与\quad\int_{0}^{\delta}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\mathrm{d}z \tag{12}$$

收敛以代替迪尼条件,那么定理 1 的证明中的论证仍然有效,其中$f(x-0)$与$f(x+0)$分别是函数f在点x的左极限与右极限(假定x是f的第一类间断点). 事实上,差

$$S_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

可表为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x+z)-f(x-0)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin(z/2)}\mathrm{d}z$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+z)-f(x+0)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin(z/2)}\mathrm{d}z;$$

在积分(12)存在的条件下,当 $n\to\infty$ 时,这些表达式趋于零. 由此可推出傅里叶级数"全局"收敛性的充分条件,即通常在分析教程中所提出的充分条件:

设 f 是周期为 2π 的有界函数,它仅仅有第一类间断点,且设 f 在每一点有左、右导数①. 那么它的傅里叶级数处处收敛,而在连续点级数和等于 $f(x)$,在间断点等于 $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$.

注 2 在我们的论述中起重要作用的狄利克雷核 $D_n(z)$ 是这样一个函数:它在点 $z=0$ 取值 $\frac{2n+1}{2\pi}$,对于大的 n 值它快速振动(图 22). 由于这种情况,对于大的 n,在积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_n(z)\,\mathrm{d}z$$

中的基本"贡献"仅由点 x 的一个任意小的邻域给出. 对于满足迪尼条件的函数,当 $n\to\infty$ 时这一"贡献"趋于 $f(x)$. 可以说,在可展成收敛的傅里叶级数的函数 f 的集合上,狄利克雷核 D_n 在某种意义上构成收敛于 δ - 函数的泛函序列.

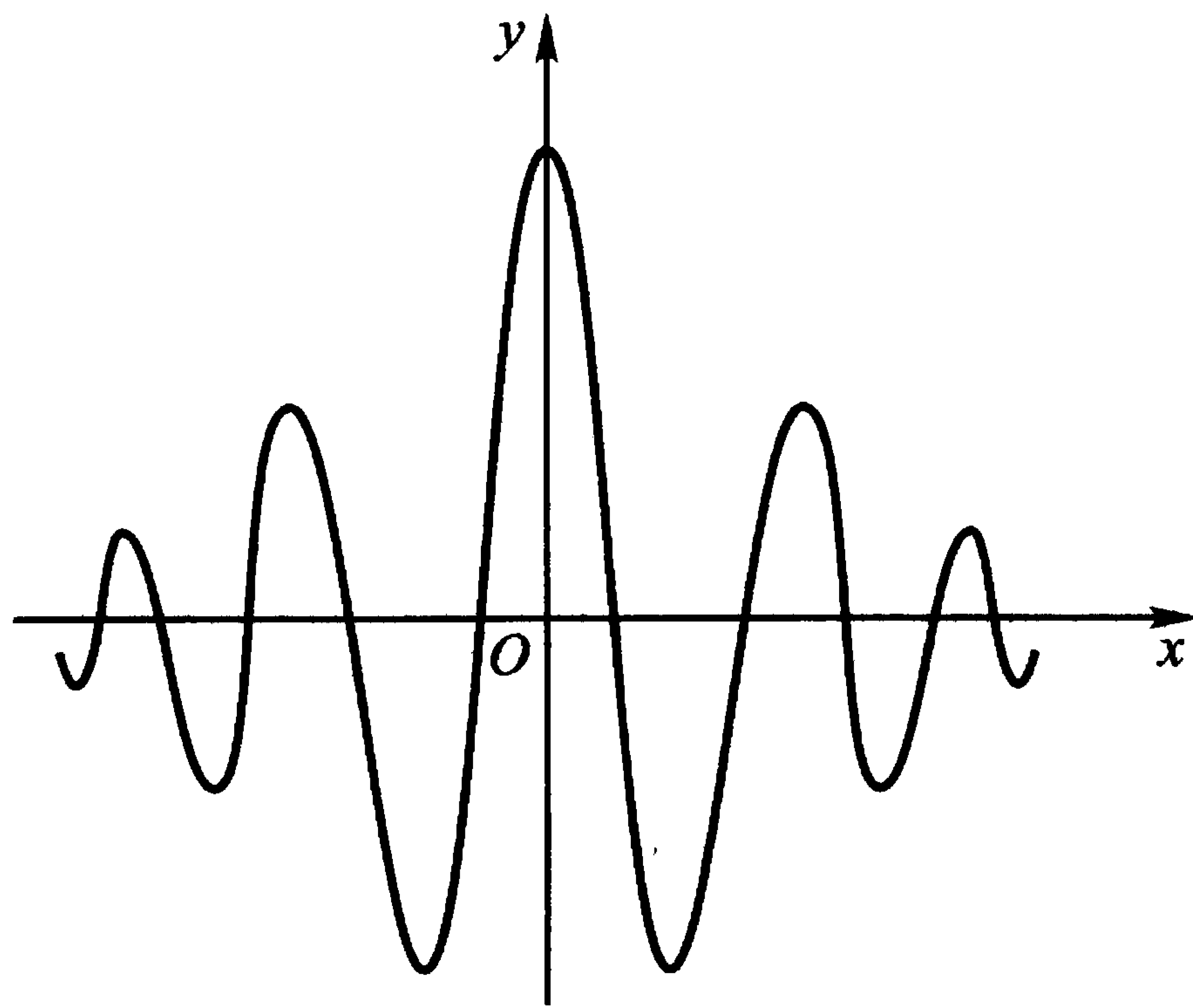


图 22

显然,在通常收敛的意义上,序列 $\{D_n\}$ 不趋于任何极限,所以,研究积分(7),我们不能应用任何关于在积分号下取极限的标准定理.

注 3 保证傅里叶级数收敛的迪尼条件可以用其他条件代替,但是在定理 1 中简单地抛弃这一条件是不行的. 实际上,甚至在连续函数当中存在这样的函数,其傅里叶级数在某些点发散. 在可和函数当中存在这样的函数,其傅里叶级数处处发散(柯尔莫戈洛夫). 还在 1915 年,鲁金(Лузин)便提出下述问题:在 L_2 中是否存在这样的函数,其傅里叶级数在正测度集上发散? 如同卡尔列松(Карлесон)所证明的(1966 年),不存在这样的函数.

从关于泛函弱收敛的一般定理(第四章 §3 第 3 段)易于推出:存在这样的连续函数,其傅里叶级数不是在所有的点上都收敛. 我们首先指出,当 $n\to\infty$ 时

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(z)|\,\mathrm{d}z\to\infty. \tag{13}$$

实际上,分式

① 在第一类间断点,左、右导数分别理解为

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h} \text{ 及 } \lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}.$$

$$|D_n(z)| = \frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}z\right|}{2\pi\left|\sin\frac{z}{2}\right|}$$

的分子在满足

$$\frac{2n+1}{2}z = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, k = 0,1,\cdots,n \tag{14}$$

的点 z 变为 1. 用开区间

$$\left|\frac{2n+1}{2}z - \frac{2k+1}{2}\pi\right| < \frac{\pi}{3} \tag{15}$$

围住每一个由条件(14)确定的点. 任意一个这样的区间长显然等于$\frac{4\pi}{3(2n+1)}$. 在每一个这样的开区间内$\left|\sin\frac{2n+1}{2}z\right|$不小于 1/2. 我们在第 $k(k=0,1,\cdots,n)$ 个开区间上估计量 $\sin\frac{z}{2}$. 我们有

$$\sin\frac{z}{2} < \frac{z}{2} < \frac{1}{2}\left(\frac{2k+1}{2}\pi + \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{-1} < \frac{k+1}{2n+1}\pi.$$

所以,仅仅在由条件(15)确定的区间上,$|D_n(z)|$的积分大于和

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{k+1}{2n+1}\pi}\frac{4\pi}{3(2n+1)} = \frac{1}{3\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

这个和当 $n\to\infty$ 时趋于∞. 由此推出关系式(13). 此关系式表明,泛函 D_n 在连续函数空间的范数总体上是无界的. 于是根据泛函弱收敛的定理,这个函数序列在连续函数空间中不可能是弱收敛的,即存在这样的连续函数f,对于它

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

不存在.

2. 傅里叶级数一致收敛的条件　我们建立了某一函数 f 的傅里叶级数在每一个点收敛的充分条件. 满足这些条件的函数类是很广泛的,甚至对用处处收敛的三角级数的和表示函数,连续性也是完全不必要的. 如果我们对傅里叶级数一致收敛的条件感兴趣,那么情况就不同了. 显然,如果函数 $f(x)$ 即使只有一个间断点,那么它的傅里叶级数便不可能一致收敛于这个函数,因为连续函数的一致收敛级数的和函数一定连续. 于是函数的连续性是其傅里叶级数一致收敛的必要(当然不是充分的)条件.

下述定理给出了简单的充分条件.

定理 2 如果以 2π 为周期的函数 f 绝对连续，而其导数 f' 属于 $L_2[-\pi,\pi]$，那么函数 f 的傅里叶级数在整个数轴上一致收敛于 f.

证明 以 a'_n 和 b'_n 表示函数 f' 的傅里叶系数，因为 f 绝对连续，则可对积分

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

应用分部积分公式. 得到

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}f(x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{b'_n}{n}; \end{aligned}$$

同样，有

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{a'_n}{n}.$$

因此，

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|b'_n|}{n} + \frac{|a'_n|}{n}\right). \tag{16}$$

因为

$$\frac{|b'_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(b'^2_n + \frac{1}{n^2}\right), \frac{|a'_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a'^2_n + \frac{1}{n^2}\right),$$

而根据贝塞耳不等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b'^2_n + a'^2_n) < \infty$，数值级数(16)显然是函数 f 的傅里叶级数的强级数. 于是，根据魏斯特拉斯判别法，函数 f 的傅里叶级数一致(且绝对)收敛. 余下要证明的是这个级数和为 f. 设 φ 是函数 f 的傅里叶级数和，则 φ 与 f 有同样的傅里叶系数. 由此根据两个函数的连续性我们得到 $f=\varphi$.

可以给出与迪尼条件类似的傅里叶级数一致收敛的其他条件，即

定理 3 如果在某个集 $E\subset[-\pi,\pi]$ 上可和函数 f 有界，而迪尼条件在 E 上一致成立，即对任意 $\varepsilon>0$，存在这样的 $\delta>0$，使得对所有 $x\in E$ 有

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|f(x+z)-f(x)|}{|z|}\mathrm{d}z < \varepsilon,$$

那么函数 f 的傅里叶级数在 E 上一致收敛于这个函数.

这个定理的证明基于如下引理，它是引理 1(参看第 1 段)的加强.

引理 2 如果 B 是在 $L_1[-\pi,\pi]$ 度量下准紧的可和函数集，那么对任意的 $\varepsilon>0$，可找到这样的 $N=N(\varepsilon)$，使得

$$\left|\int_a^b f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$$

当 $\lambda \geqslant N(\varepsilon)$ 时对所有的 $f \in B$ 同时成立.

为了证明引理,在 B 中取有限的 $\varepsilon/2$ - 网 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 并选取 N,使得当 $\lambda \geqslant N$ 时

$$\left|\int_a^b \varphi_i(t) \sin \lambda t \mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

如果现在 f 是 B 中的任意一个函数,那么对某个 i

$$\| f - \varphi_i \| < \varepsilon/2,$$

因而

$$\left|\int_a^b f(t) \sin \lambda t \mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^b \varphi_i(t) \sin \lambda t \mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b (f - \varphi_i) \sin \lambda t \mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

这样就证明了引理.

容易验证,由于定理 3 中的条件,函数集

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

是准紧的,基于此可应用上述引理. 进一步证明的细节我们留给读者.

到目前为止我们谈的是给定在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上的函数. 显然,所论述的一切都可自然地移植到定义在任意长 $2l$ 的闭区间上的函数上去.

对于多变量的情形,同样可以讨论傅里叶级数在每一点收敛的充分条件,也可以讨论傅里叶级数一致收敛的条件. 我们就不停留在这个问题上了.

§2. 费耶(Fejér)定理

1. 费耶定理 设 f 是数轴上以 2π 为周期的连续函数. 这个函数由其傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

唯一确定. 实际上,如果 f_1 与 f_2 是两个具有相同的傅里叶系数的连续函数,那么 $f_1 - f_2$ 是几乎处处等于零的连续函数,从而恒等于零. 然而,由于连续函数的傅里叶级数一般说来不一定收敛,这样的函数 f 不能由直接求它的傅里叶级数和来得到. 下面的定理给出了由一个连续函数的傅里叶级数得到这个连续函数的方法. 这个定理是在 1905 年由费耶证明的.

设

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} a_j \cos jx + b_j \sin jx \tag{2}$$

是函数 f 的傅里叶级数的部分和. 令

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)}{n}. \tag{3}$$

表达式 σ_n(即和 S_k 的算术平均值)称为函数 f 的**费耶和**.

定理 1(费耶)　如果 f 是以 2π 为周期的连续函数,那么 f 的费耶和的序列 $\{\sigma_n\}$ 在整个数轴上一致收敛于 f.

证明　利用上一节所得到的傅里叶级数部分和的积分表达式

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\frac{2k+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\mathrm{d}z.$$

将这个表达式代入等式(3),就得到 $\sigma_n(x)$ 的下面的表达式:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}\right\}f(x+z)\mathrm{d}z.$$

借助于公式①

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)z = \frac{\sin^2 nz}{\sin z}$$

可将上述表达式表成所谓的**费耶积分**:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2 f(x+z)\mathrm{d}z. \tag{4}$$

表达式

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\sin n\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right]^2 \tag{5}$$

称为**费耶核**. 公式(4)可以改写成

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\Phi_n(z)\mathrm{d}z. \tag{6}$$

我们必须证明,当 $n\to\infty$ 时上式一致地趋于 $f(x)$. 我们预先指出费耶核的如下性质:

---

①　将等式

$$2\sin(2k+1)z\cdot\sin z = \cos 2kz - \cos 2(k+1)z$$

对 k 求和很容易得到这个公式.

1)　　$$\Phi_n(z) \geqslant 0,$$

2)　　$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)\,\mathrm{d}z = 1,$$

3) 对任意固定的 $\delta > 0$, 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(z)\,\mathrm{d}z = \eta_n(\delta) \to 0.$$

其中第一个性质是显然的; 如果令 $f(x) \equiv 1$, 并考虑到这时对任意 n, $\sigma_n(x) \equiv 1$, 那么从(6)式便可得出第二个性质; 最后, 如果 $\delta < z \leqslant \pi$, 那么 $\sin \dfrac{z}{2} \geqslant \dfrac{2\delta}{\pi}$, 因而

$$\left(\frac{\sin n \dfrac{z}{2}}{\sin \dfrac{z}{2}} \right)^2 \leqslant \left(\frac{\pi}{2\delta} \right)^2,$$

立刻由此得出第三个性质. 考虑到费耶核的这些性质, 便不难证明定理了. 因为 f 是周期连续函数, 故 f 在数轴上有界且一致连续. 换句话说, 存在这样的常数 M, 使得对所有的 x 有

$$|f(x)| \leqslant M \tag{7}$$

且对任意 $\varepsilon > 0$ 可以找到这样的 $\delta > 0$, 使得当

$$|x'' - x'| < \delta$$

时

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon/2. \tag{8}$$

为了证明定理我们必须估计差

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+z)]\,\Phi_n(z)\,\mathrm{d}z,$$

它可以表为如下三个积分的和:

$$J_- = \int_{-\pi}^{-\delta} \{f(x) - f(x+z)\}\,\Phi_n(z)\,\mathrm{d}z,$$

$$J_0 = \int_{-\delta}^{\delta} \{f(x) - f(x+z)\}\,\Phi_n(z)\,\mathrm{d}z,$$

$$J_+ = \int_{\delta}^{\pi} \{f(x) - f(x+z)\}\,\Phi_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

由(7)与(8)可直接得出如下估计:

$$|J_-| \leqslant 2M\eta_n(\delta),$$

$$|J_+| \leqslant 2M\eta_n(\delta),$$

$$|J_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(z)\,\mathrm{d}z < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在选取 n_0 使其这样大,使得对于 $n \geqslant n_0$ 及对给定的 δ,等式

$$2M\eta_n(\delta) < \varepsilon/4$$

成立. 于是

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon,$$

由此根据 ε 的任意性便可推出定理的论断.

我们指出,在证明中我们仅仅利用了费耶核的性质 1)—3). 这便能够得到定理 1 的各种推广(特别,可参看本节第 3 段).

2. 三角函数系的完备性. 魏斯特拉斯定理 由费耶定理可推出三角函数系在空间 $L_2[-\pi,\pi]$ 的完备性. 事实上,根据这个定理,任意连续函数是一致收敛(也是平均收敛)的三角多项式序列 σ_n 的极限. 留待证明的是连续函数在 L_2 中处处稠密. 费耶定理,可以看作以三角多项式逼近连续函数的魏斯特拉斯定理的加强:后一定理断言,所有的连续函数都是某一三角多项式序列的一致极限,而费耶定理却指出完全确定的具有这一性质的序列——费耶和(3)的序列. 从以三角多项式一致逼近连续的周期函数的魏斯特拉斯定理易于推出,魏斯特拉斯第二定理——关于以代数多项式逼近在某个闭区间 $[a,b]$ 上的任意连续函数的定理. 事实上,如果 $f(x)$ 是这样的函数,那么令

$$t = \frac{x-a}{b-a}\pi,$$

即 $x = \dfrac{t(b-a)}{\pi} + a$,我们得到 t 的函数 $\varphi(t)$,该函数给定在 $[0,\pi]$ 上. 置 $\varphi(-t) = \varphi(t)$,首先把这所得函数延拓到半闭区间 $[-\pi,0)$ 上,而后将其按周期性延拓到整个数轴上. 现在构造三角多项式 T_n 使其满足条件

$$|T_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon/2 \quad (\text{对所有的 } t).$$

其次,将所有的三角多项式展开成在任意有限区间上一致收敛的泰勒级数. 设 P_m 是 T_n 的泰勒级数的部分和,使得当 $0 \leqslant t < \pi$ 时

$$|T_n(t) - P_m(t)| < \varepsilon/2.$$

于是当 $0 \leqslant t \leqslant \pi$ 时

$$|\varphi(t) - P_m(t)| < \varepsilon.$$

在 $P_m(t)$ 中作逆代换 $t = \dfrac{x-a}{b-a}\pi$ 以后,我们得到多项式 $Q_m(x)$,该多项式满足如下条件:当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时

$$|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon.$$

3. 空间 L_1 中的费耶定理　在费耶定理中,达到了定理的条件与结论之间的某种对称性. 由函数 f 属于连续函数的空间 $C[-\pi,\pi]$ 得出,与 f 对应的费耶和在同一空间 $C[-\pi,\pi]$ 的度量下收敛于 f. 对于其他泛函空间可得到类似的定理,特别对于空间 $L_1[-\pi,\pi]$ 是这样. 确切地说,成立如下定理,自然地称之为**可和函数的费耶定理**:

如果 f 是闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上的可和函数,那么它的费耶和依空间 $L_1[-\pi,\pi]$ 的范数收敛于函数 f.

这个论断的证明可借助类似于第 1 段中所阐述的论证而得到. 我们在这里就不进行讨论了,但是指出由可和函数的费耶定理推出的如下重要事实.

所有的可和函数由其傅里叶系数唯一地(如将等价函数视为同一函数)确定.

实际上,设 f 与 g 是两个具有相同傅里叶系数的可和函数,那么函数 $f-g$ 的所有傅里叶系数等于 0. 因此 $f-g$ 的所有费耶和都恒等于 0. 于是在 L_1 中这些和的极限,即函数 $f-g$,几乎处处为零.

§ 3. 傅里叶积分

1. 基本定理　在 § 1 中建立了使周期函数可展成收敛的傅里叶级数的条件,即表成简谐振动迭加的条件. 我们现在试图把这一结果移植到非周期函数上. 我们看到,在相当一般的补充条件下,这样的表示是可能的,但是已经不是借助于级数,而是借助于积分,即所谓的**傅里叶积分**.

我们从提示性的考虑开始. 设函数 f 在每一个有限的区间满足保证把它展成傅里叶级数的条件. 换句话说,f 在任意一个有限区间可和且在每一个点满足迪尼条件. 比方说,在闭区间 $[-l,l]$ 上考虑 f,我们可以写出这个函数的傅里叶展式:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{1}$$

在此式中,若将 a_k 与 b_k 的表达式换成

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,\mathrm{d}t,\quad a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi}{l}t\,\mathrm{d}t,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi}{l}t\,\mathrm{d}t,$$

则得到

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{k\pi}{l}t\,\mathrm{d}t\right.\\&\left.+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}t\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,\mathrm{d}t\\&+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\left[\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{k\pi}{l}t+\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}t\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

即

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

我们再作一个关于函数 f 的补充假定:设这个函数在整个数轴上绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{3}$$

现在,在等式(2)中令 $l\to\infty$ 而取极限(暂时还纯粹是形式地取极限). 根据(3)式,等式(2)右端第一项当 $l\to\infty$ 时趋于零. 如果置 $\lambda_k = k\pi/l, \Delta\lambda = \pi/l$,则第二项可看作函数

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda(t-x)\,\mathrm{d}t$$

的积分

$$\int_0^{\infty} F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

的积分和(但只是展布在无穷区间上). 所以在(2)式中,当 $l\to\infty$ 时,形式的极限过程导致等式

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

这就是所求的表达式. 引入记号

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t, b_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t,$$

则等式(4)可改写成如下类似于傅里叶级数的形式:

$$f(x) = \int_0^{\infty}(a_\lambda\cos\lambda x + b_\lambda\sin\lambda x)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{5}$$

借助于形式极限过程,我们得到了等式(4),即所谓的**傅里叶公式**. 可以证明这个极限过程的正确性(在前面对 f 所作的假定下),然而更简单的是直接证明等式(4). 这样,我们来证明下述定理.

定理 1 如果函数 f 在整个数轴上绝对可积且在点 x 处满足迪尼条件,那么等式

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,\mathrm{d}t$$

成立.

证明 记

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^{A}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

我们需要证明$\lim\limits_{A\to\infty}J(A)$存在且等于$f(x)$. 因为$f$绝对可积,(6)式中内层积分收敛,而二重积分绝对收敛. 利用富比尼定理,在累次积分(6)中改变积分次序:

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{0}^{A}f(t)\cos\lambda(t-x)\,\mathrm{d}\lambda$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\frac{\sin A(t-x)}{t-x}\mathrm{d}t.$$

应用代换$t-x=z$,把这个积分变成如下形式:

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+z)\,\frac{\sin Az}{z}\mathrm{d}z. \tag{7}$$

根据熟知的等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Az}{z}\mathrm{d}z=1\quad(A>0),$$

可以把差$J(A)-f(x)$记成

$$J(A)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Az\mathrm{d}z \tag{8}$$

的形式.

把右端的积分表为三项的和.

$$J(A)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Az\mathrm{d}z$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{|z|\geqslant N}\frac{f(x+z)}{z}\sin Az\mathrm{d}z-\frac{f(x)}{\pi}\int_{|z|\geqslant N}\frac{\sin Az}{z}\mathrm{d}z.$$

右端的第二、三两项是收敛积分,如果N取得充分大,这两项中的每一个都可以变得小于$\varepsilon/3$. 右端的第一项(当N固定),当$A\to\infty$时(由于§1引理1与迪尼条件)趋于零. 于是有

$$\lim_{A\to\infty}(J(A)-f(x))=0.$$

这就是所要证明的.

2. 复形式的傅里叶积分　在傅里叶积分公式(4)中内层积分是λ的偶函数,故可把这个公式改写成

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

其次,由函数f绝对可积推知,积分$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda(t-x)\,\mathrm{d}t$存在且是$\lambda$的奇函数. 所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda(t-x)\,\mathrm{d}t=0 \tag{10}$$

$\left(\text{如果对 } \lambda \text{ 的积分理解为主值,即} \lim\limits_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\right)$. 把等式(10) 乘以 $-i$,加到(9) 式上,得到

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda(t-x)}\mathrm{d}t.$$

这个等式称为**复的傅里叶公式**.

§4. 傅里叶变换,它的性质与应用

1. 傅里叶变换与反演公式 傅里叶积分公式可以拆成两个等式. 置

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

那么

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda. \tag{2}$$

我们指出,公式(1)对任何绝对可积的函数f都有意义. 于是我们借助于公式(1)可使每一个函数$f\in L_1(-\infty,\infty)$对应于一个给定在整个数轴上的确定函数g. 函数g称为原函数f的**傅里叶变换**. 通过其傅里叶变换表示f的公式(2)称为傅里叶变换的**反演公式**. 应当注意公式(1)与(2)之间的相似之点. 第二个公式与第一个公式的区别,仅在于指数的符号与积分号前的因子$1/(2\pi)$. 用公式

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x \tag{1'}$$

确定了g,就可以使这里的公式变得更为对称. 那么反演公式取如下形式:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda, \tag{2'}$$

即与(1′)不同仅在于其指数函数的指数符号.

然而,在外形相似的同时,公式(1)与公式(2)在本质上是不同的:在第一个公式中,积分是在通常的意义下存在(因为$f\in L_1(-\infty,\infty)$),而在第二个公式中,一般只是在主值意义下存在. 此外,公式(1)是函数g的定义,而作为傅里叶积分公式的另一种记法的公式(2)包含着这样的论断:位于右边的积分等于原函数f. 正如我们以前所见到的,为了保证对f的这个等式,除去可积性之外,还需添加补充条件,例如迪尼条件.

注 我们对所有$L_1(-\infty,\infty)$中的函数f定义了傅里叶变换g,并且指出了,在每一点满足迪尼条件的函数f,可以借助于反演公式由其傅里叶变换g表示出来. 这个情况与傅里叶级数的情况完全类似. 事实上,**傅里叶系数**

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

对所有的$f \in L_1[-\pi,\pi]$是确定的,然而**傅里叶级数**(这里起反演公式的作用)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

的收敛性仅在某些补充条件(迪尼条件)下可以得到保证. 同时,对于傅里叶变换(如同对于傅里叶级数,见§2末尾)有如下事实:如果对函数$f \in L_1(-\infty,\infty)$,有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x \equiv 0,$$

那么$f(x)=0$几乎处处成立.

事实上,从前面所叙述的等式推出:对所有的实数t与λ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x = 0.$$

现在令

$$\varphi(x) = \int_0^{\xi} f(x+t)\mathrm{d}t,$$

其中ξ是任意固定的实数. 应用富比尼定理并利用加在f上的条件,易见函数φ(它如同f一样属于$L_1(-\infty,\infty)$)对所有的实数λ满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x = 0.$$

但是容易看到,函数φ在每一个有限闭区间上绝对连续,因此几乎处处具有有限导数. 特别,这个函数几乎处处满足迪尼条件. 所以根据§3定理1,这个函数几乎处处为零,因为它的傅里叶变换恒等于零. 由于φ连续,所以$\varphi(x)\equiv 0$. 特别由此推出,对任意实数ξ,

$$\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

因此$f(x)=0$几乎处处成立.

现在来看一些例子.

例 1　设$f(x)=e^{-\gamma|x|}$,$\gamma>0$. 我们来求这个函数的傅里叶变换. 有

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|}e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|}(\cos\lambda x - i\sin\lambda x)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\infty} e^{-\gamma x}\cos\lambda x\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

用两次分部积分得到

$$g(\lambda)=\frac{2\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}.$$

例 2 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & 当\ |x|\leqslant a,\\ 0, & 当\ |x|>a.\end{cases}$$

那么

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}=\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}.$$

(应当注意,这里函数 g 不属于 $L_1(-\infty,\infty)$.)

例 3 设$f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$. 则

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}. \tag{3}$$

应用留数定理,这个积分可最简单地算出. 首先设 $\lambda>0$. 若以位于下半平面上(这里 $e^{-i\lambda x}$在无穷远点趋于零)、半径为无穷大的圆扩充(3)中的积分区域(即实轴),那么积分(3)等于被积函数在下半平面的留数之和乘以$(-2\pi i)$. 在下半平面,函数 $\frac{e^{-i\lambda x}}{x^2+a^2}$在点 $x=-ai$ 有一个一阶极点. 在这一点的留数按已知的公式求出:如果$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$且 $\varphi(a)\neq 0$,而 $\psi(z)$ 在点 $z=a$ 有一阶零点,那么函数 f 在 a 点的留数等于 $\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$. 所以当 $\lambda>0$ 时,有

$$g(\lambda)=-2\pi i\frac{e^{-a\lambda}}{-2ai}=\frac{\pi}{a}e^{-a\lambda}.$$

当 $\lambda<0$ 时(代替下半平面,我们仅研究上半平面)我们得到

$$g(\lambda)=\frac{\pi}{a}e^{a\lambda}.$$

这样,最后

$$g(\lambda)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\lambda|}\quad(-\infty<\lambda<\infty).$$

其实,利用 §3 定理 1 与例 1,从反演公式立即可得这一结果.

例 4 置$f(x)=e^{-ax^2}$. 我们有

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x} \mathrm{d}x. \tag{4}$$

在这里积分号下是解析函数,它在平面的有限部分没有奇点,且沿任何平行于实轴的直线趋于零. 所以根据柯西定理,如果积分(4)不是沿实轴而是沿平行于实轴的任意直线 $z = x + iy(y = \cos\ \mathrm{st})$ 取的,那么积分(4)不改变自己的值. 于是

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} \cdot e^{-i\lambda(x+iy)} \mathrm{d}x \\ &= e^{ay^2+\lambda y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-2aixy-i\lambda x} \mathrm{d}x \\ &= e^{ay^2+\lambda y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix(2ay+\lambda)} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

现在选取常值 y 使得被积指数函数的指数的虚部为零,即令 $y = -\lambda/2a$. 那么

$$g(\lambda) = e^{a\frac{\lambda^2}{4a^2}-\frac{\lambda^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

特别,如果令 $a = 1/2$,那么我们得到

$$f(x) = e^{-x^2/2}, g(\lambda) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\lambda^2/2},$$

即函数 $e^{-x^2/2}$ 经傅里叶变换把它自己变为自己(如不计常数因子).

2. 傅里叶变换的基本性质 由定义傅里叶变换的公式(1),可推出这一变换的一系列性质. 我们来研究这些性质. 为了简化记法,我们用符号 $F[f]$ 表示函数 f 的傅里叶变换. 换句话说,我们以 F 表示定义在空间 $L_1(-\infty,\infty)$ 上的线性算子,这个算子使空间 $L_1(-\infty,\infty)$ 的每个函数与其傅里叶变换①对应.

(1) 如果 $L_1(-\infty,\infty)$ 的函数序列 $\{f_n\}$ 在空间 $L_1(-\infty,\infty)$ 的度量下收敛,那么其傅里叶变换的序列 $g_n = F[f_n]$ 在整个直线上一致收敛.

这一论断可从明显的估计式

$$|g_n(\lambda) - g_m(\lambda)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \mathrm{d}x$$

立刻推出.

(2) 绝对可积函数 f 的傅里叶变换 g 是有界连续函数,当 $|\lambda| \to \infty$ 时 g 趋于零.

---

① 一般地说,不属于 L_1.

事实上,函数 $g=F[f]$ 的有界性由估计式

$$|g(\lambda)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$$

立刻便可看出. 其次,如果 f 是开区间 (a,b) 的特征函数,那么对于它

$$g(\lambda) = \int_a^b e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}.$$

显然这个函数连续且当 $|\lambda|\to\infty$ 时趋于零. 因为由 f 变到 g 的运算 F 是线性的,那么由此推出,任意阶梯函数(即区间的特征函数的线性组合)的傅里叶变换也是连续函数,它当 $\lambda\to\pm\infty$ 时趋于零. 最后,阶梯函数在 $L_1(-\infty,\infty)$ 中处处稠密,所以,如果 $f\in L_1$,那么存在在 $L_1(-\infty,\infty)$ 中收敛于 f 的阶梯函数序列 $\{f_n\}$. 于是根据性质 1,函数序列 $g_n=F[f_n]$ 在整个直线上一致收敛于函数 $g=F[f]$. 但此时极限函数 g 也连续且当 $|\lambda|\to\infty$ 时趋于零.

习题 1 证明绝对可积函数 f 的傅里叶变换 g 在整个直线上一致连续.

习题 2 设 B 是在无穷远处趋于零且在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续的函数的空间. 证明傅里叶变换 F 是从 $L_1(-\infty,\infty)$ 到 B 内的范数为 1 的算子,且 F 满足条件 $\mathrm{Ker}\ F=0$.

(3) 如果 f 在每个有限的区间上绝对连续且 $f'\in L_1(-\infty,\infty)$,那么成立如下等式:

$$F[f'] = i\lambda F[\lambda].$$

于是,函数(在前面所指出的条件下)的微分对应于其傅里叶变换与 $i\lambda$ 的乘积.

实际上,在每个有限区间上绝对连续的函数可写成

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$$

的形式. 由 f' 的绝对可积性推出,右边的表达式当 $x\to\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时有极限. 这个极限仅可能为零,因为否则函数 f 就不是在整个直线上可积的了. 考虑到这一点,借助于分部积分得

$$F[f'](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$= f(x)e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x = i\lambda F[f](\lambda),$$

这就是所要证明的.

如果函数 f 是这样的:$f^{(k-1)}$ 在任意一个区间上绝对连续,而 $f,\cdots,f^{(k)}\in L_1(-\infty,\infty)$,那么借助于同样的论证得到

$$F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f]. \tag{5}$$

(4) 函数光滑程度与其傅里叶变换在无穷远减小的速度之间的关系. 把等式(5)除以 $(i\lambda)^k$ 并忆起傅里叶变换在无穷远处总趋于零(性质 2),便得:如果 $f^{(k)}$ 绝

对可积,那么

$$|F[f]| = \frac{|F[f^{(k)}]|}{|\lambda|^k} \to 0,$$

即在这些条件下 $F[f]$ 在无穷远比 $1/|\lambda|^k$ 下降得更快.这样 f 在 L_1 中所具有的导数阶越高,则其傅里叶变换在无穷远下降得也就越快.

(5) 如果 f'' 存在且属于 $L_1(-\infty,\infty)$,那么 $F(f)$ 绝对可积.

事实上,在所说的条件下 $F[f]$ 有界并在无穷远比 $1/\lambda^2$ 下降得快.由此便得出可积性.

上面(性质 4)我们证明了函数 f 所具有的导数的阶越高,其傅里叶变换在无穷远处下降得也就越快.对偶的论断也成立,即 f 下降得越快,其傅里叶变换也越光滑.确切地说,成立如下论断:

(6) 设函数 $f(x)$ 与 $xf(x)$ 都绝对可积,那么函数 $g=F[f]$ 可微且

$$g'(\lambda) = F[-ixf(x)]. \tag{6}$$

事实上,把确定 g 的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x$$

对参数 λ 微分,我们得到积分

$$-i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x,$$

(由于函数 $xf(x)$ 的可积性)此积分关于 λ 一致收敛.因此 g 的导函数存在且(6)式成立.

如果函数 $f(x),xf(x),\cdots,x^pf(x)$ 绝对可积,那么类似的论证表明,函数 g 有直到 p 阶在内的导数,并且

$$g^{(k)}(\lambda) = F[(-ik)^kf(x)] \quad (k = 0,1,\cdots,p).$$

(7) 如果要求函数 f 在无穷远下降得更快,那么 g 将成为更加光滑的函数.由假定对任意的 p,$x^pf(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ 可推出函数 g 的无穷次可微性.现在假定对某个 $\delta>0$,$e^{\delta|x|}f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$.那么 $g(\lambda)$ 作为解析函数,可以从实轴 λ 扩张到复变量 $\zeta=\lambda+i\mu$ 的平面上的带形区域,并且 δ 越大,这个带形区域的宽度也越大.总之,可以断言当 $|\mu|<\delta$ 时 g 是解析函数.实际上,显然,当 $|\mu|<\delta$ 时,积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\zeta}\mathrm{d}x$$

收敛并确定一个连续函数.该函数在实轴上,与函数 f 的傅里叶变换重合.当 $|\mu|<\delta$ 时,这个函数在解析函数论的意义下可微,这一事实的证明与性质 6 完全一样.

3. 埃尔米特函数与拉盖尔函数的完备性　利用在前一段中所叙述的想法,可以证明:如果可测函数 f 在开区间 (a,b) 上几乎处处异于零,其中 $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$,

且满足条件 $|f(x)| \leqslant Ce^{-\delta|x|}$,其中 $\delta>0$,那么函数系 $\{x^n f(x)\}$, $n=0,1,2,\cdots$,在 $L_2(a,b)$ 中是完备的.

特别,由此可推出埃尔米特函数在 $L_2(-\infty,\infty)$ 中组成完备系,而拉盖尔函数在 $L_2(0,\infty)$ 中组成完备系(参看第七章 §3 第 7 段).

我们来证明上述关于完备性的论断. 假定系 $\{x^n f(x)\}$ 不完备,那么根据哈恩-巴拿赫定理,存在如下的非零函数 $h\in L_2(-\infty,\infty)$,使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

(我们利用了希尔伯特空间中关于线性连续泛函一般形式的定理;如果考虑复的 $L_2(a,b)$,那么代替 $h(x)$ 必须写为 $\overline{h(x)}$.)显然 $fh\in L_1(a,b)$,不仅如此,对任意 $\delta_1<\delta$ 有 $e^{\delta_1|x|}fh\in L_1(a,b)$. 在以后,如果需要时,把函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 之外延拓为零,很方便地认为 f 与 g 定义在全直线上. 设 g 是函数 fh 的傅里叶变换,即

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

由前面所说的得知,函数 g 被延拓为带形区域 $|\operatorname{Im}\zeta|<\delta$ 内的解析函数. 另一方面,根据性质 6,这个函数的所有导数当 $\lambda=0$ 时变为零,所以 $g(\lambda)\equiv 0$. 按照第 1 段所证明的唯一性,由此推出 $f(x)h(x)=0$ 几乎处处成立,因此几乎处处有 $h(x)=0$,因为 $f(x)$ 几乎处处不为零. 而这与 $h(x)$ 是非零函数的假定矛盾. 所得矛盾便证明了系 $\{x^n f(x)\}$ 的完备性.

4. 快速下降无穷次可微函数的傅里叶变换 利用由函数 f 变为其傅里叶变换 g 时,函数的光滑性与函数在无穷远下降的性质的作用互换这一事实,易于指出其傅里叶变换将其变为自身的自然的函数类.

设 S_∞ 是直线上无穷次可微的函数的集,对于集中每一个函数都存在一组常数 C_{pq}(它依赖于函数 f 与数 p,q),使得

$$|x^p f^{(q)}(x)| < C_{pq}. \tag{7}$$

我们证明,如果 $f\in S_\infty$,那么 $g=F[f]\in S_\infty$,首先由(7)推出函数 $x^p f^{(q)}(x)$ 中的每一个函数的绝对可积性. 事实上,由于对所有的 p 与 q,(7)式成立,那么

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leqslant C_{p+2,q}/x^2,$$

即函数 $x^p f^{(q)}(x)$ 下降得不比 $1/x^2$ 慢. 由此又推出函数 $F[f]$ 有任意阶导数. 最后,根据第 2 段,由 $f^{(q)}(x)$ $(q=1,2,\cdots)$ 的可和性推出 $g=F[f]$ 在无穷远下降得比 $1/|\lambda|^q$ 快. 现在考虑函数

$$(i\lambda)^q g^{(p)}(\lambda) = (-i)^q F[(x^p f(x))^{(q)}],$$

其中每一个,作为可积函数的傅里叶变换,被某个常数 D_{pq} 所界定. 于是,如果 $f\in$

S_∞，那么 $g = F[f] \in S_\infty$. 反之，设 $g \in S_\infty$，那么依照所证明的，函数

$$f^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

在 S_∞ 中. 置 $f(x) = \frac{1}{2\pi} f^*(-x)$. 显然 $f \in S_\infty$. 同时按照反演公式

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

即 g 是函数 $f \in S_\infty$ 的傅里叶变换. 于是傅里叶变换把 S_∞ 类重又变为整个 S_∞ 类. 显然，这是一一对应映射.

习题　设 $f \in S_\infty$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x) dx = 0$ 对所有 $p \geqslant 0$ 成立. 能否由此得出 $f(x) \equiv 0$？

5. 傅里叶变换与函数的卷积　设 f_1 与 f_2 是在整个直线上上可积的函数. 函数

$$f(x) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi$$

称为它们的**卷积**. 函数 $f(x)$ 对几乎所有的 x 是确定的并且是可积的. 实际上，二重积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi dx$$

存在，因为积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\xi) f_2(\eta)| d\xi d\eta$$

是存在的(参看第五章 §6 第 4 段中关于富比尼定理的注). 因此积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi$$

存在. 这个函数 f 用符号 $f_1 * f_2$ 表示. 我们来计算 L_1 中两个函数的卷积的傅里叶变换. 应用富比尼定理并令 $x - \xi = \eta$，得

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi \right\} e^{-i\lambda x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x - \xi) e^{-i\lambda x} dx \right\} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\lambda\eta} e^{-i\lambda\xi} d\eta \right\} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\lambda\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi,
\end{aligned}$$

即

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1]F[f_2].$$

于是,傅里叶变换把卷积运算变为更为简单的运算——函数相乘. 这一事实在傅里叶变换的许多应用中起着重要的作用.

6. 用傅里叶变换解热传导方程 应用傅里叶变换于解微分方程基于下述事实(参看第3段):傅里叶变换把微分运算变为乘以自变量的乘积运算. 因此,如果有一线性常系数微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = \varphi(x), \tag{8}$$

那么傅里叶变换把它变成形如

$$(i\lambda)^n z + a_1 (i\lambda)^{n-1} z + \cdots + a_{n-1} i\lambda z + a_n z = \psi(\lambda) \tag{9}$$

的代数方程,其中 $z = F[y]$,$\psi = F[\varphi]$. 然而对于常微分方程来说,这种方法并未开辟任何本质上新的前景. 因为解常系数线性微分方程并没有多大困难. 此外,如果未知函数 $y = y(x)$ 在整个直线上可积,那么从(8)变到(9)是可能的,而对于常系数线性方程的解来说,这一点一般说是不成立的.

傅里叶变换更主要的应用是在于偏微分方程方面,在那里,在一定的条件下,变换把解偏微分方程归结为解常微分方程. 例如,我们以解热传导方程的柯西问题来说明这一点.

欲求在 $-\infty < x < \infty$,$t \geqslant 0$ 时方程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{10}$$

的解,使该解当 $t = 0$ 时为已知函数 $u_0(x)$. 这一问题的物理意义是求无穷的传热的杆在任意时刻 $t > 0$ 时的温度,若初始时刻杆上每一点的温度是 $u_0(x)$.

假定 $u_0(x)$,$u_0'(x)$ 及 $u_0''(x)$ 属于 $L_1(-\infty, \infty)$,我们在满足如下条件的 $u(x,t)$ 的函数类中求所提问题的解:

1) 对任意固定的 $t \geqslant 0$,函数 $u(x,t)$,$u_x(x,t)$,$u_{xx}(x,t)$ 在整个 x 轴上绝对可积;

2) 函数 $u_t(x,t)$ 在每一有限的闭区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 有可积的强函数 $f(x)$(不依赖于 t):

$$|u_t(x,t)| \leqslant f(x), \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

在方程(10)中对 x 实行傅里叶变换. 这时,从右边得到

$$F[u_{xx}(x,t)] = -\lambda^2 v(\lambda,t),\text{其中 } v(\lambda,t) = F[u(x,t)],$$

从左边根据条件2)有

$$F[u_t] = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x = v_t(\lambda,t).$$

于是傅里叶变换把方程(10)变为常微分方程

$$v_t(\lambda,t) = -\lambda^2 v(\lambda,t),$$

我们现在需要对此方程求解,而该解当 $t=0$ 时变为函数

$$v_0(\lambda) = F[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x.$$

显然,

$$v(\lambda,t) = e^{-\lambda^2 t}v_0(\lambda)$$

就是所求的解.

现在,为了得出我们原先问题的解,余下的是求其傅里叶变换为函数 $v(\lambda,t)$ 的那个函数 $u(x,t)$.

利用第 1 段的例 4,我们得到

$$e^{-\lambda^2 t} = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right].$$

所以

$$v(\lambda,t) = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]\cdot F[u_0(x)] = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x}{4t}} * u_0(x)\right],$$

即

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}u_0(x-\xi)\mathrm{d}\xi.$$

我们得到了热传导方程解的所谓**泊松积分**.

7. 多元函数的傅里叶变换　我们所研究过的一元函数的傅里叶变换,易于推广到多元函数的情形.

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是在整个 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中可积的函数. 函数

$$g(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)e^{-i(x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+\cdots+x_n\lambda_n)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

称为函数 f 的**傅里叶变换**.

这个 n 重积分显然是存在的,因为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可积. 按照富比尼定理,这个积分可改写成如下的累次积分的形式:

$$g(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)e^{-ix_1\lambda_1}\mathrm{d}x_1\right\}\times e^{-ix_2\lambda_2}\mathrm{d}x_2\cdots\right\}e^{-ix_n\lambda_n}\mathrm{d}x_n. \tag{11}$$

换言之,依次对 n 个自变量中的每一个自变量(次序任意)单独实行变换,可以得到 n 元函数的傅里叶变换. 依次对(11)式右端的 n 个运算中的每一个进行反演,我们得到公式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\right.\right.$$

$$\left.\times e^{ix_n\lambda_n}\mathrm{d}\lambda_n\right\}e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}}\mathrm{d}\lambda_{n-1}\cdots\}e^{ix_1\lambda_1}\mathrm{d}\lambda_1.$$

该式又可改写成 n 重积分

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)e^{i(x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+\cdots+x_n\lambda_n)}$$

$$\times\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\cdots\mathrm{d}\lambda_n. \tag{12}$$

然而,因为一般说来函数 $g(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 不一定在整个 $\mathbf{R}^n$ 中可和,必须指出应当在怎样的意义下来理解这个积分,以及为使 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可用积分(12)表示,应在 f 上加的条件.

下述定理给出了关于这个问题的一个可能的回答.

定理 1 设函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在整个空间 $\mathbf{R}^n$ 上可积且满足条件:

$$\left.\begin{aligned}
&|f(x_1+t_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\leqslant C|t_1|^a,\\
&|f(x_1,x_2+t_2,\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\leqslant C(x_1)|t_2|^a,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&|f(x_1,x_2,\cdots,x_n+t_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\\
&\qquad\leqslant C(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})|t_n|^a,\\
&\text{其中}\\
&0\leqslant a\leqslant 1,\int_{-\infty}^{\infty}C(x_1)\mathrm{d}x_1<\infty,\cdots,\\
&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}C(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}<\infty.
\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

那么,如果在反演公式(12)中的积分理解为

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{N_1\to\infty}\int_{-N_1}^{N_1}\left\{\cdots\lim_{N_{n-1}\to\infty}\int_{-N_{n-1}}^{N_{n-1}}\left\{\lim_{N_n\to\infty}\int_{-N_n}^{N_n}g(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)e^{ix_n\lambda_n}\right\}\right.$$

$$\left.e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}}\mathrm{d}\lambda_{n-1}\cdots\right\}e^{ix_1\lambda_1}\mathrm{d}\lambda_1,$$

则反演公式(12)成立.

事实上,因为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在$\mathbf{R}^n$可和,则根据富比尼定理对几乎所有的$x_2,\cdots,x_n$值,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对x_1可和. 因此函数

$$f_1(\lambda_1,x_2,\cdots,x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)e^{-ix_1\lambda_1}dx_1$$

存在. 由(13)式可见,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$作为x_1的函数满足§3 定理 1 的条件;所以$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可以按反演公式由f_1表示:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \lim_{N_1\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_1}^{N_1} f_1(\lambda_1,x_2,\cdots,x_n)e^{ix_1\lambda_1}d\lambda_1$$

其次,如果我们令

$$f_2(\lambda_1,\lambda_2,x_3,\cdots,x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda_1,x_2,\cdots x_n)e^{-ix_2\lambda_2}dx_2,$$

则由条件(13)得出,对f_1,有反演公式

$$f_1(\lambda_1,x_2,\cdots,x_n) = \lim_{N_2\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_2}^{N_2} f_2(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,x_n)e^{ix_2\lambda_2}d\lambda_2,$$

即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$= \lim_{N_1\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_1}^{N_1}\left\{\lim_{N_2\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_2}^{N_2} f_2(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,x_n)e^{ix_2\lambda_2}\right\}e^{ix_1\lambda_1}d\lambda_1.$$

用类似的方式定义$f_3(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,x_n)$等等,我们便得到了公式(12).

多元函数的傅里叶变换在偏微分方程的理论中有着广泛的应用. 例如考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{14}$$

这是刻画平面上的热传导过程的方程. 设在时刻$t=0$给定温度:

$$u(0,x,y) = u_0(x,y).$$

若把类似于第 6 段所指出的条件加到所求方程(14)的解上,则我们可在方程(14)中对变量x,y进行傅里叶变换. 结果得到常微分方程

$$\frac{dv}{dt} = -(\lambda^2+\sigma^2)v, \tag{15}$$

其中

$$v(t,\lambda,\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x,y)e^{-i(\lambda x+\sigma y)}dxdy.$$

解出方程(15),然后我们可以借助反演公式求出原来方程(14)的解.

§5. 空间 $L_2(-\infty,\infty)$ 中的傅里叶变换

1. 布兰舍列尔(Planchler)定理 我们首先回到对傅里叶级数所得到的结果. 为了更多地与傅里叶变换类比,我们将考虑复形式的傅里叶级数,即在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上取函数 e^{inx} $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的完备正交系,且使闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上的每个可和函数 f 对应于其傅里叶系数列:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

如果函数 f 不仅可和,而且平方可和,则它的傅里叶系数满足条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2<\infty.$$

换言之,由平方可和函数变到它的傅里叶系数的集合,是由欧几里得空间 L_2 到欧几里得空间 l_2 上的一个映射,而且这个映射是线性的并满足帕塞瓦尔等式

$$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x \tag{1}$$

(即这个变换与保范变换仅仅相差一数值因子).

现在我们转向对给定在整个数轴上的函数的傅里叶变换,并且看看能不能把这个变换解释为复空间 $L_2(-\infty,\infty)$ 中的某个算子. 在这里,基本的困难在于:直线上平方可积的函数不一定属于 $L_1(-\infty,\infty)$,即该函数在 §4 所定义的意义下的傅里叶变换不一定存在. 然而对任何 $f\in L_2(-\infty,\infty)$ 可在稍微不同的意义下定义傅里叶变换. 这时可得到如下的定理,它可看作巴塞瓦尔等式(1)的翻版.

定理(布兰舍列尔,1910 年) 对任何函数 $f\in L_2(-\infty,\infty)$,积分

$$g_N(\lambda)=\int_{-N}^{N}f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x$$

对任何 N 都是 λ 的函数并且属于 $L_2(-\infty,\infty)$. 当 $N\to\infty$ 时函数 g_N 在空间 L_2 的度量下收敛于某个极限 g,并且有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(\lambda)|^2\mathrm{d}\lambda=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{2}$$

这个函数 g 称为函数 $f\in L_2$ 的**傅里叶变换**. 如果 f 也属于 $L_1(-\infty,\infty)$,则相应的函数 g 与通常意义下函数 f 的傅里叶变换一致.

证明 证明的基本思想是,首先对所有属于无穷次可微速降函数类 S_∞ 的函数建立等式(2),S_∞ 的函数在 $L_2(-\infty,\infty)$ 中处处稠密,然后按连续性扩张到整个

$L_2(-\infty,\infty)$上. 现在我们就把这个想法付诸实施.

1）设$f_1,f_2 \in S_\infty$. 用g_1,g_2分别表示它们的傅里叶变换. 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[g_1(\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda]\overline{f_2(x)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[g_1(\lambda)\overline{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}\mathrm{d}\lambda,$$

而且这里改变积分次序是合理的,因为函数

$$g_1(\lambda)\overline{f_2(x)}e^{i\lambda x}$$

在(x,λ)平面上绝对可积. 在所得到的等式中令$f_1=f_2=f, g_1=g_2=g$,便得出公式(2)对任意函数$f\in S_\infty$为真.

2）现在设f是$L_2(-\infty,\infty)$中的任意函数,它在某个开区间$(-a,a)$之外为零. 那么f在开区间$(-a,a)$可积(即属于$L_1(-a,a)$). 因而f在整个直线上也可积. 所以对于f,傅里叶变换

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x$$

是确定的. 现在设$\{f_n\}$是S_∞中的函数序列,这些函数在$(-a,a)$外为零,并且依空间$L_2(-\infty,\infty)$中的范数收敛于f. 因为f及所有的f_n仅在有限区间异于零,序列$\{f_n\}$也依空间$L_1(-\infty,\infty)$的范数收敛于f. 所以(参看§4 第2段)序列$\{g_n\}$在整个直线上一致收敛于g. 此外,序列$\{g_n\}$在$L_2(-\infty,\infty)$中是基本的. 事实上,$g_n-g_m\in S_\infty$,所以根据已经证明的,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g_n(\lambda)-g_m(\lambda)|^2\mathrm{d}\lambda = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-f_m(x)|^2\mathrm{d}x,$$

由此便得出序列$\{g_n\}$的基本性. 因此,这个序列在L_2中收敛,并且收敛于作为序列$\{g_n\}$一致极限的同一个函数g. 所以,在等式

$$\|f_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|g_n\|^2$$

中可令$n\to\infty$取极限. 这样一来,等式(2)对于在某个开区间外为零的每个函数$f\in L_2$成立.

3）最后,设f是L_2中的任意函数. 令

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } |x|\leqslant N, \\ 0, & \text{当 } |x|>N. \end{cases}$$

显然,当 $N\to\infty$ 时

$$\|f-f_N\|\to 0.$$

函数 f_N 属于 $L_1(-\infty,\infty)$,因此它有通常的傅里叶变换,等于

$$g_N(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f_N(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x=\int_{-N}^{N}f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x.$$

由于根据我们论证的第 2)点,有

$$\|f_N-f_M\|^2=\frac{1}{2\pi}\|g_N-g_M\|^2,$$

故函数 g_N 在 L_2 中收敛到某个极限,我们用 g 表示. 所以在等式

$$\|f_N\|^2=\frac{1}{2\pi}\|g_N\|^2$$

中可以令 $N\to\infty$ 取极限,由此对任意 $f\in L_2(-\infty,\infty)$ 得出关系(2). 布兰舍列尔定理的第一部分证毕.

现在,如果函数 f 既属于 $L_2(-\infty,\infty)$,又属于 $L_1(-\infty,\infty)$,则它有通常意义下的傅里叶变换

$$\tilde{g}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x.$$

这时函数 f_N 在 $L_1(-\infty,\infty)$ 中收敛于 f,因此其傅里叶变换 g_N 一致收敛于 $\tilde{g}$. 但是,此外,正如我们已经证明的,函数 g_N 在 $L_2(-\infty,\infty)$ 的度量下收敛于某个极限,并已将其记为 g. 由此推出,$\tilde{g}$ 与 g 重合. 证明完成了.

推论 由关系(2)立刻可推出,对任何 $f_1,f_2\in L_2(-\infty,\infty)$ 成立等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)\overline{f_2(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}\mathrm{d}\lambda.$$

为了证明此点,只需对函数 f_1+f_2 写出关系式(2),然后比较表达式的左端和右端. 如果等式(2)意味着在 L_2 中对傅里叶变换保范,则上述等式意味着保持内积.

2. 埃尔米特函数 在上段所述的布兰舍列尔定理表明,傅里叶变换可以看作把空间 $L_2(-\infty,\infty)$ 映到自身上的有界线性算子 F. 如果在这个空间中选择任何完备标准正交系,则算子 F(如同任何其他线性算子一样)可借助于无穷矩阵来表示. 当然这个矩阵的形状依赖于基的选择. 在对应于某个算子的所有矩阵中,当由已知算子的特征函数组成基时所对应的矩阵显得更简单,在这种情形下矩阵是对角形的. 我们来研究,对傅里叶变换 F 是否存在这样的基. 换言之,我们来研究 $L_2(-\infty,\infty)$ 中那些函数是傅里叶变换 F 的特征函数. 为此我们指出,方程

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - x^2 f = \mu f \tag{3}$$

经傅里叶变换变成同样的方程① $\left(\text{因为运算}\frac{d^2}{dx^2}\text{变为乘以} -\lambda^2\text{，而乘以} -x^2 \text{变为运算}\frac{d^2}{d\lambda^2}\right)$. 所以很自然，求算子 F 的特征函数就是求方程(3)的解. 我们来求这个方程具有形式

$$f = we^{-x^2/2}$$

的解，其中 w 是多项式. 把这个表达式代入(3)以后，得关于 w 的方程

$$w'' - 2xw' = (\mu + 1)w.$$

设

$$w = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \tag{4}$$

我们得到等式

$$(2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2}) - 2x(a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1})$$
$$= (\mu + 1)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n).$$

比较等式左端与右端 x 的同次幂的系数，求得

$$-2na_n = (\mu + 1)a_n, \ -2(n-1)a_{n-1} = (\mu + 1)a_{n-1},$$

如此等等，一般地

$$k(k-1)a_k - 2(k-2)a_{k-2} = (\mu + 1)a_{k-2}. \tag{5}$$

由于我们假定最高次系数 a_n 异于零，应有

$$\mu = -(2n+1) \quad \text{及} \quad a_{n-1} = 0,$$

即 μ 是负的奇数. 多项式 w 的所有系数都由关系式(5)准确地确定（如不计常数因子）. 同时，下标的奇偶性与数 n（即多项式 w 的次数）不同的那些系数等于零. 反之，所有那些下标与 n 有相同奇偶性的系数异于零. 这些系数可由递归公式

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k - 2n - 4} a_k$$

求出（如果值 a_n 给定）. 这样一来，我们得到关于 w 的公式：

$$w_n(x) = a_n\left(x^n - \frac{n(n-1)}{4}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 8}x^{n-4} - \cdots\right).$$

于是，我们构造出了形如

$$\varphi_n(x) = w_n(x)e^{-x^2/2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

① 当然，要假定未知函数 f 满足相应的光滑性条件和在无穷远处下降的条件.

的函数系. 显然,这些函数中的每一个都属于 $L_2(-\infty,\infty)$(由于因子 $e^{-x^2/2}$ 存在). 此外,这些函数两两正交. 事实上,根据(3)式有

$$\varphi''_n(x)-x^2\varphi_n(x)=-(2n+1)\varphi_n(x),$$

$$\varphi''_m(x)-x^2\varphi_m(x)=-(2m+1)\varphi_m(x).$$

第一个等式乘以 φ_m,减去第二个等式乘以 φ_n,得

$$\varphi''_n\varphi_m-\varphi''_m\varphi_n=2(m-n)\varphi_n\varphi_m$$

或

$$[\varphi'_n\varphi_m-\varphi'_m\varphi_n]'=2(m-n)\varphi_n\varphi_m.$$

如果 $m\neq n$,则积分这个等式便得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2(m-n)}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi'_n\varphi_m-\varphi'_m\varphi_n]'\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2(m-n)}[\varphi'_n\varphi_m-\varphi'_m\varphi_n]_{-\infty}^{\infty}=0.$$

于是正交性便证明了.

所得正交系中的每一个元 φ_n 都是一 n 次多项式乘以 $e^{-x^2/2}$. 因此,如不计数值因子,它的诸元应当与诸埃尔米特函数重合. 这些埃尔米特函数是我们在第七章§3中所构造的,$L_2(-\infty,\infty)$ 中的序列

$$e^{-x^2/2},xe^{-x^2/2},\cdots,x^ne^{-x^2/2}$$

的正交化.

我们现在来证明,函数 $\{\varphi_n\}$ 是傅里叶变换的特征函数:

$$F\varphi_n=c_n\varphi_n. \tag{6}$$

这可由下述事实推出:

(1) 方程(3)对变换 F 不变.

(2) 方程(3)对每一个 n 仅有一个(如不计常数因子)形如 $P_n(x)e^{-x^2/2}$ 的解,其中 P_n 是 n 次多项式.

(3) 傅里叶变换把 $x^ne^{-x^2/2}$ 变成 $\left(i\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^ne^{-x^2/2}=Q_n(x)e^{-x^2/2}$,其中 Q_n 是 n 次多项式(这一点易于用归纳法验证).

从等式(6)推出,对任意整数 k

$$F^k\varphi_n=c_n^k\varphi_n.$$

但是,应用四次傅里叶变换,可把每一个函数变为本身与 $4\pi^2$ 的乘积. 所以 $c_n^4=4\pi^2$,即 c_n 仅可取值 $\pm\sqrt{2\pi}$ 与 $\pm i\sqrt{2\pi}$.

于是,空间 $L_2(-\infty,\infty)$ 中的傅里叶变换 F 是个线性算子,它在由埃尔米特函

数所组成的基内可记为对角矩阵,其元形如 $\pm\sqrt{2\pi}$ 及 $\pm i\sqrt{2\pi}$ ①.

§ 6. 拉普拉斯(Laplace)变换

1. 拉普拉斯变换的定义与基本性质　傅里叶变换对于微分方程的应用的实质性限制是,这个变换仅仅对在整个直线上可和的函数才有定义. 特别,傅里叶变换对于当 $x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$ 时增长的函数不存在,而这样的函数当解微分方程时常常出现. 把傅里叶变换推广到广义函数后,可以克服这一困难. 关于这一方法,我们将在本章 § 8 简短地叙述. 不越出函数的古典概念和古典分析方法的范围的另一可能途径是,用所谓的**拉普拉斯变换**代替傅里叶变换.

如果函数 f(一般说来,它在整个直线上不可积)在乘以 $e^{-\gamma x}$ 以后变为可积的,其中 γ 是某个实数,则积分

$$g(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-isx}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\lambda}e^{x\mu}\mathrm{d}x$$

对某个复数 $s=\lambda+i\mu$ 是收敛的,特别,它在直线 $\mu=-\gamma$ 上收敛. 在这条直线上,它是函数 $f(x)e^{-\gamma x}$ 的傅里叶变换.

对于应用,最重要的情况,即我们关于函数 $f(x)e^{-\gamma x}$ 可积的假设成立的情况是,f 满足如下条件:

$$\begin{cases}|f(x)|<Ce^{\gamma_0 x}, & \text{当 } x\geqslant 0,\\ f(x)=0, & \text{当 } x<0\end{cases}\tag{1}$$

(其中 γ_0 与 C 是常数). 对于所有 $\mu<-\gamma_0$ 的 $s=\lambda+i\mu$,即在由直线 $\mathrm{Im}s=-\gamma_0$ 所界定的半平面上,积分

$$g(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-isx}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty}f(x)e^{-isx}\mathrm{d}x\tag{2}$$

存在并且是函数 $f(x)e^{\mu x}$ 的傅里叶变换. 这后一点可由 g 借助反演公式而得到(我们假定 f 满足使用反演公式的条件):

$$f(x)e^{\mu x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(s)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda.$$

由此

① 如果傅里叶变换由公式

$$F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x$$

定义(即由 § 4 的公式(1′)定义,而不是由公式(1)定义),则变换的四次方是单位算子,并且对于 F,在由埃尔米特函数所组成的基内,我们得到以 ±1 和 $\pm i$ 为元的对角矩阵.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{i\mu-\infty}^{i\mu+\infty} g(s)e^{isx}\mathrm{d}s \qquad (s = \lambda + i\mu). \tag{3}$$

因为函数$f(x)e^{\mu x}$当$\mu < -\gamma_0$时如指数函数那样减小(由于(1)式),它的傅里叶变换g以及$g(s)e^{isx}$是在半平面$\mathrm{Im}s < -\lambda_0$内解析的函数.

现在,在公式(2)与(3)中令$p = is$,并作代换:用$\Phi(p)$来表示$g(x)$. 我们得到

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px}\mathrm{d}x \tag{2'}$$

及

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\mu-i\infty}^{-\mu+i\infty}\Phi(p)e^{px}\frac{\mathrm{d}p}{i} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\mu-i\infty}^{-\mu+i\infty}\Phi(p)e^{px}\mathrm{d}p. \tag{3'}$$

函数Φ在半平面$\mathrm{Re}p > \gamma_0$内有定义且解析,它称为(满足条件(1)的)函数f的**拉普拉斯变换**.

拉普拉斯变换就其本身性质与傅里叶变换的区别很少. 然而使拉普拉斯变换有定义的函数类与使傅里叶变换存在的函数类$L_1(-\infty,\infty)$有本质的区别.

2. 拉普拉斯变换对解微分方程的应用(算子法) 拉普拉斯变换可应用于求解微分方程. 设给定常系数线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b(x), \tag{4}$$

欲求其满足初值条件

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \tag{5}$$

的解. 对方程(4)应用拉普拉斯变换①,即把它乘以e^{-px}并从0积分到∞. 设

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(x)e^{-px}\mathrm{d}x$$

是函数y的拉普拉斯变换. 进行分部积分,我们便求得导数y'的拉普拉斯变换:

$$\int_0^{\infty} y'(x)e^{-px}\mathrm{d}x = y(x)e^{-px}\Big|_0^{\infty} + p\int_0^{\infty} y(x)e^{-px}\mathrm{d}x = pY(p) - y_0.$$

依次应用这个公式,便求得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} y^{(n)}(x)e^{-px}\mathrm{d}x \\
&= p(p^{n-1}Y(p) - y_{n-2} - py_{n-3} - \cdots - p^{n-2}y_0) - y_{n-1} \\
&= p^n Y(p) - y_{n-1} - py_{n-2} - \cdots - p^{n-1}y_0 \\
&= p^n Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k}y_k.
\end{aligned}$$

① 如果$|b(x)|$增长不太快,不难证明将其应用于方程(4)的合法性.

最后,设

$$B(p) = \int_0^{\infty} b(x) e^{-px} \mathrm{d}x.$$

结果拉普拉斯变换把微分方程(4)变为代数方程(考虑到初值条件(5)):

$$Q(p) + R(p)Y(p) = B(p),$$

其中 B 是函数 b 的拉普拉斯变换;Q 是 p 的 $n-1$ 次多项式,它依赖于方程的系数及给定的初值. 最后,

$$R = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} p^k \quad (a_0 = 1)$$

是方程(4)的特征多项式.

由所得方程求得

$$Y(p) = \frac{B(p) - Q(p)}{R(p)}.$$

由此,按反演公式得到解 y:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\mu - i\infty}^{-\mu + i\infty} \frac{B(p) - Q(p)}{R(p)} e^{px} \mathrm{d}p.$$

这个积分通常借助留数来计算.

对于解常系数线性微分方程,所谓的**算子法**是熟知的. 这个方法是把形如

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y_0 = b(x)$$

的方程的左边,看作对未知函数 y 应用算子

$$A\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_n \tag{6}$$

的结果,而方程的解是看作对方程的右边应用算子(6)的逆算子的结果. 将这样的算子应用于某些最简单的函数(三角函数、指数函数、幂函数及它们的组合),其结果不难由直接计算得出. 这就提供了很自然地写出常系数线性微分方程解的可能性,只要这个方程的右端是上述简单函数的组合.

显然,算子法可以解释为以不明显的方式应用了拉普拉斯变换(它建立了形如(6)的微分算子的代数与多项式代数之间的确定对应),这个方法在技术文献中常常以某种“处方”的形式出现,上述解释刚好可以看作这个方法的理论基础.

§7. 傅里叶－斯蒂尔切斯变换

1. 傅里叶－斯蒂尔切斯变换的定义　我们再回到空间 $L_1(-\infty, \infty)$ 中的傅里叶变换:

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

这个公式可改写为黎曼-斯蒂尔切斯积分的形式

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}F(x), \tag{1}$$

其中

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

是在整个数轴上具有有界变差的绝对连续函数(全变差等于 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$). 然而等式(1) 不仅对形如(2) 的函数,而且对任意在整个数轴上具有有界差的函数都有意义. 我们称积分

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}F(x)$$

为函数 F 的**傅里叶-斯蒂尔切斯变换**,其中 F 是任意在整个数轴上具有有界变差的函数. 对于傅里叶-斯蒂尔切斯变换来说,前面对通常傅里叶变换所建立的一系列性质仍然保持成立. 例如,下述性质即是其中之一:积分(1)所定义的函数 g 在整个直线上连续、有界.

事实上,

$$|g(\lambda_1) - g(\lambda_2)| \leqslant \int_{-N}^{N} |e^{-i\lambda_1 x} - e^{-i\lambda_2 x}|\,\mathrm{d}F(x)$$

$$+ \int_{|x|>N} |e^{-i\lambda_1 x} - e^{-i\lambda_2 x}|\,\mathrm{d}F(x).$$

取 N 充分大以后(同时对任意的 λ_1 与 λ_2),右端第二项可以取得任意小,而第一项对固定的 N 当 $\lambda_1 - \lambda_2 \to 0$ 时趋于零.

然而,并不是傅里叶变换的所有性质都可以搬到傅里叶-斯蒂尔切斯变换上来. 当 $|\lambda| \to \infty$ 时,傅里叶-斯蒂尔切斯变换一般不趋于零. 例如,设

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

那么

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}F(x) = 1.$$

类似地,对于当 $x \leqslant x_0$ 时为 0,而 $x > x_0$ 时为 1 的函数,傅里叶-斯蒂尔切斯变换是 $e^{ix_0\lambda}$,即 λ 的周期函数.

如果 F 是阶跃函数,点

$$n = 0, \pm 1, \pm 2$$

是它的间断点,而数

$$\cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots \quad (\text{其中} \sum_n |a_n| < \infty)$$

是它在这些点的跃度,那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \mathrm{d}F(x) = \sum_n a_n e^{-in\lambda}$$

是以 2π 为周期的周期函数. 如果 F 在点 x_n 有跃度 a_n,其中 x_n 组成任意的数列(一般说来,是不可通约的数),那么 F 的傅里叶－斯蒂尔切斯变换具有形式

$$\sum_n a_n e^{-ix_n\lambda}.$$

这种类型的函数属于所谓的**殆周期函数**.

2. 傅里叶－斯蒂尔切斯变换在概率论中的应用　对于在 $(-\infty, \infty)$ 上可和的函数,我们在 §4 引进了卷积的概念:

$$f(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi) f_2(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{3}$$

令

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \mathrm{d}t,$$

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \mathrm{d}t \quad \text{及} \quad F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} f_2(t) \mathrm{d}t.$$

将等式(3)积分以后,把它改写成如下形式:

$$\begin{aligned} F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\xi) f_2(\xi) \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{x} f_1(t-\xi) \mathrm{d}t \right\} f_2(\xi) \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-\xi) \mathrm{d}F_2(\xi) \end{aligned}$$

(这里积分次序的改变,根据富比尼定理与函数 f 的绝对可积性是允许的). 我们所得到的关系式

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-\xi) \mathrm{d}F_2(\xi)$$

把函数 F 与函数 F_1 和 F_2 相对应. 但是右边的积分作为勒贝格－斯蒂尔切斯积分,不仅对绝对连续函数存在,而且对于任何两个在全数轴上具有有界变差的函数也存在. 我们称表达式

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-\xi)\,\mathrm{d}F_2(\xi) \tag{4}$$

为**两个函数 F_1 和 F_2 的卷积**，并记为 $F_1 * F_2$，其中 F_1 和 F_2 是全数轴上的任意有界变差函数. 我们证明，表达式(4)是对所有的 x 值有定义，且在整个数轴上具有有界变差①.

实际上，F_1 是有界变差函数，因此 F_1 博雷尔可测，所以积分(4)对所有 x 存在. 其次，有

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} (F_1(x_1-\xi) - F_1(x_2-\xi))\,\mathrm{d}F_2(\xi)\right|$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x_1-\xi) - F_1(x_2-\xi)|\,\mathrm{d}(\mathrm{var}F_2(\xi)),$$

由此

$$V[F] \leqslant V[F_1]V[F_2],$$

即 F 是有界变差函数.

定理 如果 F 是有界变差函数 F_1 和 F_2 的卷积，而 g, g_1 和 g_2 分别是 F, F_1 和 F_2 的傅里叶－斯蒂尔切斯变换，那么

$$g(\lambda) = g_1(\lambda)g_2(\lambda).$$

证明 设 $F = F_1 * F_2$ 且

$$a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b$$

是闭区间 $[a, b]$ 的某个分割. 于是对每个 λ，有

$$\int_a^b e^{-i\lambda x}\mathrm{d}F(x) = \lim_{\max\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} e^{-i\lambda x_k}(F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

$$= \lim_{\max\Delta x_k \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-i\lambda(x_k-\xi)}(F_1(x_k-\xi)$$

$$- F_1(x_{k-1}-\xi))e^{-i\lambda\xi}\mathrm{d}F_2(\xi),$$

即

$$\int_a^b e^{-i\lambda x}\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{a-\xi}^{b-\xi} e^{-i\lambda x}\mathrm{d}F_1(x)\right\}e^{-i\lambda\xi}\mathrm{d}F_2(\xi).$$

这里令 $a \to -\infty$，$b \to \infty$ 而取极限，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\mathrm{d}F_1(x)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi}\mathrm{d}F_2(\xi),$$

---

① 在 В. И. Гливэнко 所著《Интөграл Стилтьөса》，Гостехиэдат，1936，一书中给出了不利用测度而可使公式(4)有意义的初等结构.

即

$$g(\lambda) = g_1(\lambda)g_2(\lambda).$$

傅里叶 - 斯蒂尔切斯变换把函数的卷积变为相乘,这一定理在概率论中广泛地应用着(**特征函数法**). 如果 ξ 与 η 是两个独立的随机变量,而 F_1 与 F_2 是它们的分布函数,那么随机变量 $\xi+\eta$ 对应于分布函数

$$F = F_1 * F_2.$$

在概率论中常常需要考虑独立随机变量之和. 由分布函数变到它的傅里叶 - 斯蒂尔切斯变换,即所谓的特征函数,就可以用更为简单方便的乘积运算来代替卷积运算.

习题 1　试证明傅里叶 - 斯蒂尔切斯变换具有唯一性:如果函数 F 左连续,而其傅里叶 - 斯蒂尔切斯变换恒为零,则 $F = \text{const}$.

习题 2　试证明有界变差函数的卷积运算满足交换律与结合律.

§8. 广义函数的傅里叶变换

我们已经说过,在通常意义下所理解的傅里叶变换,在微分方程及其他问题中的应用有很大局限性,因为这个变换仅对于在整个数轴上绝对可积的函数才有定义. 引进广义函数的傅里叶变换的概念之后,傅里叶变换的可应用性就可以从本质上扩充. 我们来叙述这一理论的基本思想.

仍然考虑在整个数轴上无穷次可微,且在无穷连同导数比 $1/|x|$ 的任何次幂下降得都快的函数的空间 S_∞(参看第四章 §4).

取 S_∞ 为基本函数空间以后,我们来研究相应的广义函数空间 S_∞^*.

现在,我们在空间 S_∞^* 定义傅里叶变换. 为此,我们首先回忆,空间 S_∞ 被(在通常的意义下来理解的)傅里叶变换变到自身:如果 $\varphi \in S_\infty$,则 $F[\varphi] \in S_\infty$,并且 F 是把 S_∞ 仍然变到整个 S_∞ 的一一映射. 由此出发,引入如下定义:由公式

$$(g,\psi) = 2\pi(f,\varphi) \quad (\text{其中 } \psi = F[\varphi]) \tag{1}$$

所决定的线性泛函 $g \in S_\infty^*$,称为**广义函数 $f \in S_\infty^*$ 的傅里叶变换**. 公式(1)可改写为

$$(Ff,\psi) = 2\pi(f,\varphi) = 2\pi(f,F^{-1}\psi),$$

即泛函 $f \in S_\infty^*$ 的傅里叶变换是一个泛函,它在每个元 $\psi \in S_\infty$ 上的值等于原泛函 f 在元 $\varphi = F^{-1}\psi$ 上的值乘以 2π,其中 F^{-1} 是傅里叶逆变换.

因为当 φ 遍历 S_∞ 时 $\psi = F[\varphi]$ 遍历整个 S_∞,等式(1)实际上在整个 S_∞ 上定义了泛函. 这个泛函的线性性质与连续性可直接验证.

在 S_∞^* 的元中包含所有的绝对可积函数. 对于这些绝对可积函数,刚才叙述的傅里叶变换的定义与通常的傅里叶变换的定义一致. 事实上,如果 $f \in S_\infty$, $\varphi \in S_\infty$,

$g=F[f]$ 及 $\psi=F[\varphi]$，则按照布兰舍列尔定理得

$$2\pi(f,\varphi) = (g,\psi), \tag{2}$$

并且对给定的f，如对等价函数不加区别，则只存在一个对所有 $\varphi \in S_\infty$ 满足等式(2)的函数 g. 借助于相应的极限过程不难证明，对任意$f \in L_1(-\infty,\infty)$等式(2)成立. 这样一来，广义函数的傅里叶变换，乃是经典变换在更广的函数类上的推广.

例 1 设$f(x)=c=\text{const}$. 那么

$$2\pi(f,\varphi) = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} c\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi c\psi(0) \quad (\psi = F[\varphi]),$$

即常数的傅里叶变换等于这个常数乘上 2π 及 δ 函数.

例 2 设$f(x)=e^{iax}$. 那么

$$2\pi(f,\varphi) = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\psi(-a),$$

即函数 e^{iax}的傅里叶变换是位移 δ 函数 $\delta(x+a)$与 2π 的积.

例 3 设$f(x)=x^2$. 那么由等式

$$\psi''(\lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x,$$

在式中令 $\lambda=0$ 并乘以 2π 后得

$$2\pi(x^2,\varphi(x)) = -2\pi\psi''(0),$$

即函数 x^2 的傅里叶变换是 δ 函数的二阶导数乘以 -2π.

我们再做一些最后的说明.

我们对 S_∞ 上的广义函数定义了傅里叶变换. 但是还可以取任意其他的基本空间，例如无穷次可微的有限支集函数空间 K. 对于每个函数 $\varphi \in K$，傅里叶变换(在通常的意义下)存在，并且可验证它是按指数递增的整解析函数. 更确切地说，傅里叶变换是把空间 K 变到空间 Z 的线性算子，其中空间 Z 的元是满足不等式

$$|s|^q|\psi(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|} \quad (q = 1,2,\cdots)$$

的整解析函数 ψ，而 $\tau=\mathrm{Im}s$，C_q 与 a 是依赖于函数 ψ 的常数. 因为在空间 K 中曾引入了收敛概念，把 K 变到 Z 中的映射 F 在 Z 中诱导出某个收敛概念：序列$\{\psi_n\}$在 Z 中收敛于 ψ，是指如果关系 $\varphi_n\to\varphi$ 对于相应的原象成立. 其实，不利用空间 K①，也不难叙述这个收敛概念.

现在设f是 K^* 中的任意元. 令

$$(g,\psi) = 2\pi(f,\varphi)，\text{其中}\ \psi = F[\varphi],$$

---

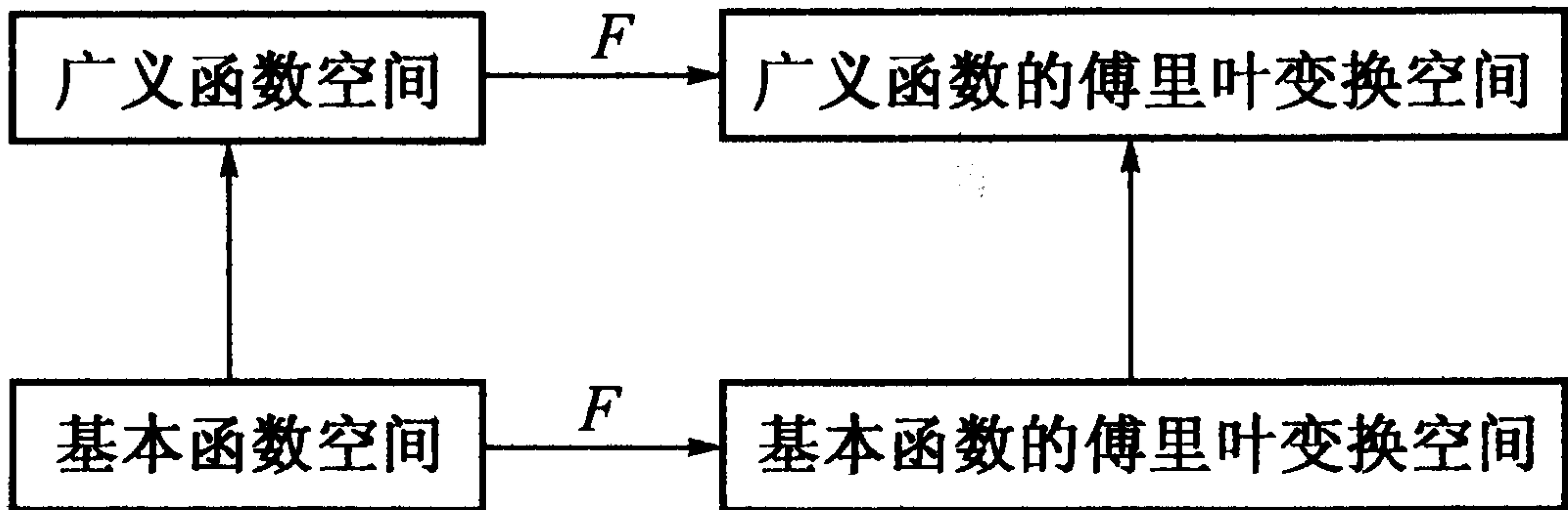
① 即如果对固定的 $C_q(q=1,2,\cdots)$与 a，不等式

$$|s^q\psi_n(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|}$$

成立，且 $\psi_n\to 0$ 在实轴上的每个有限区间上一致成立，则在 Z 中 $\psi_n\to 0$.

我们就可以使 Z 上的线性泛函 g 与 f 对应. 我们把这个泛函 g 称为**泛函 f 的傅里叶变换**. 这样一来,在基本函数空间 K 上的广义函数 f 的傅里叶变换,是在 Z 上的广义函数,即 Z 是这样一个空间:在通常意义下来理解的傅里叶变换把空间 K 变到这个空间 Z 内.

对于在任何其他的基本函数空间上的广义函数可进行同样的构造. 这时,每一次都可产生一个包含四个空间的模式图:某个最初的基本函数空间,这些函数的傅里叶变换的集合(即第二个基本函数空间)以及两个共轭空间.



当取 S_∞ 为基本函数空间时,由于它被傅里叶变换变到其自身,上述模式图归结为两个空间.

广义函数的傅里叶变换的概念,在偏微分方程的理论中得到了广泛的应用. 读者例如可由希洛夫(Шилов)的书[52]中了解这些问题.

第九章　线性积分方程

§1. 基本定义. 导致积分方程的某些问题

1. 积分方程的类型　凡在积分号下含有未知函数的方程称为**积分方程**. 例如，方程

$$\varphi(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(s) \tag{1}$$

就是这样的方程，这里 f 和 K 都是已知函数，而 φ 则是未知的. 这里的变量 s 和 t 在某一固定的闭区间 $[a,b]$ 上取值.

方程(1)的特征性质是它的线性性质：方程(1)关于未知函数 φ 是线性的. 一系列问题能导致非线性积分方程，例如导致形如

$$\varphi(s)=\int_a^b K(s,t)g(\varphi(t),t)\mathrm{d}t$$

的方程，其中 K 和 g 都是给定的函数. 然而，我们往后仅限于讨论线性方程.

一些个别的积分方程早在 20 世纪初叶就曾经被研究过. 早在 1823 年阿贝尔(Abel)就研究了方程

$$f(s)=\int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^{\alpha}}\mathrm{d}t \quad (0<\alpha<1, f(0)=0),$$

现在就以他的名字命名为阿贝尔积分方程. 这里 f 是已知函数，而 φ 则是未知的. 阿贝尔证明了，这个方程的解具有形式

$$\varphi(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^t \frac{f'(\alpha)}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s.$$

然而线性积分方程的一般理论,仅在 19 世纪与 20 世纪更替之际才建立起来,主要是在沃尔泰拉、弗雷德霍姆和希尔伯特的工作中建立的.

方程(1)称为**第二类弗雷德霍姆**方程(参看第二章 §4 第 4 段),而方程

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = f(s) \tag{2}$$

(在该方程中未知函数 φ 仅出现在积分号下)称为**第一类弗雷德霍姆方程**.

上面提到的阿贝尔方程,属于所谓的**沃尔泰拉方程**,这类方程的一般形式为

$$\int_a^s K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = f(s) \tag{3}$$

(**第一类沃尔泰拉方程**)或

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + f(s) \tag{4}$$

(**第二类沃尔泰拉方程**). 显然,沃尔泰拉方程可视为方程(1)或(2)中函数 K 满足条件

$$K(s,t) = 0 \quad (t > s)$$

的弗雷德霍姆方程. 但是适宜于单独分出沃尔泰拉型方程成为特殊的一类方程,因为它们具有一系列极重要的性质,而这些性质是任意的弗雷德霍姆方程所不具有的.

如果在方程(1)、(2)或(3)中函数 f 等于零,那么这样的方程称为**齐次方程**,否则称为**非齐次方程**.

2. 导致积分方程的问题的一些例子　在本章的下面几节里我们研究线性积分方程的一些基本性质,但是我们首先阐述几个能导出这样的方程的问题.

(1) 负载弦的平衡　考察一条弦,即是一条弹性材料所做成的长为 l 的线,它可以自由弯曲,但能抗拉伸,且抗力与这个伸长的量成正比. 设弦的两端固定在点 $x=0$ 和 $x=l$. 于是在平衡位置时,弦与 x 轴上的线段 $0 \leqslant x \leqslant l$ 完全重合. 现在假定有一铅垂力 $P=P_\xi$ 作用于弦的点 $x=\xi$ 上. 在该力的作用下弦偏离了平衡位置,弦显然具有如图 23 所示的折线形状.

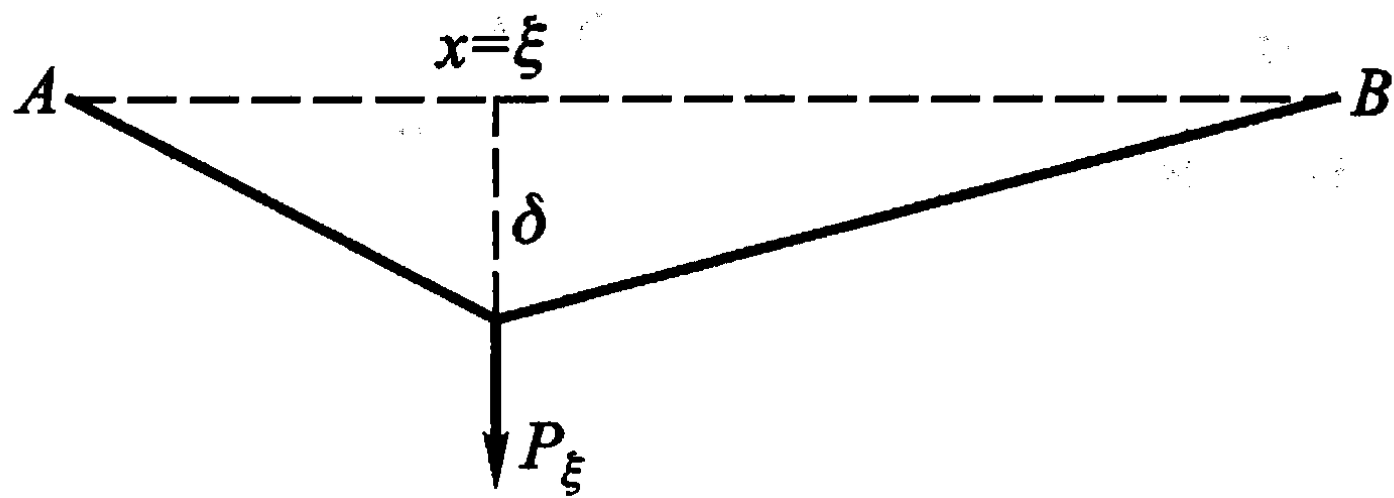


图　23

我们来求在作用于点 ξ 处的外力 P_ξ 作用下,弦在点 ξ 处的偏离量 δ. 如果力 P_ξ 与未加负载的弦的张力 T_0 相比较是很小的话,那么仍然可以假定加负载弦的张力的水平投影等于 T_0. 于是由弦的平衡条件就得到等式

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l-\xi} = P_\xi,$$

由此

$$\delta = \frac{(l-\xi)\xi}{T_0 l} P_\xi.$$

现在设 $u(x)$ 表示弦上某一点 x 在力 P_ξ 的作用下的下垂量. 那么

$$u(x) = P_\xi G(x,\xi),$$

其中

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x(l-\xi)}{T_0 l}, 当 0 \leqslant x \leqslant \xi 时, \\ \dfrac{(l-x)\xi}{T_0 l}, 当 \xi \leqslant x \leqslant l 时. \end{cases}$$

特别,由这些公式立即看出 $G(x,\xi)=G(\xi,x)$. 现在假定作用在弦上的力在其上是连续分布的,并且具有密度 $p(\xi)$. 如果这个力很小,那么应变线性地依赖于应力,而负载弦的形状就由函数

$$u(x) = \int_0^l G(x,\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{5}$$

所描绘. 这样,如果给定了作用在弦上的负载,那么利用公式(5)就可求出弦在这个负载的作用下所具有的形状.

现在我们来考虑逆问题:求负载分布 p,使在其作用下弦具有给定的形状 u. 我们已得到了根据给定的 u 求函数 p 的方程,它就是方程(2)(仅记号有所不同),即第一类弗雷德霍姆积分方程.

(2) *弦的自由振动和受迫振动* 现在假定弦作某种振动. 设 $u(x,t)$ 是弦上横坐标为 x 的点在时刻 t 的位置,又设 ρ 是弦的线密度①. 作用在弦的长为 dx 的线元上的惯性力等于

$$-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\rho \mathrm{d}x, \quad 由此 \quad p(\xi) = -\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}\rho.$$

用这个表达式代替公式(5)中的 $p(\xi)$,我们就得到

$$u(x,t) = -\int_0^l G(x,\xi)\rho\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}\xi. \tag{6}$$

假定弦作具有某一固定频率 ω 和依赖于 x 的振幅 $u(x)$ 的简谐振动. 换言之,设

$$u(x,t) = u(x)\sin\omega t.$$

将这个表达式代入(6)并约去等式两端的 $\sin\omega t$,就得到关于 u 的下列积分方程:

---

① 我们令 $\rho=\text{const}$,尽管这对今后讨论是无关紧要的.

$$u(x) = \rho\omega^2 \int_0^l G(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{7}$$

如果弦作非自由振动,而是在外力作用下作受迫振动,那么经过不复杂的计算可以证明,弦的简谐振动的相应方程将具有形式

$$u(x) = \rho\omega^2 \int_0^l G(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi + f(x),$$

即非齐次第二类弗雷德霍姆方程.

(3) *将微分方程化为积分方程*　有时宜于将求解微分方程的问题化为求解积分方程的问题. 例如,在证明初值条件为 $y(x_0) = y_0$ 的微分方程

$$y' = f(x,y)$$

之解的存在性和唯一性时,我们(在第二章中)已经看到,宜将它化为(非线性)积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi,y)\mathrm{d}\xi.$$

对于高于一阶的微分方程,也可以作这样的转化. 例如,考虑二阶方程

$$y'' + f(x)y = 0.$$

令 $f(x) = \rho^2 - \sigma(x)$,其中 $\rho = \mathrm{const}$,就可将它写成下列形式:

$$y'' + \rho^2 y = \sigma(x)y. \tag{8}$$

众所周知,附有初值条件 $y(a) = y_0, y'(a) = y'_0$ 的方程

$$y'' + \rho^2 y = g(x)$$

的解,可以表示成

$$y(x) = y_0\cos\rho(x-a) + \frac{y'_0\sin\rho(x-a)}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_a^x \sin\rho(x-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

因此求附有上述那样的初值条件的方程(8)之解,就化为去求解如下积分方程

$$y(x) - \frac{1}{\rho}\int_a^x \sigma(\xi)\sin\rho(x-\xi)y(\xi)\mathrm{d}\xi = y_0\cos\rho(x-a) + \frac{y'_0\sin\rho(x-a)}{\rho}.$$

§2. 弗雷德霍姆积分方程

1. 弗雷德霍姆积分算子　在这一节里我们将考虑第二类弗雷德霍姆方程,即

形如

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + f(s) \tag{1}$$

的方程. 我们假定这里和下面遇到的所有函数,一般说来,都取复值. 我们假定称之为该方程核的函数 K,在正方形 $a \leqslant s, t \leqslant b$ 上是可测的并且属于 L_2 类:

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t < \infty. \tag{2}$$

方程(1)的自由项 f 是 $L_2[a,b]$ 里的某一给定的函数,而 φ 则是 $L_2[a,b]$ 里的未知函数. L_2 类的核称为**希尔伯特-施密特核**.

把由等式 $A\varphi = \psi$ 定义的算子 A 与方程(1)相对应;这就是

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \psi(s). \tag{3}$$

每一形如(3)的算子称为**弗雷德霍姆算子**. 如果核 $K(s,t)$ 满足条件(2),那么就称之为**希尔伯特-施密特算子**. 研究方程(1)自然归结为研究这个算子的性质.

定理 1 等式(3)(其中 $K(s,t)$ 是平方可积函数)在空间 $L_2[a,b]$ 里定义了一个紧线性算子 A,其范数满足不等式

$$\|A\| \leqslant \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

证明 首先注意,根据富比尼定理和条件(2),对于几乎所有的 s,积分

$$\int_a^b |K(s,t)|^2 \mathrm{d}t$$

存在. 换言之,对于几乎所有的 s,$K(s,t)$ 作为 t 的函数属于 $L_2[a,b]$. 因为平方可积函数之积是可和的,所以(3)式左端的积分对于几乎所有的 s 存在,即函数 ψ 几乎处处有定义. 我们来证明 $\psi \in L_2[a,b]$. 根据柯西-布尼雅可夫斯基不等式,对于几乎所有的 s,有

$$|\psi(s)|^2 = \left|\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|^2$$

$$\leqslant \int_a^b |K(s,t)|^2 \mathrm{d}t \int_a^b |\varphi(t)|^2 \mathrm{d}t = \|\varphi\|^2 \int_a^b |K(s,t)|^2 \mathrm{d}t.$$

对 s 进行积分,然后用 $|K(s,t)|^2$ 的二重积分来替换累次积分,就得到不等式

$$\|A\varphi\|^2 = \int_a^b |\psi(s)|^2 \mathrm{d}s \leqslant \|\varphi\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

这个不等式表明 $|\psi(s)|^2$ 可积,并给出了算子 A 的范数的估计式(4). 剩下证明算子 A 是紧算子. 设 $\{\psi_n\}$ 是 $L_2[a,b]$ 里的完备正交系. 那么所有可能的两两乘积 $\psi_m(s)\psi_n(s)$ 构成空间 $L_2([a,b] \times [a,b])$ 里的完备系(参看第七章 §3 第 5 段).

从而

$$K(s,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}\psi_m(s)\psi_n(t).$$

现在令

$$K_N(s,t)=\sum_{m,n=1}^{N}a_{mn}\psi_m(s)\psi_n(t),$$

再设 A_N 是由核 $K_N(s,t)$ 所定义的算子. 这个算子是紧算子,因为它将整个 $L_2[a,b]$ 变为有限维子空间(在第四章里我们称这样的算子为有限维算子). 事实上,如果 $\varphi\in L_2[a,b]$,那么

$$\begin{aligned}A_N\varphi&=\int_a^b K_N(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{m,n=1}^{N}a_{mn}\psi_m(s)\int_a^b\varphi(t)\psi_n(t)\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{m=1}^{N}\psi_m(s)\sum_{n=1}^{N}a_{mn}b_n,\end{aligned}$$

其中

$$b_n=\int_a^b\varphi(t)\psi_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

即每一元素 $\varphi\in L_2[a,b]$,被算子 A_N 变换为由向量 $\psi_1,\cdots,\psi_N$ 所生成的有限维子空间的元素. 其次 $K_N(s,t)$ 是函数 $K(s,t)$ 的傅里叶级数的部分和,因此,当 $N\to\infty$ 时,有

$$\int_a^b\int_a^b(K(s,t)-K_N(s,t))^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t\to 0.$$

由此,将估计式(4)应用于算子 $A-A_N$ 就有,当 $N\to\infty$ 时,

$$\|A-A_N\|\to 0.$$

利用关于“紧算子的收敛序列的极限是紧算子”的定理(第四章 §6 第 2 段),就得到算子 A 的紧性.

注 1　在定理 1 的证明过程中,我们已确立了如下事实:每一希尔伯特 - 施密特算子,可以表示为有限维积分算子序列(按范数收敛意义下)的极限.

注 2　设 A_1 和 A_2 是两个形如(3)的算子,而 $K_1(s,t)$ 和 $K_2(s,t)$ 是与它们相对应的核. 如果算子 A_1 和 A_2 相等,即对于所有的 $\varphi\in L_2[a,b]$ 都有 $A_1\varphi=A_2\varphi$,那么几乎处处都有 $K_1(s,t)=K_2(s,t)$. 事实上,如果对于所有的 $\varphi\in L_2[a,b]$ 都有

$$A_1\varphi-A_2\varphi=\int_a^b(K_1(s,t)-K_2(s,t))\varphi(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

那么对于几乎所有的 $s\in[a,b]$ 都有

$$\int_a^b|K_1(s,t)-K_2(s,t)|^2\,\mathrm{d}t=0,$$

而这表明

$$\int_a^b \int_a^b |K_1(s,t) - K_2(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t = 0,$$

由此推出我们的结论. 这样一来,如果我们按惯例对两个彼此等价的可和函数不加区别,那么可以说,积分算子与核之间也是一一对应.

定理 2 设 A 是由核 $K(s,t)$ 所定义的希尔伯特 - 施密特算子. 于是与它共轭的算子 A^* 就由"共轭"核 $\overline{K(s,t)}$ 所决定.

证明 利用富比尼定理,就得到

$$\begin{aligned}(Af,g) &= \int_a^b \left\{\int_a^b K(s,t)f(t)\mathrm{d}t\right\}\overline{g(s)}\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b \int_a^b K(s,t)f(t)\,\overline{g(s)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_a^b \left\{\int_a^b K(s,t)\,\overline{g(s)}\mathrm{d}s\right\}f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(t)\overline{\left\{\int_a^b \overline{K(s,t)}g(s)\mathrm{d}s\right\}}\mathrm{d}t = (f,A^*g),\end{aligned}$$

由此得出定理的结论.

特别,形如(3)的算子 A 在 $L_2[a,b]$ 里自共轭,即 $A^* = A$,当且仅当 $\overline{K(s,t)} = K(t,s)$. 当考虑实希尔伯特空间的情形时(这时一定是实核),自共轭的条件为 $K(s,t) = K(t,s)$.

注 我们考虑了作用于空间 $L_2[a,b]$ 中的积分算子. 但是上面所说的和下面将要阐述的一切结果,无须作任何修改就可以移植到以任何其他测度空间来代替闭区间 $[a,b]$ 的情形.

2. 含对称核的方程 让我们来研究第二类弗雷德霍姆积分方程

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(s), \tag{5}$$

它的核满足条件

1) $$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t < \infty,$$

2) $$K(s,t) = \overline{K(t,s)}.$$

我们将这样的方程称为**含对称核的方程**. 根据上一段定理 1 和定理 2,相应的弗雷德霍姆算子

$$A\varphi = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{6}$$

是紧的和自共轭的. 从而希尔伯特 - 施密特定理(第四章 §6 第 5 段)对于它是正确的. 我们应用这个定理来求方程(5)之解. 由于我们感兴趣的仅是算子(6)的紧性和自共轭性而不是它的积分表示,自然将方程(5)用符号形式写成

$$\varphi = A\varphi + f. \tag{7}$$

根据希尔伯特－施密特定理,对于 A,存在与非零特征值$\{\lambda_n\}$对应的特征函数的标准正交系$\{\psi_n\}$,使 L_2 中每一元素 ξ 均可表示成:

$$\xi = \sum_n a_n\psi_n + \xi', \quad 其中 A\xi' = 0.$$

令

$$f = \sum_n b_n\psi_n + f' \quad (Af' = 0), \tag{8}$$

然后来求方程(7)的具有下列形式的解 φ:

$$\varphi = \sum_n x_n\psi_n + \varphi' \quad (A\varphi' = 0). \tag{9}$$

将展式(8)和(9)代入方程(7),得

$$\sum_n x_n\psi_n + \varphi' = \sum_n x_n\lambda_n\psi_n + \sum_n b_n\psi_n + f'.$$

这个等式成立,当且仅当

$$f' = \varphi'$$

和

$$x_n(1 - \lambda_n) = b_n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

即当且仅当

$$f' = \varphi',$$

$$x_n = \frac{b_n}{1 - \lambda_n} \quad (\lambda_n \neq 1),$$

$$b_n = 0 \quad (\lambda_n = 1).$$

最后这个等式给出方程(7)可解的充要条件. 这时,对应于使 $\lambda_n = 1$ 的 n 的坐标 x_n 是任意的. 这样一来,我们就得到如下结果.

定理 3　如果 1 不是算子 A 的特征值,那么对于任何 f 方程(7)有一解且仅有一解. 如果 1 是算子 A 的特征值,那么方程(7)可解,当且仅当自由项 f 与算子 A 的特征值 1 对应的所有特征函数正交. 如果后面这个条件满足,那么方程(7)有无穷多个解.

3. 弗雷德霍姆定理. 退化核情形　我们现在来研究第二类弗雷德霍姆方程,假设其核满足(保证算子紧性的)条件

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t < \infty,$$

但不满足对称条件.

我们首先研究具有退化核的方程

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt + f(s) \tag{10}$$

即其核形如

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^n P_i(s)Q_i(t), \tag{11}$$

其中 P_i, Q_i 是 L_2 里的函数. 具有形如(11)的核算子将每一函数 $\varphi \in L_2$ 变为和

$$\sum_{i=1}^n P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\varphi(t)\,dt,$$

即变为由函数 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所生成的有限维子空间里的元素. 注意,可以假设表达式(11)中的函数 $P_1,\cdots,P_n$ 是彼此线性无关的. 事实上,如果不然,那么将函数 P_i 中的每一个函数表为线性无关函数的线性组合后,易知同一个核 $K(s,t)$ 可以写成项数较少的形如 $\widetilde{P}_j(s)\widetilde{Q}_j(t)$ 的项之和,使得函数 $\widetilde{P}_j$ 线性无关. 可以对函数 Q_j 作类似的简化. 易见,在经过这样的简化后,所得核中诸 P_j 和诸 Q_j 分别是线性无关的.

这样,我们来解含退化核(11)的方程(10),其中函数 $P_1,\cdots,P_n$(以及 $Q_1,\cdots,Q_n$)是线性无关的. 用相应的和(11)来替换方程(10)中的 $K(s,t)$,就得到

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^n P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\varphi(t)\,dt + f(s). \tag{12}$$

引入记号

$$\int_a^b Q_i(t)\varphi(t)\,dt = q_i,$$

可以把方程(12)改写成

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^n q_i P_i(s) + f(s).$$

将 φ 的这个表达式代入方程(10),就得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n q_i P_i(s) + f(s) \\ = \sum_{i=1}^n P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\Big[\sum_{j=1}^n q_j P_j(t) + f(t)\Big]dt + f(s).\end{aligned} \tag{13}$$

令

$$\int_a^b Q_i(t)P_j(t)\,dt = a_{ij}, \quad \int_a^b Q_i(t)f(t)\,dt = b_i,$$

就可将等式(13)写成

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i\right].$$

根据假定函数 P_i 是线性无关的,因此由此推出相应系数的等式

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{14}$$

我们得到了关于系数 q_i 的线性方程组. 解之,我们就求出函数

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s).$$

这个函数满足积分方程(10),因为把方程(10)变为方程组(14)的所有计算,可以按相反的次序进行.

这样,求解含退化核的积分方程,就归结为求解与之对应的线性代数方程组(14).

对于线性方程组,解的存在性和唯一性条件是众所周知的.

Ⅰ. 线性代数方程组

$$Tx = y \quad (T = \| a_{ik} \|, x = (x_1,\cdots,x_n), y = (y_1,\cdots,y_n))$$

可解,当且仅当向量 y 与共轭齐次方程组

$$T^* z = 0 \quad (T^* = \| \bar{a}_{ki} \|)$$

的每个解正交.

Ⅱ. 如果矩阵 T 的行列式不等于零,那么方程 $Tx=y$ 对于任何 y 有一解且仅有一解. 如果矩阵 T 的行列式等于零,那么齐次方程 $Tx=0$ 有非零解.

Ⅲ. 既然矩阵 T 和共轭矩阵 T^* 的秩相同,齐次方程组 $Tx=0$ 和 $T^*z=0$ 的线性无关解的个数也相同.

由于我们已阐明在含退化核的积分方程与线性代数方程组之间存在这样的关系,这些结论可以视为关于解退化积分方程的一些定理. 我们在下一段中将证明,从本质上讲,这些定理对含任意(但不一定是退化)核的积分方程也是成立的. 但是因为对于非退化积分算子,诸如矩阵之秩和行列式这样的概念就没有意义,所以相应的一些定理应该这样陈述,使得这些概念不出现在这些定理之中.

4. 含任意核的方程的弗雷德霍姆定理　我们再来研究方程

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt + f(s), \tag{15}$$

但是现在对它的核仅加上希尔伯特 - 施密特条件

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t < \infty$$

(以保证算子的紧性),但既不假定这个核是退化的,也不假定是对称的. 我们只

对方程(15)的可解性条件及其解的性质感兴趣. 这时对我们至关重要的,仅是与方程(15)对应的算子的紧性,而不是它的积分表示. 因此我们今后总是研究算子方程

$$\varphi = A\varphi + f, \tag{16}$$

假定 A 是一个任意给定在希尔伯特空间 H 里的紧算子.

令 $T = I - A$(其中 I 是单位算子),可将方程(16)改写成

$$T\varphi = f. \tag{17}$$

在研究这些方程的同时,我们还研究齐次方程

$$T\varphi_0 = 0 \tag{18}$$

和共轭方程

$$T^*\psi = g, \tag{19}$$

$$T^*\psi_0 = 0 \tag{20}$$

($T^* = I - A^*$). 下面的**弗雷德霍姆定理**揭示了这四个方程解之间的关系.

定理 I 非齐次方程 $T\varphi = f$ 仅对与共轭齐次方程 $T^*\psi_0 = 0$ 的每个解是正交的那些 f 才是可解的.

定理 II(弗雷德霍姆择一定理) 要么方程 $T\varphi = f$ 对任何 $f \in H$ 有唯一解,要么齐次方程 $T\varphi_0 = 0$ 有非零解.

定理 III 齐次方程(18)和(20)具有个数相同的有限个线性无关解.

在动手证明这些定理之前,我们指出,对于含对称核的方程(根据第 2 段中所述的结果),这些定理是正确的. 这时由于 A 与 A^* 完全相同,定理 III 变为平凡的.

另一方面,正如我们前面已看到,如果 A 是一个退化积分算子,那么相应的方程就化为线性代数方程组;这时弗雷德霍姆定理自动变为上一段中所引入的关于线性方程组的定理.

由于每个紧算子是退化算子(即有限维算子)的收敛序列的极限,我们本来可以利用(由退化核逼近于非退化核的)相应的极限过程来证明弗雷德霍姆定理. 但是,我们采用另外一种无须考虑退化方程的方法来证明这些定理.

弗雷德霍姆定理的证明 让我们回忆起 $\mathrm{Ker}\, B$ 是线性连续算子 B 的化零元全体(即所有使得 $Bx = 0$ 的所有 $x \in H$ 所构成的集),而 $\mathrm{Im}\, B$ 是算子 B 的值域,即形如 $y = Bx$ 的向量的全体. 显然,$\mathrm{Ker}\, B$ 总是一个闭线性子空间. 集 $\mathrm{Im}\, B$ 也是一个线性流形,但一般不是闭的. 我们现在来证明,对于算子 $T = I - A$,其中 A 是一个复算子,相应的流形是闭的.

引理 1 流形 $\mathrm{Im}\, T$ 是闭的.

证明 设 $y_n \in \mathrm{Im}\, T$ 且 $y_n \to y$. 根据假定,有这样的向量 $x_n \in H$ 存在,使得

$$y_n = Tx_n = x_n - Ax_n. \tag{21}$$

我们可以假定向量 x_n 与 Ker T 是正交的(如果有必要,需从 x_n 里减去它在 Ker T 上的投影). 其次,可以认为 $\|x_n\|$ 总体有界. 事实上,在相反的情况下,取子序列,我们会有 $\|x_n\|\to\infty$,再除以 $\|x_n\|$,就会从(21)得到 $\frac{x_n}{\|x_n\|}-A\frac{x_n}{\|x_n\|}\to 0$. 但是因为算子 A 是紧算子,所以若再取子序列,则可以认为序列 $\left\{A\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ 收敛. 因此 $\frac{x_n}{\|x_n\|}$ 也会收敛于某向量,比如说,向量 $z\in H$. 显然, $\|z\|=1$ 且 $Tz=0$,即 $z\in$ Ker T. 但是我们假定向量 x_n 与 Ker T 是正交的,从而向量 z 一定与 Ker T 正交. 所得到的矛盾容许假定 $\|x_n\|$ 是总体有界的. 此外,在这种情况下可以假定序列 $\{Ax_n\}$ 也是收敛的,于是由(21)推出序列 $\{x_n\}$ 也是收敛的. 如果用 x 表示这个序列的极限,那么从(21)就可推出 $y=Tx$. 引理得证.

引理 2　空间 H 是闭子空间 Ker T 与 Im T^* 的直正交和,即

$$\text{Ker } T\oplus \text{Im } T^* = H, \tag{22}$$

且类似地有

$$\text{Ker } T^* \oplus \text{Im } T = H. \tag{23}$$

证明　我们已经知道,出现在等式(22)左端的两个子空间都是闭的. 此外,它们是正交的,因为如果 $h\in$ Ker T,那么对于所有的 $x\in H$ 都有 $(h,T^*x)=(Th,x)=0$. 剩下证明,任何非零向量不可能同时与 Ker T 和 Im T^* 都正交. 但是如果向量 z 与 Im T^* 正交,那么对于任何 $x\in H$ 就有 $(Tz,x)=(z,\quad T^*x)=0$,即 $z\in$ Ker T 等式(23)可类似地得到证明. 引理得证.

由引理 2 立即推出弗雷德霍姆第一定理. 事实上,当且仅当 $f\in$ Im T 时,即当存在这样的 φ 使得 $T\varphi=f$ 时,才有 $f\perp$ Ker T^*.

其次,对于每一整数 k 令 $H^k=\text{Im}(T^k)$,因此特别有 $H^1=$ Im T,显然,子空间 H^k 构成嵌入子空间链

$$H\supset H^1\supset H^2\supset\cdots, \tag{24}$$

而根据引理 1 所有这些子空间都是闭的,并且 $T(H^k)=H^{k+1}$.

引理 3　有这样的 j 存在,使得对于所有的 $k\geqslant j$ 都有 $H^{k+1}=H^k$.

证明　如果这样的 j 不存在,那么显然所有的 H^k 都是不同的. 在这种情况下可以构造这样的标准正交序列 $\{x_k\}$ 使得 $x_k\in H^k$ 且与 H^{k+1} 正交. 设 $l>k$. 那么

$$Ax_l-Ax_k=-x_k+(x_l+Tx_k-Tx_l),$$

从而 $\|Ax_l-Ax_k\|\geqslant 1$,因为 $x_l+Tx_k-Tx_l\in H^{k+1}$. 因此从序列 $\{Ax_k\}$ 里不可能选出收敛的子序列,但是这与算子 A 的紧性是矛盾的. 这样引理便得到证明.

引理 4　如果 Ker $T=\{0\}$,那么 Im $T=H$.

证明　如果 Ker $T=\{0\}$,那么算子 T 是一一映射,从而,如果这时 Im $T\neq H$,那

么链(24)就由不同的子空间所构成,而这与引理3矛盾. 因此 $\operatorname{Im} T=H$. 类似地,如果 $\operatorname{Ker} T^*=\{0\}$,那么 $\operatorname{Im} T^*=H$.

引理 5 如果 $\operatorname{Im} T=H$,那么 $\operatorname{Ker} T=\{0\}$.

证明 因为 $\operatorname{Im} T=H$,所以根据引理2,$\operatorname{Ker} T^*=\{0\}$. 于是根据引理4,就有 $\operatorname{Im} T^*=H$. 从而根据引理2,$\operatorname{Ker} T=\{0\}$.

引理4和引理5一起构成了弗雷德霍姆第二定理(择一定理)的内容. 这样第二定理便得到证明.

最后我们来证明弗雷德霍姆第三定理.

假定子空间 $\operatorname{Ker} T$ 是无穷维的. 那么在这个子空间里可以找到一个无穷标准正交系 $\{x_k\}$. 这时 $Ax_k=x_k$,从而对于 $k\neq l$ 有 $\|Ax_k-Ax_l\|=\sqrt{2}$. 但这时从序列 $\{Ax_k\}$ 里不可能选出收敛的子序列,这就与算子 A 的紧性矛盾.

现在设 μ 是 $\operatorname{Ker} T$ 的维数,而 ν 是 $\operatorname{Ker} T^*$ 的维数. 假定 $\mu<\nu$. 设 $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_\mu\}$ 是 $\operatorname{Ker} T$ 里的标准正交基,而 $\{\psi_1,\cdots,\psi_\nu\}$ 则是 $\operatorname{Ker} T^*$ 里的标准正交基. 令

$$Sx=Tx+\sum_{j=1}^{\mu}(x,\varphi_j)\psi_j.$$

因为算子 S 是由算子 T 再加上有限维算子而得到的,所以关于算子 T 上面所证明的一切结果,对于算子 S 仍然是正确的.

我们来证明方程 $Sx=0$ 仅有平凡解. 事实上,假定

$$Tx+\sum_{j=1}^{\mu}(x,\varphi_j)\psi_j=0. \tag{25}$$

因为根据引理2向量 ψ_j 与所有形如 Tx 的向量都正交,所以由(25)推出

$$Tx=0$$

和

$$(x,\varphi_j)=0\quad(1\leqslant j\leqslant\mu).$$

因此,一方面,向量 x 应是向量 φ_j 的线性组合,而另一方面,又与它们正交. 从而 $x=0$. 这样,方程 $Sx=0$ 仅有平凡解. 于是根据第二定理有这样的向量 y 存在使得

$$Ty+\sum_{j=1}^{\mu}(y,\varphi_j)\psi_j=\psi_{\mu+1}.$$

因为 $Ty\in\operatorname{Im} T$,而 $\operatorname{Im} T\perp\operatorname{Ker} T^*$,将这个等式与 $\psi_{\mu+1}$ 作内积,我们就得到右端为1而左端为0. 这与假定 $\mu<\nu$ 发生矛盾. 因此 $\mu\geqslant\nu$. 现在将算子 T 换为 T^*,我们就得到 $\mu\leqslant\nu$,从而 $\mu=\nu$.

定理Ⅲ完全得证.

注 1 在弗雷德霍姆定理中,本质上讲的是算子 $A-I$ 的可逆性,而这些定理表明,$\lambda=1$ 或者是算子 A 的正则点,或者是具有有限重数的特征值. 不言而喻,这些定

理中的所有结论对于算子 $A-\lambda I$ 也仍然是正确的,只要 $\lambda\neq0$. 因此紧算子的每一异于0的谱点,是它的具有有限重数的特征值. 此外,我们知道,这样的特征值集的元素不多于可数个. 根据第四章 §6 第2段中定理2的推论,0总是属于无穷维空间中的紧算子之谱,但是一般并不一定是特征值. 0是唯一的谱点的紧算子,称为(抽象的)**沃尔泰拉算子**.

注2　我们对于形如 $\varphi=A\varphi+f$ 的方程(其中 A 是希尔伯特空间中的一个紧算子),证明了弗雷德霍姆定理. 这些定理无需作重大修改,就能够移植到任意的巴拿赫空间 E 的情形. 不言而喻,这时,共轭方程 $\psi=A^*\psi+g$ 应为空间 E^* 中的方程,正交性条件 $(f,\psi_0)=0$ 应理解为:在方程 $T^*\psi_0=0$ 解的子空间 $\mathrm{Ker}\,T^*\subset E^*$ 中每一泛函在元素 $f\in E$ 上变为零等等. 关于巴拿赫空间中方程的弗雷德霍姆定理的论述,例如可在 Л. А. 刘斯切尔尼克和 В. И. 索波列夫合著的《泛函分析概要》一书中找到.

5. 沃尔泰拉方程　积分方程

$$\varphi(s)=\int_a^s K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t+f(s) \tag{26}$$

(其中 $K(s,t)$ 为一有界可测函数: $|K(s,t)|\leqslant M$),称为(第二类)**沃尔泰拉方程**. 由于这个方程可以视为弗雷德霍姆方程的特殊情形(含有在 $t>s$ 时其核为0),因而弗雷德霍姆定理对于方程(26)也是正确的. 但是,对于沃尔泰拉方程这些定理可以确切表述如下:对于任何函数 $f\in L_2$,沃尔泰拉方程(26)有一解且仅有一解.

事实上,逐字重复第二章 §4 第4段的推理,我们看出,算子

$$A\varphi=\int_a^s K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

的某次幂是一个压缩算子,从而齐次方程有唯一(平凡)解. 根据弗雷德霍姆定理由此推出我们的结论.

习题　设在闭区间上给定了一个含连续核的第二类弗雷德霍姆积分方程. 求证在连续函数空间中弗雷德霍姆定理对于这样的方程是正确的. 这时含转置核的积分方程起着"共轭方程"的作用,而正交性应理解为 L_2 意义下的正交性.

6. 第一类积分方程　形如

$$A\varphi=f \tag{27}$$

的方程,即仅在紧算子符号下含有未知函数 φ 的那种方程,称为**第一类弗雷德霍姆抽象方程**.

一般说来,求解这样的方程是比求解第二类方程更为复杂的问题,而方程(27)不会对任意右端有解.

作为最简单的例子,让我们首先来考虑方程

$$f(s)=\int_a^s\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

即含核

$$K(s,t) = \begin{cases} 1, \text{当 } t \leqslant s \text{ 时}, \\ 0, \text{当 } t > s \text{ 时} \end{cases}$$

的方程,它有一个显然解 $\varphi(s) = f'(s)$,只要 f 绝对连续且其导数属于 L_2,否则它是不可解的.

我们来证明,在一般情况下,方程(27)不会对任意 $f \in H$ 是可解的. 事实上,方程 $A\varphi = f$ 对任何 $f \in H$ 有解,表示这个算子又将 H 映射到全 H 上. 我们来证明这是不可能的. 全 H 可以表示成可数个球 S_n(例如,球心在原点半径为 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 的球)之和. 它们中的第一个被紧算子 A 变为准紧集. 这样一来,闭包 $\mathrm{Im}A$ 是可数个紧统之和,但在 H 里任何紧统处处都不稠密;同时 H 像任何完备度量空间一样,不可能表示成可数个处处都不稠密的集之和. 这样一来,$\mathrm{Im}A \neq H$;换言之,无论 A 是 H 里的什么紧算子,方程 $A\varphi = f$ 不可能对所有的 $f \in H$ 可解.

另一个重要方面,是紧算子的逆算子无界. 因此,如果 f_1 和 f_2 是 H 中两个彼此很接近的元素且两个方程

$$A\varphi_1 = f_1, A\varphi_2 = f_2$$

都是可解的,那么相应的解 $\varphi_1 = A^{-1}f_1$ 和 $\varphi_2 = A^{-1}f_2$ 彼此可能相差得很悬殊,换言之,方程自由项中任意小的误差,可以导致解有很大的误差. 原始数据的微小变动引起解的微小变动的那些问题称为**适定的**(这个"微小性"在各种不同的问题里可以按各种不同的意义来理解). 求解第一类积分方程(与第二类方程不一样)是一个不适定的问题. 在最近一个时期,各种不同类型的不适定的问题及其正则化解法(即将它们化为这种或那种意义下适定的问题),获得了广泛的发展. 但是这些问题的论述超出了本书的范围.

§3. 含参数的积分方程. 弗雷德霍姆法

1. *H* 里紧算子的谱 我们来研究方程

$$\varphi = \lambda A\varphi + f,$$

或者按另一种形式写成

$$(I - \lambda A)\varphi = f, \tag{1}$$

其中 A 是希尔伯特空间 H 里的紧算子,而 λ 则是数值参数.

根据弗雷德霍姆择一定理可能有两种且仅有两种互斥的情况:

(1) 方程(1)对于给定的 λ 和每一 $f \in H$ 有一且仅有一解.

(2) 齐次方程 $\varphi = \lambda A\varphi$ 有非零解.

在第一种情况下算子 $I - \lambda A$ 将 H 一一映射到全 H 上. 由此推出存在有界的逆算

子$(I-\lambda A)^{-1}$. 这等价于,算子$\left(A-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}$在全 H 上有定义并且有界;换言之,在这种情况下 $1/\lambda$ 不属于算子 A 之谱.

现在设第二种可能性成立,即存在这样的异于零的元素 $\varphi_\lambda \in H$,使得

$$\varphi_\lambda = \lambda A\varphi_\lambda \text{ 或 } A\varphi_\lambda = \frac{1}{\lambda}\varphi_\lambda;$$

于是 $1/\lambda$ 是算子 A 的特征值.

我们得到下列结果:每一异于零的数 $\mu=1/\lambda$ 是紧算子 A 的特征值或者是正则的. 换言之,紧算子的连续谱或者根本不存在或者仅由一点 $\mu=0$ 所构成.

将刚才所说的结果与第四章 §6 的定理 4 结合起来,我们就得到关于 H 中紧算子的谱的如下描述. H 里的任何一个紧算子 A 之谱,系由有限个或可数个异于零的特征值 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n,\cdots$(它们中每一个具有有限的重数)和零①所构成. 点零是序列 $\{\mu_n\}$ 的唯一可能的极限点. 点 $\mu=0$ 本身可能是有限或无限重特征值,而未必是特征值集的点. 正如在 §2 第 5 段里已证明,对于方程

$$\varphi = \lambda B\varphi + f,$$

其中 B 是沃尔泰拉型积分算子,弗雷德霍姆择一定理的第一种情况(对任何 $f\in L_2$ 的可解性)总是成立. 换言之,沃尔泰拉型的积分算子之谱仅由一点 $\mu=0$ 所构成. 联想到 §2 第 4 段末尾,我们曾把谱为点 0 的紧算子称为沃尔泰拉抽象算子. 因此可以说沃尔泰拉积分算子是沃尔泰拉抽象算子,从而说明这套术语是恰当的.

2. 以 λ 的幂级数形式求解. 弗雷德霍姆行列式 方程

$$(I-\lambda A)\varphi = f$$

的解可以形式地写成

$$\varphi = (I-\lambda A)^{-1}f. \tag{2}$$

只要 $\|\lambda A\|<1$,即 $|\lambda|<\frac{1}{\|A\|}$,这个公式的确决定解,因为在这种情况下算子 $(I-\lambda A)^{-1}$存在,在全 H 上有定义并且有界(参看第四章 §5 第 7 段). 这时算子$(I-\lambda A)^{-1}$可以表示成幂级数之和:

$$(I-\lambda A)^{-1} = I+\lambda A+\lambda^2A^2+\cdots+\lambda^nA^n+\cdots,$$

条件 $|\lambda|<1/\|A\|$ 保证该级数(按范数)收敛. 从而方程(1)之解(2)可以写成

$$\varphi = f+\lambda Af+\lambda^2A^2f+\cdots+\lambda^nA^nf+\cdots. \tag{3}$$

如果将方程(1)的解写成幂级数

---

① $\mu=0$ 必定属于 A 之谱,因为 A^{-1}在无穷维 H 里决不会是有界的(参看第四章 §6 第 2 段中定理 2 的推论).

$$\varphi_\lambda = \varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \cdots + \lambda^n\varphi_n + \cdots$$

(其中 φ_n 已不依赖于 λ),也可以得到这个结果. 将这个级数代入方程 $\varphi = \lambda A\varphi + f$ 的右端和左端中的 φ,并令等式两端中 λ 的同次幂的系数相等,我们就得到

$$\varphi_0 = f, \varphi_1 = Af, \cdots, \varphi_n = A\varphi_{n-1} = A^n f, \cdots,$$

即级数(3).

我们来证明,如果 A 是希尔伯特 - 施密特积分算子,即由平方可积核 $K(s,t)$ 所定义的算子,那么算子 $(I-\lambda A)^{-1}$ 对于充分小的 λ 值,可以写成两个算子之和: $I+\lambda\Gamma(\lambda)$,其中 I 是单位算子,而 $\lambda\Gamma(\lambda)$ 是某一含有依赖于参数 λ 的平方可积核的希尔伯特 - 施密特积分算子. 我们首先来阐明用怎样的形式来表示算子 A^2, A^3 等等的核. 为此,让我们来考虑更一般的问题:设给定两个积分算子

$$A\varphi = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, B\varphi = \int_a^b Q(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t = k^2 < \infty, \int_a^b\int_a^b |Q(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t = q^2 < \infty.$$

我们来求算子 AB 之核. 我们有

$$\begin{aligned} AB\varphi &= \int_a^b \left\{K(s,u)\int_a^b Q(u,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u \\ &= \int_a^b \left\{\int_a^b K(s,u)Q(u,t)\,\mathrm{d}u\right\}\varphi(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

根据富比尼定理,这里的积分次序可以交换,因为被积函数

$$K(s,u)Q(u,t)\varphi(t)$$

作为两个平方可和函数

$$K(s,u)\varphi(t) \text{ 和 } Q(u,t)$$

之积,对全体变量 u 和 t 是可和的.

令

$$R(s,t) = \int_a^b K(s,u)Q(u,t)\,\mathrm{d}u. \tag{4}$$

根据柯西 - 布尼亚可夫斯基不等式,有

$$|R(s,t)|^2 \leqslant \int_a^b |K(t,u)|^2\mathrm{d}u \int_a^b |Q(u,t)|^2 \mathrm{d}t,$$

由此

$$\int_a^b\int_a^b |R(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant k^2q^2.$$

这样,两个希尔伯特-施密特型积分算子之积,也是一个含由公式(4)所定义的核的同类型算子. 特别是,令 $A=B$,可见 A^2 是一个含核

$$K_2(s,t)=\int_a^b K(s,u)K(u,t)\,\mathrm{d}u$$

的积分算子. 核 $K_2(s,t)$ 满足条件

$$\int_a^b\int_a^b |K_2(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant \left[\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right]^2 = k^4.$$

由此 $\|A^2\|\leqslant k^2$,其中

$$k^2=\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

类似地,算子 A^n 中的每一个都由核

$$K_n(s,t)=\int_a^b K_{n-1}(s,u)K(u,t)\,\mathrm{d}u \quad (n=2,3,\cdots)$$

所确定. 核 $K_n(s,t)$ 满足条件

$$\int_a^b\int_a^b |K_n(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant k^{2n}. \tag{5}$$

核 $K_n(s,t)$ 称为**叠核**.

当 $|\lambda|<1/k$ 时,根据估计式(5),级数

$$K(s,t)+\lambda K_2(s,t)+\cdots+\lambda^{n-1}K_n(s,t)+\cdots$$

在空间 $L_2([a,b]\times[a,b])$ 中收敛于某一函数 $\Gamma(s,t;\lambda)$,其平方对每个 $|\lambda|<1/k$ 关于 s 和 t 是可和的. 以函数 $\Gamma(s,t;\lambda)$ 为核的积分算子 $\Gamma(\lambda)$,是紧算子的收敛级数

$$A+\lambda A^2+\cdots+\lambda^{n-1}A^n+\cdots \tag{6}$$

之和,从而 $\Gamma(\lambda)$ 为一紧算子.

将这个和乘以 λ 再加上单位算子 I,我们就得到算子 $(I-\lambda A)^{-1}$. 这样,的确当 $|\lambda|<1/k$ 时算子 $(I-\lambda A)^{-1}$ 是单位算子 I 与含核

$$\lambda\Gamma(s,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n K_n(s,t)$$

的紧算子 $\lambda\Gamma(\lambda)$ 之和.

条件 $|\lambda|<1/k$ 是级数(6)收敛的充分条件,但决非必要条件. 在某些情况下这个级数甚至可能对所有的 λ 值都是收敛的. 例如,如果 A 是含满足条件

$$|K(s,t)|\leqslant M$$

的核的沃尔泰拉型算子,那么通过直接计算可以证明,对于叠核 $K_n(s,t)$ 有下列估计式

$$|K_n(s,t)| \leqslant \frac{M^n(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

由此推出级数(6)对任何 λ 都是收敛的.

但是,一般说来,幂级数(6)具有某一有限的收敛半径. 同时对所有的 λ(仅有限个或可数个这样的值除外,即 $1/\lambda$ 是算子 A 的特征值除外),方程 $\varphi=\lambda A\varphi+f$ 都有解. 弗雷德霍姆证明了,对于由有界连续核 $K(s,t)$ 所确定的积分算子 A,方程 $\varphi=\lambda A\varphi+f$ 之解可以用下述方法求出. 引入记号

$$K\begin{pmatrix} s_1\cdots s_n \\ t_1\cdots t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(s_1,t_1)\cdots K(s_1,t_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K(s_n,t_1)\cdots K(s_n,t_n) \end{vmatrix}$$

并用下列函数:

$$D(\lambda) = 1-\lambda\int_a^b K\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_1\end{pmatrix}d\xi_1+\frac{\lambda^2}{2}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \xi_1 & \xi_2\end{pmatrix}d\xi_1 d\xi_2+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix}\xi_1\cdots\xi_n\\ \xi_1\cdots\xi_n\end{pmatrix}d\xi_1\cdots d\xi_n+\cdots, \tag{7}$$

$$D(s,t;\lambda) = K\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}-\lambda\int_a^b K\begin{pmatrix}s & \xi_1\\ t & \xi_1\end{pmatrix}d\xi_1$$
$$+\frac{\lambda^2}{2}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}s & \xi_1 & \xi_2\\ t & \xi_1 & \xi_2\end{pmatrix}d\xi_1 d\xi_2+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix}s\ \xi_1\cdots\xi_n\\ t\ \xi_1\cdots\xi_n\end{pmatrix}d\xi_1\cdots d\xi_n+\cdots. \tag{8}$$

我们分别称所定义的函数 $D(\lambda)$ 和 $D(s,t;\lambda)$ 为**弗雷德霍姆行列式**和**弗雷德霍姆子式**. 那么,对于积分方程

$$\varphi(s) = \lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt+f(s),$$

预解核由公式

$$\Gamma(s,t;\lambda) = \lambda\frac{D(s,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

给出,并且对于所有 λ 值,只要 $1/\lambda$ 不是对应于核 $K(s,t)$ 的积分算子 A 的特征值,解可以写成

$$\varphi(s) = f(s)+\lambda\int_a^b\frac{D(s,t;\lambda)}{D(\lambda)}f(t)\,dt. \tag{9}$$

这时 $D(\lambda)$ 和 $D(s,t;\lambda)$ 是参数 λ 的整解析函数,并且当且仅当 $1/\lambda$ 是积分算子 A 的特征值时 $D(\lambda)=0$. 如卡尔列曼(Carleman)在 1921 年所指出的,弗雷德霍姆在"核 $K(s,t)$ 连续"这一假设下所得到的公式(7),(8)和(9),对任意平方可积核仍然是正确的. 我们不准备在这里介绍公式(9)和公式(7),(8)[①]的推导.

---

① 参看 T. Carleman, Zur Theorie der Integralgleichungen(积分方程论), Math. Zeitschr.(德国数学杂志)9(1921),196—217,也请参看 F. Smithies, The Fredholm theory of integral equations(弗雷德霍姆积分方程论), Duke Math. Journal(美国杜克大学数学杂志),8(1941),107—130.

公式(7),(8)和(9)的推导请参看书[35]和[46].

第十章　线性空间微分学概要

我们在前面各章里所研究的泛函分析的那些问题中，线性泛函和线性算子的概念起着主要的作用. 但是在泛函分析里所产生的某些问题带有本质的非线性特征. 因此有必要在发展“线性”泛函分析的同时，也发展“非线性”泛函分析，即研究无穷维空间里的非线性泛函和非线性算子. 像变分法这样的古典数学领域，实质上属于非线性泛函分析. 还在 17 世纪至 18 世纪，在伯努利(Bernoulli)、欧拉、拉格朗日(Lagrange)的著作中就已奠定了变分法的基础. 可是从整体讲，非线性泛函分析是相当新的，到目前为止尚属远未完善的数学领域. 在本章中，我们阐述非线性泛函分析的某些原始概念，主要涉及微分理论的概念，以及这些概念的某些应用.

§1. 线性空间中的微分法

1. 强微分(弗雷歇(Fréchet)微分)　设 X 和 Y 是两个赋范空间，而 F 是定义在空间 X 中某一开子集 O 上的由 X 作用到 Y 内的映射. 我们称这个映射在给定点 $x \in O$ 处是**可微**的，如果存在这样的有界线性算子 $L_x \in \mathscr{L}(X,Y)$，使得对于任何 $\varepsilon > 0$ 总可以找到 $\delta > 0$，使由不等式 $\| h \| < \delta$ 就可推出不等式

$$\| F(x+h) - F(x) - L_x h \| \leqslant \varepsilon \| h \| . \tag{1}$$

这也可以缩写为

$$F(x+h) - F(x) - L_x h = o(h). \tag{2}$$

由(1)可以推出，在点 x 可微的映射在该点是连续的. 表达式 $L_x h$(对每一 $h \in X$，它显然是空间 Y 的元素)，称为映射 F 在点 x 处的**强微分**(或**弗雷歇微分**).

线性算子 L_x 本身称为映射 F 在 x 点处的**导数**,确切地说,称为映射 F 在 x 点处的**强导数**. 我们将用符号 $F'(x)$ 表示这个导数.

如果映射 F 在点 x 处可微,那么相应的导数是唯一确定的. 事实上,对于算子 $L_i \in \mathscr{L}(X,Y), i=1,2$,等式 $\| L_1 h - L_2 h \| = o(h)$ 仅当 $L_1 = L_2$ 时才可能成立.

现在让我们从导数的定义直接建立某些基本事实.

(1) 如果 $F(x) = y_0 = \text{const}$,那么 $F'(x) \equiv 0$(即 $F'(x)$ 在这种情形是零算子).

(2) 连续线性映射 L 的导数就是这个映射本身:

$$L'(x) = L. \tag{3}$$

事实上,根据定义,有

$$L(x+h) - L(x) = L(h).$$

下列重要结果稍微不够明显.

(3)(复合函数的导数). 设 X,Y,Z 是三个赋范空间,$U(x_0)$ 是点 $x_0 \in X$ 的一个邻域;F 是这个邻域到 Y 内的映射;$y_0 = F(x_0)$;$V(y_0)$ 是点 $y_0 \in Y$ 的一个邻域,而 G 则是这个邻域到 Z 内的映射. 于是,如果映射 F 在点 x_0 可微,而 G 在点 y_0 可微,那么映射 $H = GF$(它在点 x_0 的某一邻域内定义)在点 x_0 可微并且

$$H'(x_0) = G'(y_0) F'(x_0). \tag{4}$$

事实上,根据所作的这些假设,有

$$F(x_0 + \xi) = F(x_0) + F'(x_0)\xi + o_1(\xi)$$

和

$$G(y_0 + \eta) = G(y_0) + G'(y_0)\eta + o_2(\eta).$$

但 $F'(x_0)$ 和 $G'(y_0)$ 是有界线性算子. 因此,有

$$\begin{aligned} H(x_0 + \xi) &= G(y_0 + F'(x_0)\xi + o_1(\xi)) \\ &= G(y_0) + G'(y_0)(F'(x_0)\xi + o_1(\xi)) + o_2(F'(x_0)\xi + o_1(\xi)) \\ &= G(y_0) + G'(y_0)F'(x_0)\xi + o_3(\xi). \end{aligned}$$

(请用 ε 和 δ 的精确计算检验之).

如果 F,G 和 H 是数值函数,那么公式(4)就变为熟知的复合函数微分法则.

(4) 设 F 和 G 是由 X 到 Y 内的两个连续映射. 如果 F 和 G 在点 x_0 可微,那么映射 $F+G$ 和 aF(a 是数)也在该点可微,并且

$$(F+G)'(x_0) = F'(x_0) + G'(x_0) \tag{5}$$

和

$$(aF)'(x_0) = aF'(x_0). \tag{6}$$

事实上,由算子之和的定义以及算子与数相乘的定义,立即得到

$$(F+G)(x_0+h) = F(x_0+h) + G(x_0+h)$$
$$= F(x_0) + G(x_0) + F'(x_0)h + G'(x_0)h + o_1(h)$$

和

$$aF(x_0+h) = aF(x_0) + aF'(x_0)h + o_2(h),$$

由此推出等式(5)和(6).

2. 弱微分(伽托(Gâteaux)微分) 又设 F 是一个由 X 到 Y 内的映射. 所谓映射 F 在点 x(增量为 h)的**弱微分**或**伽托微分**,系指极限

$$DF(x,h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x+th)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{F(x+th)-F(x)}{t},$$

其中收敛应理解为空间 Y 中的依范数收敛.

有时,遵循拉格朗日的说法,把表达式 $DF(x,h)$ 叫做映射 F 在点 x 的初级变分(或第一变分).

弱微分 $DF(x,h)$ 关于 h 不一定是线性的. 如果这样的线性成立,即如果

$$DF(x,h) = F_c'(x)h,$$

其中 $F_c'(x)$ 是一个有界线性算子,那么这个算子称为**弱导数**(或**伽托导数**).

注意,对于弱导数,复合函数的微分法则,一般不成立.(请举例说明之!)

3. 有限增量公式 设 O 是 X 中的一个开集,又设闭区间 $[x_0,x]$ 整个包含在 O 内. 最后设 F 是一个定义在 O 上的由 X 到 Y 内的映射,且在闭区间 $[x_0,x]$ 的每一点有弱导数 F_c'. 令 $\Delta x = x - x_0$ 且取一任意泛函 $\varphi\in Y^*$. 考虑一个定义在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的数值函数

$$f(t) = \varphi(F(x_0+t\Delta x)).$$

这个函数对 t 可微. 事实上,在表达式

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \varphi\left(\frac{F(x_0+t\Delta x+\Delta t\Delta x)-F(x_0+t\Delta x)}{\Delta t}\right)$$

中可以在连续线性泛函 φ 的符号下取极限. 结果就得到

$$f'(t) = \varphi(F_c'(x_0+t\Delta x)\Delta x).$$

对闭区间 $[0,1]$ 上的函数 f 应用有限增量公式,就得到

$$f(1) = f(0) + f'(\theta), \text{其中 } 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

即

$$\varphi(F(x)-F(x_0)) = \varphi(F_c'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x). \tag{7}$$

这个等式对于任何泛函 $\varphi\in Y^*$ 都是成立的(参量 θ 自然与 φ 有关). 由等式(7)得到

$$|\varphi(F(x)-F(x_0))| \leqslant \|\varphi\|\cdot\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\|F_c'(x_0+\theta\Delta x)\|\cdot\|\Delta x\|. \tag{8}$$

现在选取非零泛函 φ,使得

$$\varphi(F(x)-F(x_0)) = \|\varphi\| \cdot \|F(x)-F(x_0)\|$$

(根据哈恩-巴拿赫定理的推论4(参看第四章 §1 第3段),这样的泛函是存在的). 这时由(8)得到

$$\|F(x)-F(x_0)\| \leqslant \sup_{0\leqslant\theta\leqslant1}\|F_c'(x_0+\theta\Delta x)\| \cdot \|\Delta x\| \ (\Delta x = x-x_0). \tag{9}$$

这个不等式可以视为数值函数的有限增量公式的类似公式.

将公式(9)应用于映射

$$x \to F(x) - F_c'(x_0)\Delta x$$

就得到下列不等式:

$$\|F(x)-F(x_0)-F_c'(x_0)\Delta x\|$$
$$\leqslant \sup_{0\leqslant\theta\leqslant1}\|F_c'(x_0+\theta\Delta x)-F_c'(x_0)\| \cdot \|\Delta x\|. \tag{10}$$

4. 弱可微性与强可微性之间的关系 甚至在有限维空间的情形强可微性与弱可微性也是两个不同的概念. 事实上,由分析学熟知,对于数值函数

$$f(x) = f(x_1,\cdots,x_n),$$

当 $n\geqslant2$ 时由导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x+th)$$

对任何固定 $h=(h_1,\cdots,h_n)$ 的存在性,还不能推出这个函数的可微性,即不能推出将其增量 $f(x+h)-f(x)$ 表示成(关于 h 的)线性部分及关于 h 的高于一阶的无穷小量之和的形式.

这里可以选取二元函数

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3x_2}{x_1^4+x_2^2}, & \text{如果}(x_1,x_2)\neq(0,0) \\ 0, & \text{如果}(x_1,x_2)=(0,0), \end{cases} \tag{11}$$

作为最简单的例子. 这个函数在包括点(0,0)在内的全平面上处处连续. 在点(0,0)它的弱微分存在并且等于0,因为

$$\lim_{t\to0}\frac{f(0+th)-f(0)}{t} = \lim_{t\to0}\frac{t^4h_1^3h_2}{(t^4h_1^4+t^2h_2^2)t} = 0.$$

同时这个微分不是函数(11)在点(0,0)的增量的线性主部. 事实上,如果令 $h_2=h_1^2$,那么

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)}{\|h\|}=\lim_{h\to 0}\frac{h_1^5}{2h_1^4\sqrt{h_1^2+h_1^4}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

但是如果映射 F 有强导数,那么它也有弱导数,并且强导数与弱导数完全相同.事实上,对于强可微映射,有

$$F(x+th)-F(x)=F'(x)(th)+o(th)=tF'(x)h+o(th)$$

和

$$\frac{F(x+th)-F(x)}{t}=F'(x)h+\frac{o(th)}{t}\to F'(x)h.$$

我们来阐明,由映射 F 的弱可微性就可推出它的强可微性的那些条件.

定理 1 如果映射 F 的弱导数 $F_c'(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 U 内存在,且在该邻域内是 x 的一个(算子)函数,这个函数在 x_0 连续,那么在该点 x_0 强导数 $F'(x_0)$ 存在并且与弱导数完全相同.

证明 根据 $\varepsilon>0$ 总可以找到 $\delta>0$,使得在 $\|h\|<\delta$ 时下面的不等式成立:

$$\|F_c'(x_0+h)-F_c'(x_0)\|\leqslant\varepsilon.$$

将公式(10)应用于映射 F,就得到

$$\|F(x_0+h)-F(x_0)-F_c'(x_0)h\|$$
$$\leqslant\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\|F_c'(x_0+\theta h)-F_c'(x_0)\|\cdot\|h\|\leqslant\varepsilon\|h\|.$$

从而不等式(1)成立,即证明了强导数 $F'(x_0)$ 的存在,因此也与它的弱导数完全相同.

今后,如不作相反声明,我们将研究强可微映射,这些映射自然也是弱可微映射.

5. 可微分泛函 我们引入了由一个赋范空间 X 到另一个赋范空间 Y 内的可微映射 F. 这样映射的导数 $F'(x)$ 对于每一 x 是一个由 X 到 Y 内的线性算子,即空间 $\mathscr{L}(X,Y)$ 的元素. 特别是,如果 Y 是数轴,那么 F 是在 X 上取实数值的函数,即 F 是泛函. 这时泛函 F 在点 x_0 的导数是(依赖于 x_0 的)线性泛函,即空间 X^* 的元素.

例 在实希尔伯特空间 H 里讨论泛函 $F(x)=\|x\|^2$. 那么

$$\|x+h\|^2-\|x\|^2=2(x,h)+\|h\|^2,$$

量 $2(x,h)$ 乃是这个表达式(关于 h)的线性主部,从而

$$F'(x)=F_c'(x)=2x.$$

习题 在希尔伯特空间里求泛函 $\|x\|$ 的导数.(答案:当 $x\neq 0$ 时为 $x/\|x\|$;当 $x=0$ 时不存在.)

6. 抽象函数 现在假定变元空间 X 为数轴. 使数 x 与某一巴拿赫空间 Y 的元素对应的映射 $F(x)$ 称为**抽象函数**. 抽象函数的导数 $F'(x)$(如果它存在)是空间 Y

的元素(对每一 x)——曲线 $F(x)$ 的切向量. 对于抽象函数(作为数值变元的函数), 弱可微性与强可微性完全相同.

7. 积分 设 F 是一个以 t 为实变元而在巴拿赫空间 Y 里取值的抽象函数. 如果 F 是给定在闭区间 $[a,b]$ 上, 那么可以定义函数 F 在闭区间 $[a,b]$ 上的积分. 这个积分应理解为对应于分割

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$$

的积分和数

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1} - t_k) \tag{12}$$

当 $\max(t_{k+1} - t_k) \to 0$ 时的极限. 积分(显然是 Y 里的元素)用符号

$$\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t \tag{13}$$

表示. 在相当大的程度上类似于对数值函数所进行的推理表明, 闭区间上的连续函数的积分存在, 同时它具有通常的黎曼积分的性质. 在这些性质中值得指出下列一些性质.

(1) 如果 U 是一个由空间 Y 到某一空间 Z 内的固定的线性连续映射, 那么

$$\int_a^b UF(t)\,\mathrm{d}t = U\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) 如果 $F(t)$ 具有形式 $f(t)y_0$, 其中 $f(t)$ 是一个数值函数, 而 y_0 是 Y 里的一个固定元素, 那么

$$\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t = y_0\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(3) $\left\| \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \| F(t) \|\,\mathrm{d}t.$

仍设 X 和 Y 是赋范空间, 而 $\mathbf{BC}(X,Y)$ 是由 X 到 Y 内的所有连续有界[①]映射所构成的线性空间. 在空间 $\mathbf{BC}(X,Y)$ 中可以引入拓扑, 取集

$$U_{n,\varepsilon} = \{F: \sup_{\|x\| \leqslant n} \|F(x)\| < \varepsilon\}$$

作为零映射的邻域. 在由 X 到 Y 内的所有线性连续映射的子空间 $\mathscr{L}(X,Y) \subset \mathbf{BC}(X,Y)$ 上, 这个拓扑与 $\mathscr{L}(X,Y)$ 里由算子范数所给定的常义拓扑完全相同. 设 $J = [x_0, x_0 + \Delta x]$ 是 X 里某一直线段. 假定给定了一个由这条线段到空间 $\mathbf{BC}(X,Y)$ 内的连续映射, 即假设某一连续依赖于向量参量 $x \in J$ 的映射 $F(x) \in \mathbf{BC}(X,Y)$ 与每一点 $x \in J$ 相对应. 于是可以定义 $F(x)$ 沿线段 J 的积分, 令

---

① 映射 $F: X \to Y$ 称为**有界映射**, 如果对于每一有界集 $Q \subset X$, 集 $F(Q)$ 在 Y 里是有界的. 非线性连续映射不一定有界.

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 F(x_0+t\Delta x)(\Delta x)\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

(这里 $F(x_0+t\Delta x)(\Delta x)$ 对于每一 $t\in[0,1]$ 是空间 Y 的元素,而后者是元素 $\Delta x\in X$ 在映射 $F(x_0+t\Delta x)$ 下的象). 显然,公式(14)右端的积分存在,并且是空间 Y 的元素.

我们将这种构造用于由映射的导数来还原映射.

考虑由 X 到 Y 内的映射 F,它在线段 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上有连续地依赖于 x 的强导数 $F'(x)$. 于是积分 $\int_{x_0}^{\tau_0+\Delta x} F'(x)\,\mathrm{d}x$ 存在. 我们来证明等式(广义牛顿 - 莱布尼兹公式):

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x_0+\Delta x) - F(x_0). \tag{15}$$

事实上,根据定义

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} F'(x_0+t_k\Delta x)(\Delta x)(t_{k+1}-t_k)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k)(\Delta x_k),\end{aligned}$$

其中

$$x_k = x_0 + t_k\Delta x,\ \Delta x_k = (t_{k+1}-t_k)\Delta x, \text{而}\ \delta = \max_k (t_{k+1}-t_k).$$

但是与此同时对于线段 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的任何分割,有

$$\begin{aligned}F(x_0+\Delta x) - F(x_0) &= \sum_{k=0}^{n-1}[F(x_0+t_{k+1}\Delta x) - F(x_0+t_k\Delta x)]\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}[F(x_{k+1}) - F(x_k)].\end{aligned}$$

根据公式(10)就得到

$$\begin{aligned}&\left\| \sum_{k=0}^{n-1}[F(x_{k+1}) - F(x_k) - F'(x_k)\Delta x_k] \right\|\\ &\leqslant \|\Delta x\| \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\sup_\theta \|F'(x_k+\theta_k\Delta x_k) - F'(x_k)\|.\end{aligned} \tag{16}$$

因为导数 $F'(x)$ 是连续的,从而在线段 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上一致连续,当线段 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 的分割无限变细时,不等式(16)的右端趋近于零,由此推出等式(15).

8. 高阶导数 设 F 是一个由 X 到 Y 内的可微映射. 它的导数 $F'(x)$ 对于每一 $x\in X$ 是 $\mathscr{L}(X,Y)$ 里的元素,即 F' 是一个由空间 X 到线性算子空间 $\mathscr{L}(X,Y)$ 内的映射,如果这个映射是可微的,那么它的导数称为映射 F 的**二阶导数**并且用符号 F'' 来表示. 这样一来,$F''(x)$ 是由 X 到 $\mathscr{L}(X,Y)$ 内的线性算子所构成的空间 $\mathscr{L}(X,\mathscr{L}(X,Y))$ 中的元素. 我们来证明,这个空间的元素容许用所谓双线性映射来更方便而直观地解释.

我们说给定了一个由空间 X 到空间 Y 内的**双线性映射**，如果 X 里的每一对有序的元素 x,x' 与元素 $y=B(x,x')\in Y$ 建立了对应关系，并且能满足下列条件：

1）对于 X 里的任何 x_1,x_2,x'_1,x'_2 和任何实数 α,β，下列等式成立：

$$B(\alpha x_1+\beta x_2,x'_1)=\alpha B(x_1,x'_1)+\beta B(x_2,x'_1),$$

$$B(x_1,\alpha x'_1+\beta x'_2)=\alpha B(x_1,x'_1)+\beta B(x_1,x'_2);$$

2）对于所有的 $x,x'\in X$，存在这样的正数 M，使得

$$\|B(x,x')\|\leqslant M\|x\|\cdot\|x'\|. \tag{17}$$

第一个条件表明，映射 B 对它的两个变元的每一个都是线性的；不难证明，第二个条件等价于 B 对全体变元的连续性.

满足条件(17)的最小数 M，称为双线性映射 B 的**范数**，并且用符号 $\|B\|$ 表示.

双线性映射的线性运算，按通常的方式定义并且具有通常的性质. 这样一来，空间 X 到空间 Y 内的双线性映射本身就构成了一个线性赋范空间，我们用 $B(X^2,Y)$ 表示它. 当 Y 是一个完备空间时，$B(X^2,Y)$ 也是完备空间.

$\mathscr{L}(X,\mathscr{L}(X,Y))$ 空间里的每一元素 A，可以与 $B(X^2,Y)$ 里的元素建立对应关系，为此只需令

$$B(x,x')=(Ax)x'. \tag{18}$$

显然，这个对应关系是线性的. 我们来证明，它也是等距对应，并且将空间 $\mathscr{L}(X,\mathscr{L}(X,Y))$ 映射到全空间 $B(X^2,Y)$ 上. 事实上，如果 $y=B(x,x')=(Ax)x'$，那么

$$\|y\|\leqslant\|Ax\|\cdot\|x'\|\leqslant\|A\|\cdot\|x\|\cdot\|x'\|,$$

由此

$$\|B\|\leqslant\|A\|. \tag{19}$$

另一方面，如果给定了双线性映射 B，那么对于固定的 $x\in X$，映射 $x'\to(Ax)x'=B(x,x')$ 是空间 X 到空间 Y 内的线性映射.

这样一来，每一 $x\in X$ 与空间 $\mathscr{L}(X,Y)$ 的元素 Ax 相对应，显然 Ax 线性依赖于 x，即双线性映射 B 确定了空间 $\mathscr{L}(X,\mathscr{L}(X,Y))$ 的某一元素 A. 这时，显然映射 B 由公式(18)还原为 A，且

$$\|Ax\|=\sup_{\|x'\|\leqslant 1}\|(Ax)x'\|=\sup_{\|x'\|\leqslant 1}\|B(x,x')\|\leqslant\|B\|\cdot\|x\|,$$

由此

$$\|A\|\leqslant\|B\|. \tag{20}$$

对比(19)和(20)，就得到 $\|A\|=\|B\|$. 这样，由等式(18)所确定的 $B(X^2,Y)$ 与 $\mathscr{L}(X,\mathscr{L}(X,Y))$ 之间的对应关系，是线性的并且是等距的，从而是一一对应的. 这时空间 $\mathscr{L}(X,\mathscr{L}(X,Y))$ 的象就是整个 $B(X^2,Y)$.

我们已阐明了二阶导数 $F''(x)$ 是空间 $\mathscr{L}(X,\mathscr{L}(X,Y))$ 的元素. 按刚才所说过

的,我们可以认为 $F''(x)$ 是空间 $B(X^2,Y)$ 的元素.

让我们来考察一个初等例子. 设 X 和 Y 分别是维数为 m 和 n 的有限维欧几里得空间. 那么 X 到 Y 内的每一线性映射,可以用某一$(n\times m)$矩阵给出. 这样一来,由 X 到 Y 内的映射 F 的导数 $F'(x)$ 是(依赖于 $x\in X$ 的)矩阵. 如果在 X 和 Y 里选定基,比如说

$$e_1,\cdots,e_m\in X \text{ 和 } f_1,\cdots,f_n\in Y,$$

那么

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_me_m,\ y = y_1f_1 + y_2f_2 + \cdots + y_nf_n.$$

于是映射 $y=F(x)$ 可以写成下列形式

$$y_1 = F_1(x_1,\cdots,x_m),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = F_n(x_1,\cdots,x_m),$$

而

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

在这种情况下,二阶导数 $F''(x)$ 就由 $n\times m\times m$ 个量 $a_{k,ij}=\dfrac{\partial^2 y_k}{\partial x_i\partial x_j}$来确定. 这样的量 $a_{k,ij}$的全体可以认为是,由公式

$$b_{k,j} = \sum_{i=1}^{m} a_{k,ij}x_i$$

所确定的空间 X 到空间 $\mathscr{L}(X,Y)$ 内的线性映射,或由公式

$$y_k = \sum_{i,j=1}^{m} a_{k,ij}x_ix'_j$$

所确定的空间 X 到空间 Y 内的双线性映射.

显然,可以引入由 X 到 Y 内映射 F 的三阶、四阶和一般 n 阶导数的概念:n 阶导数定义为$(n-1)$阶导数的导数. 这时,n 阶导数显然是 $\mathscr{L}(X,\mathscr{L}(X,\cdots,\mathscr{L}(X,Y)))$ 空间的元素. 重复对二阶导数所进行的推理,可以将这个空间的每一元素以极自然地与 X 到 Y 的 n 线性映射的空间 $N(X^n,Y)$ 的元素建立对应关系. 这时 n 线性映射应理解为 X 里的有序数组$(x',x'',\cdots,x^{(n)})$与空间 Y 的元素之间这样的对应关系 $y=N(x',x'',\cdots,x^{(n)})$. 当其余的元素固定时,$y=N(x',x'',\cdots,x^{(n)})$关于每一个 x^i 都

是线性的，并且对某一 $M>0$ 满足条件

$$\| N(x',x'',\cdots,x^{(n)}) \| \leqslant M \| x' \| \cdot \| x'' \| \cdots \| x^{(n)} \|.$$

这样一来，映射 F 的 n 阶导数可以认为是空间 $N(X^n,Y)$ 的元素.

9. 高阶微分　我们定义了映射 F 的（强）微分，即线性算子 $F'(x)$ 作用于元素 $h\in X$的结果：$\mathrm{d}F=F'(x)h$. 二阶微分定义为 $d^2F=F''(x)(h,h)$，即对应于映射 $F''(x)\in B(X^2,Y)$ 的二次表达式. 类似地，n 阶微分指 $d^nF=F^{(n)}(x)(h,h,\cdots,h)$，即在从空间 $X\times X\times\cdots\times X=X^n$ 到空间 Y 的映射 $F^{(n)}(x)$下，元素$(h,h,\cdots,h)\in X^n$ 在空间 Y 中的象.

10. 泰勒（Taylor）公式　映射 F 的强可微性表示，差 $F(x+h)-F(x)$可以表示成线性项与 $\|h\|$ 的高于一阶的无穷小项之和. 与数值函数的泰勒公式类似的公式，是这个事实的推广.

定理 2　设 F 是由 X 到 Y 内的映射，定义在某一区域 $O\subset X$ 内，而 $F^{(n)}(x)$在 O 内存在且是 x 的一致连续函数. 那么下列等式成立：

$$F(x+h)-F(x)=F'(x)h+\frac{1}{2!}F''(x)(h,h)+\cdots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h,h,\cdots,h)+\omega(x,h), \tag{21}$$

其中 $\|\omega(x,h)\|=o(\|h\|^n)$.

证明　用归纳法来证明. 当 $n=1$ 时等式(21)是平凡的. 对于任意固定的 n，假设对于满足定理条件的映射（在相应条件中均以 $n-1$ 代换 n），在(21)式中将 n 换成 $n-1$ 后所得等式已经得证. 那么，对于映射 F'，有

$$F'(x+h)=F'(x)+F''(x)h+\frac{1}{2!}F'''(x)(h,h)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n)}(x)(h,\cdots,h)+\omega_1(x,h), \tag{22}$$

其中 $\|\omega_1(x,h)\|=o(\|h\|^{n-1})$. 将等式(22)两端在闭区间$[x,x+h]$上进行积分并利用牛顿－莱布尼兹公式(15)，我们就得到

$$\begin{aligned}F(x+h)-F(x)&=\int_0^1 F'(x+th)h\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\{F'(x)+tF''(x)h+\frac{1}{2!}t^2F'''(x)(h,h)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}F^{(n)}(x)(h,\cdots,h)\}h\mathrm{d}t+R_n,\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $R_n=\int_0^1\omega_1(x,th)h\mathrm{d}t$.

由(23)．得到

$$F(x+h)-F(x)$$
$$=F'(x)h+\frac{1}{2!}F''(x)(h,h)+\cdots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h,\cdots,h)+R_n,$$

并且

$$\|R_n\| \leqslant \int_0^1 \|\omega_1(x,th)\| \cdot \|h\| \mathrm{d}t = o(\|h\|^n).$$

从而证明了我们的结论.

公式(21)称为关于**映射的泰勒公式**.

§2. 隐函数定理及其某些应用

1. 隐函数定理 古典分析里有各种各样应用的重要定理之一,就是隐函数定理. 我们现在来证明,对数值函数无需作重大修改,就可以将这个定理移植到任意的巴拿赫空间的映射上去.

定理 1 设 X,Y,Z 是巴拿赫空间,U 是点$(x_0,y_0)\in X\times Y$ 的一个邻域,而 F 是 U 到 Z 内的映射,具有下列性质:

(1) F 在点(x_0,y_0)连续;

(2) $F(x_0,y_0)=0$;

(3) 偏导数 $F_y'(x,y)$在 U 内存在且在点(x_0,y_0)连续,而算子 $F_y'(x_0,y_0)$有有界逆算子.

那么方程 $F(x,y)=0$ 在点(x_0,y_0)的某一邻域内可解. 这可以确切地表述如下: 存在这样的 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$ 以及这样的映射

$$y=f(x), \tag{1}$$

它在 $\|x-x_0\|<\delta$ 时有定义,在点 x_0 连续,并且满足 $\|x-x_0\|<\delta$ 和 $y=f(x)$的每一对(x,y)都满足方程

$$F(x,y)=0. \tag{2}$$

反之,满足方程(2)、条件 $\|x-x_0\|<\delta$ 和 $\|y-y_0\|\leqslant\varepsilon$ 的每一对(x,y),满足(1).

证明 用 $U_{(x)}\subset Y$ 表示对于给定的 x 使$(x,y)\in U$ 的 y 的全体. 我们将假定 $\|x-x_0\|$ 是这样地小,致使 $y_0\in U_{(x)}$,并且考虑定义在 $U_{(x)}$ 上的映射 $A_{(x)}$:

$$A_{(x)}y=y-[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y). \tag{3}$$

显然,方程

$$A_{(x)}y=y$$

等价于方程 $F(x,y)=0$.

为了证明方程(3)的解存在,我们应用压缩映射原理. 为了这个目的我们来证

明,对于每一充分小的 $\varepsilon>0$ 总可以找到这样的 $\delta>0$,使得当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时映射 $A_{(x)}$ 是一个压缩映射并且将球 $\|y-y_0\|\leqslant\varepsilon$ 变为它自己. 我们从计算和估计映射 $A_{(x)}$ 的导数的范数着手. 根据 §1 公式(3) ~ (5)有

$$\begin{aligned} A'_{(x)}(y) &= I-[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F'_y(x,y) \\ &= [F'_y(x_0,y_0)]^{-1}[F'_y(x_0,y_0)-F'_y(x,y)]. \end{aligned}$$

根据导数 F'_y 在点 (x_0,y_0) 的连续性,可以这样选取 ε 和 δ 使得

$$\|A'_{(x)}(y)\| \leqslant q < 1.$$

根据有限增量公式,这个不等式表明,对于任何满足不等式 $\|x-x_0\|<\delta$ 的 x,由空间 Y 到球 $\|y-y_0\|\leqslant\varepsilon$ 上的映射 $A(x)$ 是个压缩映射. 现在来估计 $\|A_{(x)}y_0-y_0\|$. 我们有

$$\begin{aligned} \|A_{(x)}y_0-y_0\| &\leqslant \|[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\|\cdot\|F(x,y_0)\| \\ &= \|[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\|\cdot\|F(x,y_0)-F(x_0,y_0)\|. \end{aligned}$$

由于映射 F 在点 (x_0,y_0) 的连续性,可以这样选取 δ,使后一表达式任意小. 设 $\delta>0$ 充分小,使当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时,有

$$\|A_{(x)}y_0-y_0\| < \varepsilon(1-q).$$

我们来验证,对于这样选取的 δ,映射 $A_{(x)}$ 将闭球 $\|y-y_0\|\leqslant\varepsilon$ 变为它自己. 事实上,如果 $\|x-x_0\|<\delta$ 和 $\|y-y_0\|\leqslant\varepsilon$,那么由有限增量公式就得到

$$\begin{aligned} \|A_{(x)}y-y_0\| &\leqslant \|A_{(x)}y_0-y_0\| + \|A_{(x)}y-A_{(x)}y_0\| \\ &\leqslant \varepsilon(1-q) + \sup_{0\leqslant\theta\leqslant1}\|A'_{(x)}(y_0+\theta(y-y_0))\|\cdot\|y-y_0\| \\ &\leqslant \varepsilon(1-q)+\varepsilon q = \varepsilon. \end{aligned}$$

这样,当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时映射 $A_{(x)}$ 将闭球 $\|y-y_0\|\leqslant\varepsilon$ 变为它自己,且在该球上是一个压缩映射. 这表示,在该球内存在一个唯一的不动点 $y^*=f(x)$,即满足下列等式的点:

$$y^* = y^*-[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y^*).$$

因此根据定理的条件 3,有

$$F(x,y^*) = 0.$$

映射 f 就是所求的映射. 事实上,方程(2)的正确性已经验证了. 等式 $f(x_0)=y_0$ 可由映射 $A_{(x_0)}$ 的不动点的唯一性推出;而所构造的函数 f 的连续性,可从上面所进行的推理中量 ε 可以取得任意小推出.

注　不难证明,如果在定理 1 中假定映射 F 在邻域 U 内连续(而不是仅在点 (x_0,y_0) 连续),那么相应的映射 f 将在点 x_0 的某一邻域内连续.

下面的定理确定了由形如 $F(x,y)=0$ 的方程所定义的函数可微的条件.

定理 2 设满足定理 1 的条件,此外再设偏导数 F'_x 在 U 内存在,在点 (x_0,y_0) 连续. 于是映射 f 在点 x_0 可微且

$$f'(x_0) = -[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F'_x(x_0,y_0). \tag{4}$$

证明 用 Λ 表示(4)式右端的表达式. 它是由 X 到 Y 内的线性算子. 我们来证明,这个算子是映射 f 在点 x_0 的导数,这意味着要证明:对于每一 $\varepsilon>0$ 存在这样的 $\delta>0$ 使得对于任何满足条件 $\|x-x_0\|<\delta$ 的 x,下面的不等式成立:

$$\|f(x)-f(x_0)-\Lambda(x-x_0)\| < \varepsilon\|x-x_0\|. \tag{5}$$

令 $f(x)=y$,再用 y_0 替换 $f(x_0)$,而算子 Λ 则用它的表达式(4)来替换,就有

$$\begin{aligned}
&f(x)-f(x_0)-\Lambda(x-x_0)\\
&\quad= y-y_0+[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)\\
&\quad= [F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\{F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\}.
\end{aligned}$$

但 $F(x,y)=F(x_0,y_0)=0$,因此借助于有限增量公式就得到这样的估计

$$\begin{aligned}
&\|f(x)-f(x_0)-\Lambda(x-x_0)\|\\
&\leqslant \|[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\|\times\\
&\quad\|\{F(x,y)-F(x_0,y_0)-F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\}\|\\
&\leqslant \|[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\|\times\\
&\quad\Big[\sup_{0<\theta,\theta_1<1}\|F'_x(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta_1(y-y_0))-\\
&\quad F'_y(x_0,y_0)\|\cdot\|x-x_0\|+\\
&\quad\sup_{0<\theta,\theta_1<1}\|F'_y(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta_1(y-y_0))-F'_y(x_0,y_0)\|\cdot\\
&\quad\|y-y_0\|\Big]\\
&\leqslant \eta[\|x-x_0\|+\|y-y_0\|].
\end{aligned}$$

根据导数 F'_x 和 F'_y 的连续性,只要量 δ 充分小,就可以使上式中 η 变得任意小. 这样一来,我们得到了

$$\begin{aligned}
\|f(x)-f(x_0)-\Lambda(x-x_0)\| &\leqslant \eta[\|x-x_0\|+\|f(x)-f(x_0)\|]\\
&\leqslant \eta[\|x-x_0\|+\|\Lambda(x-x_0)\|+\|f(x)-f(x_0)-\Lambda(x-x_0)\|].
\end{aligned}$$

由此对于充分小的 η 就得到

$$\|f(x)-f(x_0)-\Lambda(x-x_0)\| \leqslant \eta(1-\eta)^{-1}(1+\|\Lambda\|)\|x-x_0\|,$$

而为了证明不等式(5)剩下只需这样选取 η,使得 $\eta(1-\eta)^{-1}(1+\|\Lambda\|)\leqslant\varepsilon$. 定理得证.

现在我们来讨论隐函数定理的某些应用.

2. 微分方程解对初始数据的依赖性定理　考虑下列微分方程的柯西问题:

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=f(t,x),\ x(t_0)=x_0, \tag{6}$$

其中 $f(t,x)$ 和 x 是某一巴拿赫空间 E 的元素. 问题(6)与积分方程

$$x(t)-x_0-\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau=0 \tag{7}$$

等价. 将这个方程写为 $F(x_0,x(t))=0$. 这样一来,F 是一个算子,它将空间 E 与在 E 里取值的连续可微函数的空间 $C_E^1[t_0,t_1]$ 的直和,映射到空间 $C_E^1[t_0,t_1]$ 内. 如果函数 $f(t,x)$ 连续且有对 (t,x) 的连续导数,那么表达式

$$x(t)-\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau$$

定义了一个将空间 $C_E^1[t_0,t_1]$ 变为自己的可微映射. 从而,$F(x_0,x(t))$ 也是对 $x(t)$ 可微的算子,又因为 x_0 是出现在 $F(x_0,x(t))$ 中的一加项,所以 F 在 $E\times C_E^1[t_0,t_1]$ 上是可微函数. 这个函数对 x 的微分为

$$F'_x h=h(t)-\int_{t_0}^{t}f'_x(\tau,x(\tau))h(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

这个等式右端定义了一个将 $C_E^1[t_0,t_1]$ 映射为自己的算子. 这个算子是可逆算子. 事实上,对任何函数 $y(t)\in C_E^1[t_0,t_1]$ 方程

$$F'_x h(t)=y(t)$$

或

$$h(t)-\int_{t_0}^{t}f'_x(\tau,x(\tau))h(\tau)\mathrm{d}\tau=y(t),$$

与附有初值条件为 $h(t_0)=y(t_0)$ 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}-f'_x(t,x(t))h(t)=y'(t) \tag{9}$$

等价.

方程(9)是一个含连续系数的线性方程,因此根据熟知的定理(参看[24])这个方程在整个闭区间 $[t_0,t_1]$ 上有唯一解并且满足上面所指出的初值条件,而这就表明算子 F'_x 的可逆性.

所得结果表明,可以将隐函数定理应用于方程

$$F(x_0, x(t)) = 0.$$

根据这个定理,给定方程的解 $x = x(t)$ 可以视为可变初值 x_0 的函数:$x = x(t, x_0)$,它以可微的形式依赖于 x_0. 特别是,若取 E 为一有限维空间,则我们就得到关于"微分方程组的解连续可微地依赖于初值条件"这一通常的定理.

基于隐函数定理,用类似的方法就可以得到微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x, \alpha)$$

之解可微地依赖于参数 α 的结论,只要它的右端是可微地依赖于 α.

3. 切流形. 刘斯切尔尼克(Люстерник)定理 作为隐函数定理的另一个应用,我们来研究下面的问题. 设 $F(x)$,其中 $x = (x_1, x_2)$,是平面上的一个可微函数. 方程 $F(x) = 0$ 确定了平面上某一曲线 C. 设 x_0 是这条曲线的一个点. 曲线 C 在给定点的切线,或者是定义为形如 $x_0 + th$ 的向量的全体,其中 h 是垂直于向量 $F'(x_0)$(即函数 F 在点 x_0 的梯度)的向量;或者是定义为点 $x_0 + th$ 的全体,这些点到曲线 C 的距离是 t 的高于一阶的无穷小. 刘斯切尔尼克定理的内容,是切线两种定义的等价性对于任意的巴拿赫空间中的流形也是成立的. 我们现在引入为确切陈述相应的定理所必需的某些概念和记号.

设 X 和 Y 是巴拿赫空间,而 F 是空间 X 到空间 Y 内的映射. 其次,设 M_0 是 X 里满足方程 $F(x) = 0$ 的点的全体,而 $x_0 \in M_0$. 假定映射 F 在点 x_0 的某一邻域 U 内连续可微. 我们称映射 F 在点 x_0 是**正则的**,如果线性算子 $F'(x_0)$ 将空间 X 映射到全空间 Y.

用 T_0 表示满足条件 $F'(x_0)h = 0$ 的元素 $h \in X$ 的全体,即 $T_0 = \mathrm{Ker}F'(x_0)$. 显然,$T_0$ 是 X 的子空间. 用 T_{x_0} 来表示这个子空间平移一向量 x_0,即流形 $x_0 + T_0$. 称 T_{x_0} 为**在点 x_0 与集 M_0 相切的线性流形**. 下面的定理成立.

定理 3(刘斯切尔尼克) 在上面所指出关于 F 的条件下,元素 $x_0 + h$ 属于切流形 T_{x_0} 的充要条件为:元素 $x_0 + th$ 到集 M_0 的距离是 t 的高于一阶的无穷小量.

这个定理在最优控制问题里起着非常重要的作用. 作为一种工具,就可以利用它将有名的求条件极值的拉格朗日乘子法,推广到巴拿赫空间中极为广泛的极值问题上去.

这些问题的任何完全的阐述,都超出了本书的范围(关于这一问题,例如可以参看约飞(Иоффе)和季霍米洛夫(Тихомиров)合著的书《极值问题的理论》,莫斯科,科学出版社,1974). 我们仅限于对所谓的"可展"情形引入刘斯切尔尼克定理的证明. 在这种情形下刘斯切尔尼克定理几乎可以由隐函数定理直接推出. 具体地说,假定在其上定义了映射 F 的空间 X,可展为子空间 $T_0 = \mathrm{Ker}F'(x_0)$ 与某一空间 T_ξ 的直和

$$X = T_0 \oplus T_\xi.$$

（必须指出，与希尔伯特空间不一样，在巴拿赫空间中，不是每一子空间都有直补子空间. 此外，可以证明，如果在空间 X 中每一线性子空间都有直补子空间，那么 X 是一个希尔伯特空间.）

这时定理 3 的假设可以用下面更确切的方式来陈述.

定理 4　如果

$$X = T_0 \oplus T_\xi$$

而映射 $F:X \to Y$ 满足上面所指出的条件，那么存在这样一个从 M_0 中点 x_0 的邻域映射到 T_{x_0} 中同一点的邻域的同胚映射，使得彼此相对应的点之间的距离是比它们到点 x_0 的距离更高阶的无穷小量.

证明　用 A 表示算子 $F'(x_0)$ 在子空间 T_ξ 上的限制，即

$$A\xi = F'(x_0)\xi, \text{若 } \xi \in T_\xi.$$

我们来证明，A 将子空间 T_ξ 映射到全空间 Y 上. 事实上，根据条件 X 里的每一元素具有如下形式

$$x = h + \xi, \quad h \in T_0, \quad \xi \in T_\xi.$$

因此

$$F'(x_0)x = F'(x_0)(h + \xi) = F'(x_0)\xi = A\xi, \tag{10}$$

因为 $F'(x_0)h = 0$. 但根据条件 $F'(x_0)$ 将空间 X 映射到全空间 Y 上，而这表示，当 ξ 跑遍 T_ξ 时 $A\xi$ 跑遍全空间 Y，其次，映射

$$A: T_\xi \to Y$$

是一一对应的，因为，如果 $A\xi_1 = A\xi_2$，即 $F'(x_0)(\xi_1 - \xi_2) = 0$，那么 $\xi_1 - \xi_2 \in T_0$，由此 $\xi_1 - \xi_2 = 0$. 这样，算子 A 是可逆的，而根据巴拿赫定理逆算子 A^{-1} 是线性的并且是有界的.

若将每一元素 $x \in X$ 表示成

$$x = x_0 + h + \xi, h \in T_0, \xi \in T_\xi,$$

则可以将定义流形 M 的方程 $F(x) = 0$ 改写成

$$\Phi(h, \xi) = F(x_0 + h + \xi) = 0.$$

这个函数在点 $(0,0)$ 对应于第二变元 ξ 的增量 $\Delta\xi$ 的偏微分具有下述形式

$$\Phi'_\xi(0,0)\Delta\xi = F'(x_0)\Delta\xi = A\Delta\xi.$$

算子 $A = \Phi'_\xi(0,0)$ 有逆算子，因此根据隐函数定理，方程 $\Phi(h,\xi) = 0$ 在点 $(0,0)$ 的某

一邻域内与形如

$$\xi = \psi(h)$$

的方程等价,这里 $\psi(h)$ 是一个满足条件 $\psi(0)=0$ 的可微映射.

我们证明了,每一充分靠近点 x_0 的点 $x \in M_0$ 具有下列形式

$$x = x_0 + h + \psi(h),h \in T_0,\psi(h) \in T_\xi.$$

从而构造出映射

$$x_0 + h \leftrightarrow x_0 + h + \psi(h),$$

它将 T_{x_0} 中点 x_0 的某一邻域映射到 M_0 中同一点的邻域. 这个映射是一一对应的并且是连续的. 剩下只需证明,彼此对应的点之间的距离,即量 $\|\psi(h)\|$ 是 $\|h\|$ 的高阶无穷小量.

对等式 $\Phi(h,\psi(h))=0$ 微分,得

$$\Phi'_h(0,0)h + \Phi'_\xi(0,0)\psi'(0)h$$

$$= \Phi'_h(0,0)h + A\psi'(0)h = 0.$$

由此

$$\psi'(0)h = -A^{-1}\Phi'_h(0,0)h = -A^{-1}F'(x_0)h = 0.$$

因此等式

$$\psi(h) = \psi(0) + \psi'(0)h + o(\|h\|)$$

右端头两项都等于零,即

$$\psi(h) = o\|h\|,$$

这就是所要求证的. 定理得证.

§3. 极值问题

非线性泛函分析的最古老和研究得最深入的分支之一就是求泛函的极值. 这样的一些问题的研究构成了所谓**变分法**的内容. 变分法中大多数方法与要求极值的那些泛函的特殊形式有密切联系. 但是,对那些或多或少任意的泛函,也可以表述某些一般方法和结果. 我们在这里不打算对变分方法作任何完全的阐述,仅限于简短地讨论一下作为变分法基础的一般理论的要点.

1. 极值的必要条件 设 F 是某一定义在巴拿赫空间 X 上的实泛函. 我们说泛函 F **在点** x_0 **达到极小值**,如果对于所有充分接近 x_0 的 x,满足不等式 $F(x)-F(x_0)\geqslant 0$. 类似地定义泛函的极大值. 如果在给定点 x_0 泛函 F 达到极小值或极大

值,那么我们就说,在这一点泛函 F **有极值**.

许多物理和力学问题,都可以归结为求这样的或那样的泛函的极值.

对于 n 元函数,熟知下述极值必要条件:如果函数 f 在点 $x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 可微且在该点有极值,那么在该点 $\mathrm{d}f=0$,这等价于

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}=0.$$

这个条件很容易推广到任意赋范空间的泛函上去.

定理 1 可微泛函 F 在点 x_0 达到极值的必要条件是,对于所有的 h,它的微分在该点等于零:

$$F'(x_0)h\equiv 0.$$

换言之,泛函 F 在点 x_0 有极值的必要条件是

$$F'(x_0)=0.$$

证明 根据可微的定义,有

$$F(x_0+h)-F(x_0)=F'(x_0)h+o(h). \tag{1}$$

如果对某一 h,$F'(x_0)h\neq 0$,那么对于充分小的实数 λ 整个表达式 $F'(x_0)(\lambda h)+o(\lambda h)$ 的符号就与它的主项 $F'(x_0)(\lambda h)$ 的符号完全相同. 但 $F'(x_0)$ 是线性泛函,因此 $F'(x_0)(\lambda h)=\lambda F'(x_0)h$. 从而,如果 $F'(x_0)\neq 0$,那么当 h 的值任意小时,表达式(1)既可取正值又可取负值,即在点 x_0 不可能有极值.

考察某些例子.

例 1 设

$$F(x)=\int_a^b f(t,x(t))\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

其中 f 是一个连续可微函数. 在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数的空间 $C[a,b]$ 里讨论的这个泛函是可微的. 事实上

$$\begin{aligned}&F(x+h)-F(x)\\&=\int_a^b [f(t,x(t)+h(t))-f(t,x(t))]\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^b f'_x(t,x(t))h(t)\,\mathrm{d}t+o(h).\end{aligned}$$

由此

$$\mathrm{d}F=\int_a^b f'_x(t,x(t))h(t)\,\mathrm{d}t.$$

这个线性泛函对所有的 $h \in C[a,b]$ 都等于零,表明 $f'_x(t,x(t))=0$. 事实上,对于每一 $x(t)\in C[a,b]$,导数 $f'_x(t,x(t))$ 是 t 的连续函数. 如果在某一点 t_0 它不等于零,比如说 $f'_x(t_0,x(t_0))>0$,那么这个不等式在点 t_0 的某一邻域 (α,β) 内也成立,那么,令

$$h(t)=\begin{cases}(t-\alpha)(\beta-t), \text{当 } \alpha\leqslant t\leqslant\beta \text{ 时},\\ 0, \text{当 } t \text{ 为其他的值时},\end{cases}$$

就得到

$$\int_a^b f'_x(t,x)h(t)\,\mathrm{d}t>0.$$

所得到的矛盾就证明了我们的结论. 一般说来,方程 $f'_x(t,x)=0$ 决定某一曲线,在其上泛函(2)可能达到极值.

例 2 在同一空间 $C[a,b]$ 上考虑泛函

$$F(x)=\int_a^b\int_a^b K(\xi_1,\xi_2)x(\xi_1)x(\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2, \tag{3}$$

其中 $K(\xi_1,\xi_2)$ 是一个满足条件 $K(\xi_1,\xi_2)=K(\xi_2,\xi_1)$ 的连续函数. 不难计算这个泛函的微分,它等于

$$\mathrm{d}F=2\int_a^b\int_a^b K(\xi_1,\xi_2)x(\xi_1)h(\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2.$$

如果对于每一 $h\in C[a,b]$,这个表达式等于零,那么根据例 1 中的推理,对所有的 ξ_2, $a\leqslant\xi_2\leqslant b$,有

$$\int_a^b K(\xi_1,\xi_2)x(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1=0.$$

这个方程解之一是函数 $x\equiv 0$. 至于要回答在这一点是否有极值以及是否存在其他的一些可能有极值的点的问题,与函数 $K(\xi_1,\xi_2)$ 的形式有关,并且要求作进一步的研究.

例 3 考虑定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数空间 $C^1[a,b]$ 上的泛函

$$F(x)=\int_a^b f(t,x(t),x'(t))\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

这里 $x'(t)=\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$,而 $f(t,x,x')$ 是对其变元二次可微的函数. 泛函(4)在许多变分法问题中起主要的作用. 我们来求出它的微分. 利用泰勒公式就得到

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^b[f(t,x+h,x'+h')-f(t,x,x')]\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b(f'_x h+f'_{x'}h')\mathrm{d}t+o(\|h\|),$$

其中 $\|h\|$ 是作为空间 $C^1[a,b]$ 的元素的函数 h 的范数. 这样,泛函(4)有极值的必要条件具有下列形式

$$\mathrm{d}F=\int_a^b(f'_x h+f'_{x'}h')\mathrm{d}t=0. \tag{5}$$

在这种积分形式下,用这个条件来求在其上达到极值的函数 x 是很不适宜的. 我们将它变换为更方便的形式. 为此,对(5)中的项 $f'_{x'}h'$ 进行分部积分①. 我们得到

$$\int_a^b f'_{x'}h'\mathrm{d}t=f'_{x'}h\Big|_a^b-\int_a^b h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'_{x'}\mathrm{d}t.$$

这样一来

$$\mathrm{d}F=\int_a^b\left(f'_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'_{x'}\right)h\mathrm{d}t+f'_{x'}h\Big|_a^b=0. \tag{6}$$

这个等式对于所有的 h(包括使 $h(a)=h(b)=0$ 的 h 在内)都应满足. 从而,对于所有使 $h(a)=h(b)=0$ 的 h 都有

$$\int_a^b\left(f'_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'_{x'}\right)h\mathrm{d}t=0.$$

由此,根据一些类似于例 1 中所进行的推理就得到

$$f'_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'_{x'}=0. \tag{7}$$

因此等式(6)简化为

$$f'_{x'}h\Big|_a^b=0. \tag{8}$$

如果泛函(4)限于在所有定义在 $[a,b]$ 上的连续可微函数 x 上加以考虑,那么我们可以这样选取 h,使得 $h(a)=0,h(b)\neq0$,于是从等式(8)就得到

$$f'_{x'}h\big|_{t=b}=0; \tag{9}$$

而若令 $h(b)=0,h(a)\neq0$,就得到

---

① 这个运算要求补充论证,因为并未假定出现在表达式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'_{x'}$ 中的导数 x'' 存在. 关于这点请参看任何一本变分法教程.

$$f'_{x'}\Big|_{t=a} = 0. \tag{10}$$

这样一来,由条件(6)(即泛函(4)的微分等于零)推出,使泛函(4)在其上达到极值的那个函数 x,应该满足微分方程(7)和闭区间$[a,b]$的端点上的边值条件(9)、(10). 二阶微分方程的通解包含两个任意常数,而我们恰好拥有与所要求的常数数量相同的边值条件.

2. 二阶微分. 泛函极值的充分条件 我们再回过来求 n 元函数的极值. 设函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$在点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$满足条件 $\mathrm{d}f=0$. 那么,大家都知道,为了解决在给定点是否真正有极值的问题,应该考虑二阶微分. 下面的结论是正确的.

(1) 如果函数$f(x_1,\cdots,x_n)$在点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$有极小值,那么在该点 $\mathrm{d}^2f\geqslant 0$. (类似地,如果f在点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$有极大值,那么在该点 $\mathrm{d}^2f\leqslant 0$.)

(2) 如果在点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$满足条件

$$\mathrm{d}f = 0 \text{ 和 } \mathrm{d}^2f = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k > 0$$

(当不是所有的 $\mathrm{d}x_i=0$),那么在该点$f(x)$有极小值. (类似地f有极大值,倘若 $\mathrm{d}^2f<0$).

简言之,二阶微分的非负性是有极小值的必要条件,而它的正定性是有极小值的充分条件.

让我们来看一看,在何等程度上这些事实可以推广到给定在巴拿赫空间上的泛函上去.

定理 2 设 F 是一个给定在巴拿赫空间 X 里的实泛函,且在点 x_0 的某一领域内有连续的二阶导数. 如果这个泛函在点 x_0 达到极小值,那么 $\mathrm{d}^2F(x_0)\geqslant 0$①.

证明 根据泰勒公式,就得到

$$F(x_0+h) - F(x_0)$$

$$= F'(x_0)h + \frac{1}{2}F''(x_0)(h,h) + o(\|h\|^2).$$

如果在点 x_0 泛函 F 有极小值,那么 $F'(x_0)=0$,从而有等式

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \frac{1}{2}F''(x_0)(h,h) + o(\|h\|^2). \tag{11}$$

如果对于任何 h 满足不等式

$$F''(x_0)(h,h) < 0, \tag{12}$$

① 这个不等式表示对于所有的 h, $F''(x_0)(h,h)\geqslant 0$.

那么,因为 $F''(x_0)(\varepsilon h,\varepsilon h)=\varepsilon^2 F''(x_0)(h,h)$,存在范数可以任意小的元素 h 满足(12). 但对于充分小的 $\|h\|$,整个表达式(11)的符号决定于主项 $\frac{1}{2}F''(x_0)(h,h)$ 的符号,因而我们得到

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{1}{2}F''(x_0)(h,h)+o(\|h\|^2)<0,$$

即在点 x_0 没有极小值.

可以陈述关于极大值的类似定理.

刚才证明的定理,是关于有限个变量的函数的相应定理的直接推广. 充分条件的情形则不然. 上面提到的条件 $F''(x_0)(h,h)>0$ 是 n 元函数有极小值的充分条件,但却不是定义在无穷维巴拿赫空间上的泛函达到极小值的充分条件. 讨论一个简单的例子. 设在希尔伯特空间 l_2 里给定了泛函

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^2}{n^3}-\sum_{n=1}^{\infty}x_n^4 .$$

这个泛函在点 0 的一阶微分等于 0,而二阶微分等于级数 $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n^2}{n^3}$ 的和,即是一个正定泛函. 然而在点 0 却没有极小值,因为 $F(0)=0$ 而 $F(\underbrace{0,\cdots,}_{n-1}0,1/n,0,\cdots)=1/n^5-1/n^4<0$. 从而,在点 0 的任何邻近,都存在使得 $F(x)<F(0)$ 的点 x.

引入下列概念. 二次泛函 B 称为**强正**的,如果有这样的常数 $c>0$ 存在,使得对于所有的 x 都有 $B(x,x)\geqslant c\|x\|^2$.

定理 3　如果定义在巴拿赫空间 X 里的泛函 F 满足条件:

1) $\mathrm{d}F(x_0)=0$,

2) $\mathrm{d}^2F(x_0)$ 是强正二次泛函,那么 F 在点 x_0 有极小值.

证明　设 $F''(x_0)(h,h)\geqslant c\|h\|^2$. 选取 $\varepsilon>0$ 这样地小,使得对于 $\|h\|<\varepsilon$ 等式(11)中的量 $o(\|h\|^2)$ 满足条件 $|o(\|h\|^2)|<\frac{c}{4}\|h\|^2$. 于是对于 $\|h\|<\varepsilon$,有

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{1}{2}F''(x_0)(h,h)+o(\|h\|^2)$$

$$>\frac{c}{4}\|h\|^2>0.$$

在有限维空间中,二次型的强正性与它的正定性是等价的,因此(在一阶微分等于零时)二阶微分的正定性是函数有极小值的充分条件. 在无穷维的情形(正如上面举的例子表明)强正性是比正定性更强的条件.

二阶微分的强正性条件保证了函数有极小值. 这一条件之所以适宜,因为它适用于任意的巴拿赫空间中的任何二次可微泛函(与它的具体形式无关). 此外,这个条件在实际的重要情形下,通常显得过于粗糙和难于检验. 在变分法中建立了关于极值的更精致的充分条件(利用了在变分问题中所考虑的那些泛函的具体形式);但是这些问题的阐述不是本书的任务.

3. 有约束的极值问题 上面说过关于求给定在全空间上的泛函的极值,即按习惯的说法,无约束极值问题. 当有这样或那样的限制(约束)出现时,这些约束确定了所讨论泛函的区域. 在这种情形下,第 1,2 段中所引述的那些结论,一般是不正确的. 关于这一点,由给定在闭区间上的函数的那个简单例子已经可以看出:如果这样的函数在边界点(端点)达到极值,那么它的一阶微分在该点可能异于零,而二阶微分的符号则可能是任意的. 带约束的极值问题的研究,构成广阔而重要的数学领域,包括诸如古典变分法,最优控制,线性规划和凸规划等分支. 我们这里仅限于引述一个结果. 它的证明基于在极值问题理论的许多问题中起重要作用的刘斯切尔尼克定理的应用.

设 X 和 Y 是巴拿赫空间,F 是 X 上的函数,而 $\Phi:X\to Y$ 是空间 X 到空间 Y 内的映射. 假定在由条件 $\Phi(x)=0$ 所确定的集上求函数 $F(x)$ 的极小值.

定理 设函数 F 和映射 Φ 在满足条件 $\Phi(x_0)=0$ 的点 x_0 的某一邻域内连续可微;又设空间 X 在映射 $\Phi'(x_0):X\to Y$ 下的象是闭的. 如果定义在集 $\{x:\Phi(x)=0\}$ 上的函数 $F(x)$ 在点 x_0 达到局部极小值,那么存在数 λ_0 和(定义在 Y 上的)线性泛函 y^*,并且 λ_0 和 y^* 不同时等于零,使得

$$\lambda_0 F'(x_0)+[\Phi'(x_0)]^*y^*=0. \tag{13}$$

证明 引入记号 $L=\Phi'(x_0)X$. 根据条件,L 是一个闭子空间. 如果 $L\neq Y$,那么根据哈恩 - 巴拿赫定理的推论 3(第四章 §1 第 3 段),可以找到在 L 上等于零的非零泛函 $y_0^*\in Y^*$. 对于 y_0^* 和对于所有的 $x\in X$,有

$$([\Phi'(x_0)]^*y_0^*,x)=(y_0^*,\Phi'(x_0)x)=0,$$

因为 $\Phi'(x_0)x\in L$. 因此,取 y_0^* 为 y^* 且令 $\lambda_0=0$,就得到(13).

我们现在来考虑 $\Phi(x_0)X=Y$ 的情形. 将刘斯切尔尼克定理应用于映射 Φ,可见对于每一满足条件

$$\Phi'(x_0)h=0$$

的 $h\in X$ 和所有的充分小的 t,存在这样的元素

$$x(t,h)=x_0+th+r(t),$$

使得 $\Phi(x(t,h))=0$,当 $t\to 0$ 时 $t^{-1}\|r(t)\|\to 0$.

考虑函数

$$f(t) = F(x(t,h)).$$

它在 $t=0$ 时的导数

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = F'(x_0)h$$

应该等于零. 事实上,如果

$$F'(x_0)h = c \neq 0,$$

那么差

$$F(x(t,h)) - F(x_0) = ct + F'(x_0)r(t) + o(t)$$

的符号由项 ct 的符号来确定. 从而当 t 换为 $-t$ 时,差就改变符号,而这时在点 x_0 不可能有极值. 这样,我们就得到,对于所有这样的 $h, h \in \operatorname{Ker} \Phi'(x_0)$ 都有 $F'(x_0)h = 0$. 换言之,$F'(x_0)$ 是与子空间 $\operatorname{Ker} \Phi'(x_0) \subset X$ 正交的 X^* 里的元素. 但是根据关于算子核的零化子引理(参看第四章 §5 第 5 段),有

$$[\operatorname{Ker}\Phi'(x_0)]^{\perp} = \operatorname{Im}[\Phi'(x_0)]^*.$$

这表示,如果 $F'(x_0) \in [\operatorname{Ker}\Phi'(x_0)]^{\perp}$,那么就可以找到这样的泛函 $y^* \in Y^*$,使得

$$F'(x_0) = -[\Phi'(x_0)]^* y^*. \tag{14}$$

令 $\lambda_0 = 1$ 并且就取满足等式(14)的那个泛函 y^*,我们就得到(13).

刚才证明的定理是古典分析里有名的,关于条件极值问题的拉格朗日乘子法的无穷维推广. 事实上,如果 X 和 Y 是有限维空间,即如果在条件 $f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$ 下求函数 $f_0(x_1, \cdots, x_n)$ 的极小值,那么泛函 y^* 就是这 m 个数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 的数组. 在线性映射下空间 X 到空间 Y 内的象是闭的,这个条件在有限维情形下自动满足. 这时等式(13)变为

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f'_i(x_0) = 0,$$

即变为有名的求条件极值的拉格朗日乘子法.

§4. 牛顿(Newton)法

求解形如

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

(f 是一个定义在某一闭区间 $[a,b]$ 上的数值变元的数值函数)的方程的十分有名的方法之一,就是所谓的**牛顿法**或**切线法**. 其方法如下:根据递推公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

求逐次近似解.(这时,取f的定义区间上的任意一点为零次近似值x_0). 这个方法的几何意义如图24所示. 可以证明,如果x^*是方程(1)在闭区间$[a,b]$上的唯一根,而函数f在该闭区间上有不为零的一阶导数和有界的二阶导数,那么存在"根x^*的吸引域",即点x^*的这样的邻域:对于点x_0在这个邻域内的任何取法,序列(2)收敛于x^*.

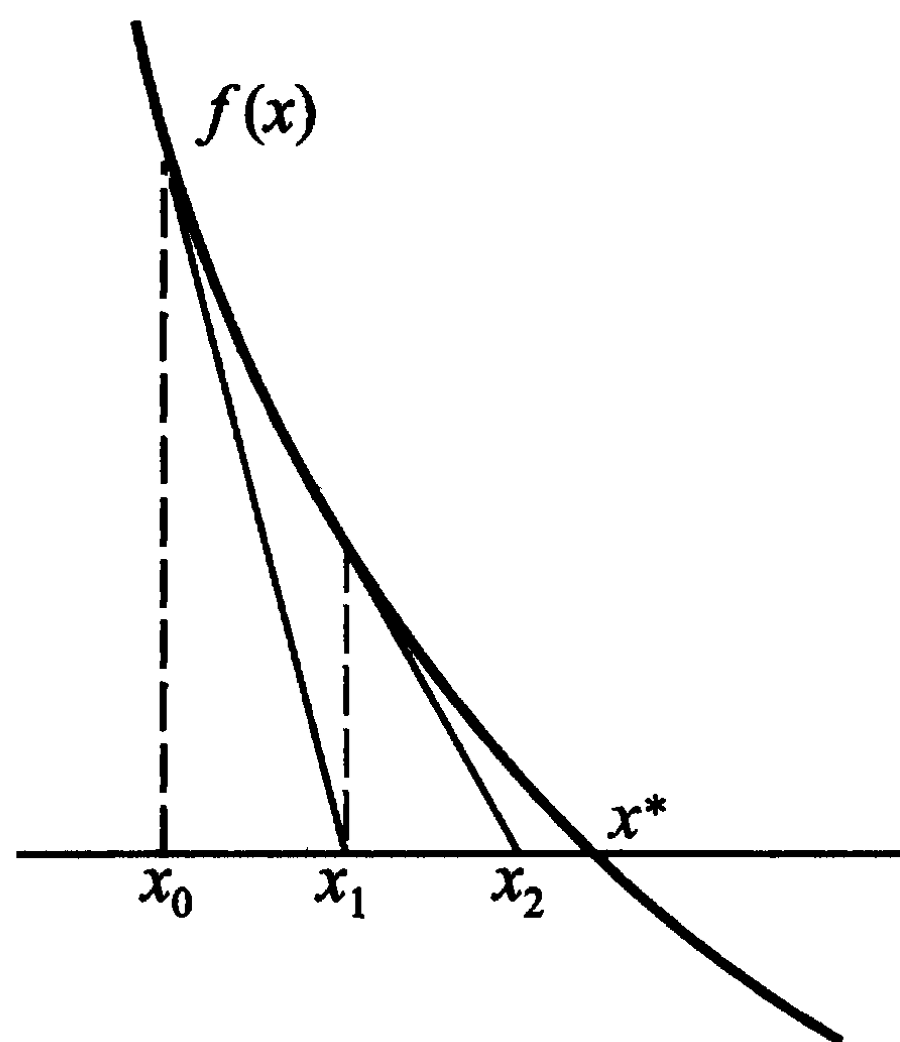


图 24

牛顿法可以推广到算子方程上去. 我们就巴拿赫空间中的方程来阐述这个方法.

考虑方程

$$F(x) = 0, \tag{3}$$

其中F是巴拿赫空间X到巴拿赫空间Y内的映射. 假定映射F在某一半径为r的球$B(x_0,r)$内是强可微的.(我们取球心x_0为所要求的解的零次近似值). 像一维情形一样,将表达式$F(x_0)-F(x)$用它的线性主部,即元素$F'(x_0)(x_0-x)$来替换,我们由(3)就得到线性方程

$$F'(x_0)(x_0 - x) = F(x_0),$$

它的解

$$x_1 = x_0 - [F'(x_0)]^{-1}F(x_0)$$

自然可视为方程(3)的精确解x的一次近似解(这里当然假定算子$[F'(x_0)]^{-1}$存在). 重复这些推理我们就得到方程(3)的近似解序列

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}(F(x_n)). \tag{4}$$

在无穷维情形求逆算子$[F'(x_n)]^{-1}$可能是十分复杂的问题. 因此这里有时适合采用所谓的**修正的牛顿法**(参看[27,28]). 修正法如下所述:用公式

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_0)]^{-1}(F(x_n)) \tag{5}$$

所定义的序列来代替序列(4),即逆算子$[F'(x_0)]^{-1}$在每一步都取变元$x=x_0$的同一值. 尽管这样的修正降低了收敛速度,但从计算观点看它经常显得是合理的. 我们现在转过来陈述和证明精确的结论.

定理1 设映射F在某一以x_0为球心以r为半径的球$B(x_0,r)$内是强可微的,而导数$F'(x)$在该球内满足利普希茨条件:

$$\| F'(x_1) - F'(x_2) \| \leqslant L \| x_1 - x_2 \|.$$

设$[F'(x_0)]^{-1}$存在,且记

$$M = \|[F'(x_0)]^{-1}\|, k = \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|, h = MkL.$$

于是,如果$h<1/4$,那么方程$F(x)=0$在球$\|x-x_0\|\leqslant kt_0$内(其中t_0是方程$ht^2-t+1=0$的较小根)有唯一解x^*,且由递推公式(5)所定义的序列$\{x_n\}$收敛于该解.

证明　在空间X中讨论映射$Ax=x-[F'(x_0)]^{-1}F(x)$. 它的强导数在点x_0等于0. 这个映射将球$\|x-x_0\|\leqslant kt_0$变为自己,事实上

$$Ax - x_0 = x - x_0 - [F'(x_0)]^{-1}F(x)$$
$$= [F'(x_0)]^{-1}\{F'(x_0)(x-x_0) - F(x) + F(x_0)\} - [F'(x_0)]^{-1}F(x_0).$$

因此

$$\|Ax - x_0\| \leqslant \|[F'(x_0)]^{-1}\| \cdot \|F'(x_0)(x-x_0) - F(x) + F(x_0)\| + \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|,$$

即

$$\|Ax - x_0\| \leqslant M\|F'(x_0)(x-x_0) - F(x) + F(x_0)\| + k. \tag{6}$$

考虑辅助映射

$$\Phi(x) = F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x-x_0).$$

它是可微的而它的导数等于$\Phi'(x)=F'(x)-F'(x_0)$. 如果$\|x-x_0\|<kt_0$,那么下列估计成立:

$$\|\Phi'(x)\| = \|F'(x) - F'(x_0)\| \leqslant L\|x-x_0\| \leqslant Lt_0k.$$

由此根据中值定理(§1 公式(9))就得到

$$\|\Phi(x)\| = \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| \leqslant Lt_0k\|x-x_0\| \leqslant Lt_0^2k^2. \tag{7}$$

这样,如果$\|x-x_0\|\leqslant t_0k$,那么由(6)和(7)就得到

$$\|Ax - x_0\| \leqslant MLt_0^2k^2 + k = k(MLt_0^2k + 1) = k(ht_0^2 + 1) = kt_0,$$

而这表示映射A将球$\|x-x_0\|\leqslant kt_0$变为自己. 现在我们来证明,A是这个球的压缩映射. 对于$\|x-x_0\|\leqslant kt_0$有

$$A'(x) = I - [F'(x_0)]^{-1}F'(x) = [F'(x_0)]^{-1}(F'(x_0) - F'(x)),$$

由此

$$\|A'(x)\| \leqslant M\|F'(x_0)-F'(x)\| \leqslant ML\|x-x_0\| \leqslant MLkt_0.$$

但 t_0 是方程 $ht^2-t+1=0$ 的较小根,即 $t_0=\dfrac{1-\sqrt{1-4h}}{2h}$. 因此

$$\|A'(x)\| \leqslant MLkt_0=ht_0=h\frac{1-\sqrt{1-4h}}{2h}=\frac{1-\sqrt{1-4h}}{2}$$

$$=q<\frac{1}{2}. \tag{8}$$

由此 $\|Ax_1-Ax_2\|<\dfrac{1}{2}\|x_1-x_2\|$,即 A 是压缩映射.

从而,映射 A 在球 $\|x-x_0\|\leqslant kt_0$ 内有一个且仅有一个不动点 x^*. 对于这个点,有

$$x^*=x^*-[F'(x_0)]^{-1}F(x^*),\text{即 } F(x^*)=0.$$

同时

$$Ax_n=x_n-[F'(x_0)]^{-1}F(x_n)=x_{n+1}.$$

因而根据压缩映射定理,序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*.

由不等式(8),立即推出修正牛顿法的收敛速度的下列估计式:

$$\|x_n-x^*\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|, \tag{9}$$

即修正牛顿法的误差按几何级数递减. 为便于比较,我们指出,通常的牛顿法[它由公式(4)而不是由公式(5)确定近似解]收敛得比几何级数快:对于通常的牛顿法

$$\|x_n-x^*\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2n-1}k.$$

例 讨论非线性积分方程

$$x(s)=\int_a^b K(s,t,x(t))\,\mathrm{d}t, \tag{10}$$

其中 $K(s,t,u)$ 是其变元的连续的和连续可微的函数. 引入由等式

$$y(s)=x(s)-\int_a^b K(s,t,x(t)\,\mathrm{d}t$$

所定义的映射 $y=F(x)$,将方程(10)写为 $F(x)=0$.

设 x_0 是这个方程之解的零次近似值. 于是第一校正值 $\Delta x(s)=x_1-x_0$ 就由方程

$$F'(x_0)\Delta x=-F(x_0) \tag{11}$$

所确定.

如果函数 $K(s,t,u)$ 和泛函空间(在其中讨论方程(10))是这样的,使得映射 F 的导数 $F'(x)$ 可以通过"在积分号下微分"的办法来计算,即如果

$$z = F'(x_0)x$$

表示

$$z(s) = x(s) - \int_a^b K'_u(s,t,x_0(t))x(t)\,\mathrm{d}t,$$

那么方程(11)具有形式

$$\Delta x(s) = \int_a^b K'_u(s,t,x_0(t))\Delta x(t)\,\mathrm{d}t + \varphi_0(s), \tag{12}$$

其中

$$\varphi_0(s) = \int_a^b K(s,t,x_0(t))\,\mathrm{d}t - x_0(s).$$

类似地求下面的一些校正值.

这样一来,每下一近似值的计算,化为求解线性积分方程. 如果应用修正的牛顿法,那么这时在每一步都必须解含相同核的线性积分方程. 关于牛顿法及有关的问题更详细论述,参见书[28]以及论文[27]. 为算子方程的牛顿法奠定理论基础的一些主要结果,属于[27]的作者康托罗维奇(Канторович).

附录　巴拿赫代数(B. M. 季霍米洛夫)

季霍米洛夫

本书第三章研究了线性空间. 那里引进了重要的一类线性空间,即巴拿赫空间. 在这个附录中,我们现在就来研究巴拿赫代数,即在其中定义了元素乘法的巴拿赫空间. 有了与线性和度量结构相结合的乘法,就使巴拿赫代数具有一系列良好的性质.

§1. 巴拿赫代数的定义与一些例子

1. 巴拿赫代数,巴拿赫代数的同构　我们记得,非空的元素集称做线性空间,如果在其中定义了两种运算——加法和数乘,而且这两种运算满足第三章 §1 中提出的八条公理.

定义 1　线性空间 X 称为**代数**,如果在 X 中再引进一种代数运算——乘法运算,且满足以下公理:

(1) $(xy)z = x(yz)$.

(2) $x(y+z) = xy + xz$; $(y+z)x = yx + zx$.

(3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

(4) 如果存在元素 $e \in X$,使得对一切 $x \in X$ 都有

$$ex = xe = x,$$

则称 e 为代数 X 的**单位元**,而代数本身叫做**具有单位元的代数**①.

(5) 如果乘法运算是交换的,即如果乘法运算满足下面的公理:

$$xy = yx,$$

则称代数 X 为**交换代数**.

---

① 代数中的单位总是唯一的. 因为如果 e' 也是具有性质 4 的元素,那么我们就可以得到 $ee' = e = e'$.

具有单位元的交换代数也是我们下面要研究的基本对象.

在本附录中,代数到处都是在复数域 **C** 上来讨论.

在第三章 §3 中,我们引进了赋范空间的概念,即赋予满足第二章 §3 第 1 段中所说的三条公理的范数 $\|x\|$ 的线性空间.

定义 2　设 X 是赋范空间. 如果它是具有单位元的代数,同时还满足以下两条公理:

(6) $\|e\|=1$;

(7) $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

则称 X 为**赋范代数**.

如果赋范代数 X 又是完备的(即它是巴拿赫空间),则它称为**巴拿赫代数**.

设 F: $X \to Y$ 为代数 X 到代数 Y 内的映射. 如果映射 F 满足以下条件:

$$F(x+y) = Fx + Fy, \tag{1}$$

$$F(\alpha x) = \alpha Fx, \tag{2}$$

$$F(xy) = Fx \cdot Fy, \tag{3}$$

则 F 称为**同态**.

如果存在满足条件(1)—(3)的一对一的映射 F,则两个代数 X 与 Y 称为**同构**的.

设 X 与 Y 是赋范空间. 如果存在一一映射 $F:X \leftrightarrow Y$,使对于 F 除满足前述条件(1)与(2)外,还满足

$$\|Fx\|_Y = \|x\|_X,$$

则 X 与 Y 称为**等距**的.

定义 3　两个巴拿赫代数 X 与 Y 我们称为**等距同构**的,如果存在代数同构 $F:X \leftrightarrow Y$,并且它同时又是赋范空间的 X 与 Y 的等距映射.

2. 巴拿赫代数的一些例子

例 1　域 C　如果在复数集 $\{z\}$ 中用公式

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (z = x+iy)$$

引进范数,则复数集 $\{z\}$ 是巴拿赫代数最简单的例子.

复数构成域 **C**. 在 **C** 中对于除了零以外的一切元素都定义了除法——乘法的逆运算. 下面我们将要证明,**C** 是本身为域的唯一的赋范代数.

例 2　代数 C_T　设 T 是某一紧豪斯多夫拓扑空间. 我们把给定在 T 上具有通常函数加法与数乘运算的,一切复连续函数 $x(t)$ 所成的线性空间记作 C_T,其中用等式

$$\|x\| = \max_{t \in T} |x(t)|$$

定义范数.

在前面第二章与第三章中,我们曾经讨论过空间 C_T 的特殊情形,即 $T=[a,b]$ 为实直线的闭区间时的情形. n 维复向量空间 $C^n=\{(z_1,\cdots,z_n)\}$ 是空间 C_T 另一重要特殊情形,即由 n 个点的函数组成的空间. C^n 中的加法、数乘以及元素的乘法都是按坐标来运算的,而范数则由

$$\|z\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|$$

定义.

代数 C_T 是交换的巴拿赫代数. 函数 $e(t)\equiv 1$ 为 C_T 中的单位元. 验证 C_T 满足一切公理并不困难.

例 3　圆中解析函数的代数 $\mathscr{A}$　考虑圆 $K\equiv\{z:|z|\leqslant 1\}$. 设复变量的函数$x(z)$在圆 K 上有定义并且连续,而在圆 K 内解析. 以 $\mathscr{A}$ 表示由一切满足上述条件的函数 $x(z)$ 组成的线性空间. 把函数的普通乘法定义为 $\mathscr{A}$ 中的乘法运算,而 $\mathscr{A}$ 中的范数定义为

$$\|x\| = \max_{\|z\|\leqslant 1}|x(z)|.$$

用这种方法我们把 $\mathscr{A}$ 变为具有单位元的交换的巴拿赫代数,所有公理的正确性在这里也十分明显.

例 4　代数 l_1　我们把双向绝对可和的一切复序列 $x=(\cdots,x_{-n},\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots)$ 的全体,记为 l_1,其中范数

$$\|x\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|x_k|. \tag{4}$$

我们把序列

$$x = (\cdots,x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n,\cdots),y = (\cdots,y_{-n},\cdots,y_0,\cdots,y_n,\cdots)$$

的卷积 $z=x*y$ 叫做这两个序列的乘积 $x\cdot y$,亦即其项如下定义的序列:

$$z_n = (x*y)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x_{n-k}y_k. \tag{5}$$

如果 l_1 中的任一序列 x 对应于傅里叶级数 $x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}x_k e^{ikt}, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$,那么,用公式(5) 定义的序列就与由序列 x 与 y 构造的函数乘积$x(t)\cdot y(t)$ 相对应. 于是,代数 l_1 与代数 W 等距同构,其中 W 是具有绝对收敛傅里叶级数的函数 $x(t)$ 的代数,其范数由(4) 定义. 因此,不难验证,代数与赋范空间大多数公理对于 l_1 成立,因为这许多公理对于 W 明显成立. 下面我们来验证公理 7. 对于 $z = x*y$,有

$$\|z\| = \sum_n|z_n| = \sum_n\left|\sum_k x_{n-k}y_k\right| \leqslant \sum_n\sum_k|x_{n-k}||y_k|$$

$$= \sum_k\left(\sum_n|x_{n-k}|\right)|y_k| = \|x\|\cdot\|y\|.$$

代数 W 显然是交换的,因而代数 l_1 也是交换的. 我们把函数 $e(t)\equiv 1$ 对应的序列 e 作为 l_1 中的单位元,对于这个序列,除了带有零下标的分量是 1 以外,其余的分量都为 0. 以后我们将利用同构 $l_1\leftrightarrow W$ 与对应$\{x_n\}\leftrightarrow x(t)$,这就不再特别说明.

例 5　有界算子的巴拿赫代数　设 X 是巴拿赫空间. 我们考察将 X 变为自身的所有线性连续算子组成的空间 $\mathscr{L}(X,X)$,其中对算子赋以通常的加法、算子乘以数的乘法及算子的乘法(第四章, §5,第 3 段). 恒等算子是 $\mathscr{L}(X,X)$ 中的单位元. 如果在 $\mathscr{L}(X,X)$ 中像通常那样定义了范数:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|,$$

那么它就变为巴拿赫代数.

事实上,公理 7 已经在前面(参见第四章 §5 第 3 段中的公式(4)验证过了. 在那里有一个习题,证明 $\mathscr{L}(E,E_1)$ 是完备的,现请读者证明 $\mathscr{L}(X,X)$ 的完备性. 代数 $\mathscr{L}(X,X)$ 是具有单位元的不可交换的巴拿赫代数中最重要的例子之一.

3. 极大理想

定义 4　设 I 是交换代数 X 的子空间,如果它具有下述性质:对于任一 $y\in I$ 及 X 中任何的 x,乘积 $yx\in I$,则 I 称为 X 的**理想**. 由一个零元组成的理想以及由全空间 X 组成的理想,都称为**平凡理想**,以后我们研究除了平凡理想以外的理想. 不包含在任何其他非平凡理想中的理想叫**极大理想**.

现在我们在代数 C_T 的例子上讨论所引入的概念.

设 $\mathscr{F}$ 是紧统 T 的非空子集. $M_{\mathscr{F}}=\{x(t)\in C_T:x(t)=0,t\in\mathscr{F}\}$ 为 $\mathscr{F}$ 上等于零的函数组成的集,容易看出,这个集构成 C_T 中的理想. 在 C_T 中的极大理想具有简单的描述,这对于理解交换巴拿赫代数理论整个构思是个关键.

引理　代数 C_T 中的极大理想,是 C_T 中所有在集 T 中的某一固定点 τ_0 取值为零的函数组成的集.

证明　a) 设 $M_{\tau_0}=\{x(t)\in C_T:x(\tau_0)=0\}$. 这时 M_{τ_0} 是一理想. 我们来证明它是极大的. 事实上,设 $x_0(t)\notin M_{\tau_0}$,即 $x_0(\tau_0)\neq 0$. 对于任意的 $y(t)\in C_T$,令 $z(t)=y(t)-\dfrac{y(\tau_0)x_0(t)}{x_0(\tau_0)}$. 于是 $z(\tau_0)=0$,因而 $z(t)$ 属于 M_{τ_0}. 于是,添加非 M_{τ_0} 中的任何元素,就导致由 M_{τ_0} 和这个元素生成的理想变成平凡理想. 因此,M_{τ_0} 是极大理想.

b) 反之,假设 M 是 C_T 中的任一极大理想.

我们来证明,属于 M 的任一函数都在某点为零. 事实上,假设不然,那么对任一点 $\tau\in T$ 可以找到函数 $x_\tau(t)\in M$,使得 $x_\tau(t)\neq 0$. 据据 $x_\tau(t)$ 关于 t 的连续性,可以找到点 τ 的邻域 U_τ,使得在 U_τ 中 $x_\tau(t)\neq 0$. 从开覆盖 $T\subset\bigcup_\tau U_\tau$ 中可选出有限覆盖 $U_{\tau_1},U_{\tau_2},\cdots,U_{\tau_n}$.

这时,根据理想的定义,

$$x_0(t)=\overline{x_{\tau_1}(t)}\cdot x_{\tau_1}(t)+\cdots+\overline{x_{\tau_n}(t)}\cdot x_{\tau_n}(t)=\sum_{k=1}^{n}\left|x_{\tau_k}(t)\right|^2$$

属于 M.

由于在 T 上处处 $x_0(t)>0$,所以函数 $1/x_0(t)$ 连续. 因此 $1=(1/x_0(t))\cdot x_0(t)\in M$. 但是,由于 $y(t)=y(t)\cdot 1$,因此包含代数的单位元的理想也包含代数的任何元素. 所以 M 是平凡理想,这与假设 M 是极大理想矛盾,因而 M 是不平凡理想.

这样一来,我们得到以下事实,极大理想与空间承载子 T 中的点之间可以建立一一对应关系. 这就可以把 T 上的函数解释为"极大理想空间上的函数".

我们指出(下面研究交换巴拿赫代数理论的目的即在于此):任何这样的代数 X,都可以以紧豪斯多夫拓扑空间上的连续函数代数的子代数的形式来实现,而此紧豪斯多夫拓扑空间系由 X 的极大理想来构成.

§2. 谱和预解式

在这一节所讨论的代数 X 不一定是交换的,但它具有单位元,这里讨论的许多问题和第四章

§5 讨论的问题类似.

1. 定义与例子

定义 设元素 $x \in X$. 如果 x 有逆元素,亦即如果可以找到元素 x^{-1},使得

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e,$$

则元素 x 称为**可逆**的.

否则,元素 x 称为**不可逆**的.

使得元素 $\lambda e - x\ (x \in X)$ 不可逆的复数 λ 的集合,叫做元素 x 的**谱** $\sigma(x)$. 如果 $\lambda \notin \sigma(x)$,则点 λ 称为**正则**的.

在元素 x 的正则点集上定义的函数

$$R_{\lambda}: \mathbf{C} \backslash \sigma(x) \to X, \quad R_{\lambda} x = x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1},$$

叫做这个元素的**预解式**.

数

$$r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|, \quad x \in X \tag{1}$$

称为元素 x 的**谱半径**.

我们举例说明上面引进的重要概念.

a) 如果 $X = \mathbf{C}$,那么 $\mathbf{C}$ 中除零以外的一切元素都是可逆的.

b) 如果 $X = C_T$,那么 $x(t)$ 是可逆的充要条件为它处处异于零. 谱 $\sigma(x)$ 与 $x(t)$ 的值集重合;预解式 R_{λ} 具有以下形式:

$$R_{\lambda} = \frac{1}{\lambda - x(t)},$$

而

$$r(x) = \|x\| = \max_{t} |x(t)|.$$

c) 如果 $X = \mathscr{L}(Y, Y)$ 是有界算子的代数,那么可逆元素就是可逆算子. 这时谱与预解式跟第四章 §5 第 7 段所引进的算子的谱与预解式(如不计符号)一致. 其实在这一节中,我们在一般情形下研究,前面对于有界线性算子的巴拿赫代数所引进的那些概念.

2. 谱的性质

定理 1 1°. 对于共轭空间 X^* 中的任意线性泛函 $f(x)$,函数 $f(x(\lambda)) = F(\lambda)$ 在 $\mathbf{C} \backslash \sigma(x)$ 上是解析的,并且当 $|\lambda| \to \infty$ 时 $F(\lambda) \to 0$.

2°. 巴拿赫代数 X 的元素 x 的谱 $\sigma(x)$ 是 $\mathbf{C}$ 中非空紧集. 不等式

$$r(x) \leqslant \|x\| \tag{2}$$

成立.

在证明定理 1 之前,我们先证明下面几个引理.

引理 1(试与第四章 §5 定理 5 比较) 设巴拿赫代数 X 中的元素 x 具有小于 1 的范数. 这时元素 $e - x$ 可逆,并且

$$(e - x)^{-1} = e + x + \cdots + x^n + \cdots.$$

事实上,令 $s_n = e + x + \cdots + x^n$,于是有:

$$\| s_n - s_{n+k} \| = \| x^{n+1} + \cdots + x^{n+k} \| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \| x \|^{n+i}$$

$$= \frac{\| x \|^{n+1} - \| x \|^{n+k+1}}{1 - \| x \|} \to 0.$$

因而 s_n 是基本序列. 因为 X 完备,所以 s_n 收敛于某元素 $s \in X$. 这时

$$s(e - x) = \lim_{n\to\infty} s_n(e - x) = \lim_{n\to\infty}(e - x^{n+1}) = e.$$

类似地可证明 $(e - x)s = e$.

推论　对于任意 $x \in X$,当 $t \to 0$ 时,$(e - tx)^{-1} \to e$.

事实上,$(e - tx)^{-1} \equiv \lim\limits_{n\to\infty}(e + tx + \cdots + (tx)^n) = e + O(t)$.

引理 2(试与第四章 §5 定理 4 比较)　设 x_0 是可逆的元素,且 $\| \Delta x \| < \| x_0^{-1} \|^{-1}$. 这时 $x_1 = x_0 + \Delta x$ 也是可逆的元素;同时

$$x_1^{-1} = (e + x_0^{-1}\Delta x)^{-1} x_0^{-1}.$$

事实上,

$$x_1 = x_0 + \Delta x = x_0(e + x_0^{-1}\Delta x) = x_0(e - x),$$

$$\| x \| = \| -x_0^{-1}\Delta x \| < 1.$$

应用引理 1,我们得到 $x_1^{-1} = (e - x)^{-1} x_0^{-1}$,这就是所要证明的.

推论 1　巴拿赫代数可逆元素的集(在巴拿赫代数赋范的拓扑中)是开的,不可逆元素的集是闭的.

推论 2　预解式 $x(\lambda)$ 是 $\mathbf{C} \backslash \sigma(x)$ 上的 λ 的连续函数.

事实上,根据引理 1 的推论:

$$x(\lambda_0 + \Delta\lambda) = (\lambda_0 e - x + \Delta\lambda e)^{-1}$$

$$= (e + \Delta\lambda x(\lambda_0))^{-1} x(\lambda_0) \xrightarrow[\Delta\lambda \to 0]{} x(\lambda_0).$$

引理 3(试与第四章 §5 第 7 段比较)　设 $\lambda, \mu \in \mathbf{C} \backslash \sigma(x)$. 那么

a) $R_\lambda x \cdot R_\mu x = R_\mu x \cdot R_\lambda x$,

b) $R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda x \cdot R_\mu x$　(希尔伯特恒等式).

证明

a) $R_\lambda x \cdot R_\mu x = (\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1} = [(\mu e - x)(\lambda e - x)]^{-1}$

$= [(\lambda e - x)(\mu e - x)]^{-1} = R_\mu x \cdot R_\lambda x.$

b) 根据 a) 与 R_λ 及 R_μ 的定义,我们有

$$R_\lambda x = (\mu e - x) R_\lambda x \cdot R_\mu x, \quad R_\mu x = (\lambda e - x) R_\lambda x \cdot R_\mu x,$$

由此得到 $R_\lambda x - R_\mu x = (\mu e - \lambda e) R_\lambda x \cdot R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda x \cdot R_\mu x$,这就是所要证明的.

推论　如果 $\lambda_0 \in \mathbf{C} \backslash \sigma(x)$,那么 $x'(\lambda_0) = -x^2(\lambda_0)$.

根据引理 2 的推论 2 和引理 3 的 b),有

$$x'(\lambda_0) = \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -\lim_{\lambda\to\lambda_0} x(\lambda)\cdot x(\lambda_0)$$

$$= -x^2(\lambda_0).$$

现在我们来证明定理 1.

1°. 设$f(x)$为x上的线性连续泛函,即$f(x)\in X^*$. 令$F(\lambda)=f(x(\lambda))=f(R_\lambda(x))$. 根据引理 3 的推论,对于$\lambda_0\notin\sigma(x)$,有

$$F'(\lambda_0) = \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda\to\lambda_0} f\left(\frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right)$$

$$= f\left(\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right)\right) = -f(x^2(\lambda_0)).$$

于是,$F(\lambda)$的解析性得证.

其次,当$|\lambda| > \|x\|$时,根据引理 1,我们得到

$$|F(\lambda)| \leqslant \|f\|_{X^*}\|x(\lambda)\|_X = \|f\|_{X^*}\|(\lambda e - x)^{-1}\|$$

$$= \frac{\|f\|_{X^*}}{|\lambda|}\left\|\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0.$$

2°. a) 谱$\sigma(x)$的非空性,设$\sigma(x)=\varnothing$. 这时根据 1°,对任何元素$f\in X^*$,$F(\lambda)$是当$|\lambda|\to\infty$时趋于零的整函数. 这意味着$F(\lambda)\equiv 0$,亦即对任意$f\in X^*$,都有$f((\lambda e - x)^{-1})=0$. 因此,根据哈恩 - 巴拿赫定理的推论 4(第四章 §1 第 3 段)知$(\lambda e - x)^{-1}=0$,而这是不可能的.

b) 谱$\sigma(x)$的紧性. 如果$|\lambda| > \|x\|$,那么根据引理 1,元素$\lambda e - x = \lambda\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)$是可逆的,由此推知$\sigma(x)$有界,而由此同时得不等式(2). $\sigma(x)$的闭性立即从引理 2 推得:如果λ_0是正则的,那么,由于$(\lambda_0+\Delta\lambda)e - x = \lambda_0 e - x + \Delta\lambda e$,所以邻域$|\Delta\lambda| < \|x(\lambda_0)\|^{-1}$由正则点组成.

我们指出定理 1 的两个推论.

推论 1 若域 $\mathbf{C}$ 上的巴拿赫代数是一个域,则它与 $\mathbf{C}$ 等距同构.

事实上,设X是"巴拿赫域",而x是X中的任一元素. 于是,我们可以找到这样的λ,使得元素$\lambda e - x$不可逆,亦即$\lambda e - x = 0$. 这样我们就得到$x=\lambda e$. 易见,对应$x\leftrightarrow\lambda$是X与C的一个同构. 因为$\|e\|=1$,所以$\|x\|=|\lambda|$. 我们得到了X与C的等距性.

推论 2 $\mathscr{L}(X,X)$中任何非零算子A的谱非空.

这个命题,前面(第四章 §5 第 7 段)已经提到,但未加证明.

3. 谱半径定理

定理 2 对于谱半径下列公式

$$r(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|} \tag{3}$$

成立.

事实上,设f是X^*中的任一元素. 根据定理 1,函数$F(\lambda)=f(x(\lambda))$在$\mathbf{C}\backslash\sigma(x)$上解析. 特别,$F(\lambda)$在区域$|\lambda| > \|x\|$中解析.

根据引理 1,在这个区域中,

$$x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

由此

$$F(\lambda) = f(x(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}}.$$

同时,由于引理 1,对 $|\lambda| \geqslant \|x\|$ 这个展开式正确. 故根据解析函数唯一性定理,对 $|\lambda| > r(x)$ 此展开式也应当成立. 这意味着

$$\sup_n \left|\frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}}\right| < \infty.$$

我们得到向量 x^n/λ^{n+1} 的集合是弱有界的,而这意味着它是强有界的(这个结果在第四章 §3 中已经证明,它有时叫做一致有界性原理或巴拿赫－斯坦豪斯(Steinhaus)定理;关于这方面的详细论述可参阅专著[21]第二章). 于是,存在与 λ 有关的数 $c(\lambda)$,使得

$$\left\|\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\right\| \leqslant c(\lambda).$$

由此,对于一切 $\{\lambda: |\lambda| > r(x)\}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x^n\|^{1/n} \leqslant |\lambda|$,即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x^n\|^{1/n} \leqslant r(x).$$

另一方面,如果 $\lambda \in \sigma(x)$,那么 $\lambda^n \in \sigma(x^n)$,因为元素 $\lambda^n e - x^n$ 显然被 $\lambda e - x$ 整除.

根据定理 1,如果 $\mu \in \sigma(x)$,那么 $|\mu| \leqslant \|x\|$.

令 $\mu = \lambda^n$,我们可从 $\lambda \in \sigma(x)$ 推出 $|\lambda| \leqslant \sqrt[n]{\|x^n\|}$,由此 $r(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$. 定理证毕.

§3. 几个辅助结果

在这简短的一节中,我们汇集了一系列辅助命题,对于这些命题将采用标准技巧的方法来证明.

1. 商代数定理 设 X 是具有单位元的交换巴拿赫代数,I 是 X 中的理想.

首先指出,I 仅由不可逆的元素组成. 因为如果 $z \in I$ 可逆,那么对于任意 $x \in X$,我们得到 $(xz^{-1})z = x \in I$,即 I 是平凡的,而我们不讨论这种情况的理想. 其次指出,根据 §2 的引理 1,从单位元 e 到任一不可逆元素的距离,亦即单位 e 到任一理想的距离不小于 1.

现在我们讨论商空间 X/I(参见第三章 §1),并定义乘法运算,把 X/I 中含元素 $x \cdot y$ 的类 ζ 称为 X/I 中的两类 ξ 与 η 之积,其中 x 与 y 是类 ξ 与 η 的代表(请验证,如果 x 与 y 用同类 ξ 与 η 的任何其他代表替换,那么,它们的乘积仍属于 ζ,并且所引进"乘法"运算满足 §1 的公理 1－5).

于是,X/I 成为交换代数. 我们称它为 X 关于理想 I 的**商代数**.

像第三章 §3 第 3 段一样,我们引进 X/I 中的范数:

$$\|\xi\| = \inf_{y\in I} \|x + y\|,$$

其中 x 是 ξ 的代表.

对于商代数下面的定理成立.

定理1 如果X是巴拿赫代数,而I是X中的闭理想,那么商代数X/I也是具有单位元的巴拿赫代数.

在第三章§3第3段中已经证明,巴拿赫空间关于它的任何闭子空间的商空间仍是巴拿赫空间. 因此,剩下只要验证满足§1第1段中的公理6与公理7.

a) $\|\xi\eta\| = \inf\limits_{z\in I}\|xy+z\| \leqslant \inf\limits_{u,v\in I}\|(x+u)(y+v)\|$

$\leqslant \inf\limits_{u\in I}\|x+u\| \cdot \inf\limits_{v\in I}\|y+v\| = \|\xi\| \cdot \|\eta\|.$

b) $E=e+I$,即$E^2=e^2+I=e+I$,于是$E^2=E$. 由此,有$\|E\| = \|E^2\| \leqslant \|E\|^2$. 但元素$E$不等价于零,因为点$e$的邻域像我们上面已经指出那样,它不包含由$I$组成的不可逆的元素. 因此$1\leqslant \|E\|$. 但另一方面,$\|E\| = \inf\limits_{y\in I}\|e+y\|$,即$\|E\|\leqslant 1$. 所以$\|E\|=1$. 定理证毕.

2. 三个引理 后面我们要用到三个引理,即集论的,代数的与拓扑的引理.

引理1 任一不平凡的理想I包含在极大理想中.

这个引理的证明根据第一章§5第7段中叙述的佐恩引理.

事实上,设$\mathscr{T}$是包含I的一切不平凡理想所成的集. 它按下述嵌入关系是偏序的:如果$I_1\subseteq I_2$,那么$I_1\leqslant I_2$. 对于$\mathscr{T}$中任一线性有序集$\{I_\alpha\}$,并$\bigcup\limits_{\alpha} I_\alpha$作为$\{I_\alpha\}$的上界是不平凡的理想,这就是说,根据佐恩引理,$I$从属于$\mathscr{T}$中的极大元素,即从属于$\mathscr{T}$中的极大理想.

推论 如果X不是域,那么在X中存在极大理想. 此外,每一异于零的不可逆元素包含在某一极大理想中.

事实上,我们取任一不可逆元素$x_0\neq 0$,并考察集合$x_0\cdot X$. 这个集合当然是理想. 它包含x_0而不包含X的单位元e,即它不是平凡理想. 因而,根据引理1,它包含在极大理想中.

引理2 理想I包含在某一不平凡理想$I'\subset X$中的充要条件为,代数X/I具有不平凡理想.

我们来证明必要性. 设

$$I\subset I'\subset X, I\neq I', X\neq I'.$$

在类$\xi\in X/I$当中分出使$x'\in I'$的那些类$\xi'=x'+I$. 不难验证,在X/I中可得到不平凡理想. 充分性可类似地证明.

引理3 不平凡理想I的闭包仍是不平凡理想.

从I只由不可逆元素组成推得不平凡性,剩下的从代数运算的连续性推得.

推论 极大理想是闭的.

§4. 基本定理

在这一节中X是具有单位元的交换巴拿赫代数.

1. 线性连续可乘泛函与极大理想

定义1 设f是巴拿赫代数X上的线性连续泛函. 如果对于任意x与y,有

$$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y), \tag{1}$$

则称f是**可乘的**.

我们把不平凡线性连续可乘泛函的全体记作$\mathscr{M}$.

注意,我们可以把线性连续可乘泛函定义为X到C内的连续同态.

如果$f \in \mathscr{M}$,那么

$$|f(x)| \leqslant \|x\|, \tag{2}$$

因为如果对范数等于1的某一x_0, $|f(x_0)| = \lambda > 1$,那么$|f(x_0^n)| = \lambda^n \to \infty$,亦即我们得到,$f$不是连续的.

其次,

$$f(e) = f(e^2) = (f(e))^2,$$

由此可见,或者$f(e) = 0$,即f是平凡的;或者

$$f(e) = 1. \tag{3}$$

由(2)与(3)推得不平凡线性连续可乘泛函具有范数1,因而$\mathscr{M}$是共轭空间X^*中单位球的子集.

泛函f的零子空间(即使得$f(x) = 0$那些$x \in X$组成的集)记作$\operatorname{Ker} f$,并把它叫做f的核.

引理1　当$f \in \mathscr{M}$时,核$\operatorname{Ker} f$是一极大理想.

事实上,由

$$y \in I = \operatorname{Ker} f \quad 及 \quad x \in X$$

推得

$$f(y \cdot x) = f(y) \cdot f(x) = 0,$$

即

$$y \cdot x \in \operatorname{Ker} f.$$

于是,$\operatorname{Ker} f$是一理想. 我们来证明,它是一极大理想. 假定不然,即$\operatorname{Ker} f$可以扩张到包含$x_0 \notin \operatorname{Ker} f$的理想$I \neq X$上. 但$\operatorname{Ker} f$具有余维数1(参见第三章§1第6段). 这就是说元素e可以表为

$$e = \lambda x_0 + y,$$

其中$y \in \operatorname{Ker} f$. 由此推得$e \in I$,于是$I = X$. 这与假定矛盾,引理得证.

引理2　对任一极大理想M都可唯一地作出线性连续可乘泛函$f \in \mathscr{M}$,使得$M = \operatorname{Ker} f$.

事实上,根据§3引理3的推论,M是闭理想. 利用§3定理1,我们知道X/M是巴拿赫代数. 但由于§3引理2,X/M没有不平凡理想,即代数X/M不包含异于零的不可逆元素(参见§3引理1的推论). 于是X/M是域,它是巴拿赫代数.

根据§2定理1的推论1,域X/M同构于C. 按定义,这意味着对于任意的$x \in X$,可以找到唯一的数$f(x) \in C$,使得

$$x = f(x) \cdot e + u, u \in M. \tag{4}$$

我们来证明f为同态. 例如,证明$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. 我们有

$$x = f(x) \cdot e + u, \qquad u \in M,$$

$$y = f(y) \cdot e + v, \qquad v \in M,$$

由此

$$xy = f(x) \cdot f(y) \cdot e + w, \quad w \in M.$$

这就意味着$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$. 类似地可证明关系式$f(x+y)=f(x)+f(y)$与$f(\lambda x)=\lambda f(x)$. 此外,如果$x\in M$,那么从(4)推得$f(x)=0$,而如果$x=e$,那么$f(x)=1$.

引理证毕.

于是,我们得到:极大理想$\{M\}$与$\mathscr{M}$中的泛函f之间存在一一对应关系. 鉴于此,我们约定,$\mathscr{M}$中的泛函记为f_M,而与它对应的极大理想用字母M表示. 对于一切极大理想所成的集$\{M\}$,我们将用与它对应的集$\{f_M\}$的同一字母$\mathscr{M}$来表示.

设x为X中某一元素.

我们考察定义在集$\mathscr{M}$上,由公式

$$x(M)=f_M(x) \tag{5}$$

给出的函数$x(M)$(按元素x构造的函数$x(M)$在极大理想上的值等于数$f_M(x)$,即与理想M对应的同态在元素x上的值). 这时便得到§1末尾说到的:代数X的元素以集$\mathscr{M}$上的函数形式来实现.

2. 集$\mathscr{M}$中的拓扑. 基本定理 我们剩下证明,$\mathscr{M}$在某一拓扑中是紧的,并且函数$x(M)$在同一拓扑中是连续的.

前面我们曾经提到,$\mathscr{M}$是单位球的子集. 另一方面,在第四章§3第4段中,我们证明了下述命题的可分情形:

巴拿赫空间的共轭空间X^*的单位球,在弱*拓扑中是紧的.

在一般情况下的这个定理的证明,例如,可以在[21]中459页中找到.

我们记得,弱*拓扑定义的邻域系

$$U_{x_1,\cdots,x_m,\delta}(f_0)=\{f\in X^*:|f(x_k)-f_0(x_k)|<\delta,k=1,\cdots,m\}. \tag{6}$$

我们正是在弱*拓扑中来讨论集$\mathscr{M}$. 从上面建立的结果和下面的引理可推得$\mathscr{M}$的紧性.

引理3 集$\mathscr{M}$是X^*中单位球的闭子集,并且函数$x(M)$在$\mathscr{M}$上是连续的.

事实上,设泛函f_0属于$\mathscr{M}$的闭包. 这意味着,映射f_0的任一基邻域内部,都可以找到由极大理想M生成的同态f_M. 我们取邻域$U_{x,y,x+y,\delta}(f_0)$. 根据(6)及$x(M)$的定义,于是得到

$$\left.\begin{aligned}&|f_M(x)-f_0(x)|<\delta,\\&|f_M(y)-f_0(y)|<\delta,\\&|f_M(x+y)-f_0(x+y)|<\delta.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

但f_M为同态,即

$$f_M(x+y)=f_M(x)+f_M(y).$$

这时由(7)推得

$$f_0(x+y)=f_0(x)+f_0(y).$$

类似地可证明,$f_0(\alpha x)=\alpha f_0(x)$与$f_0(xy)=f_0(x)\cdot f_0(y)$.(这时须取邻域$U_{x,\alpha x,\delta}(f_0)$与$U_{x,y,xy,\delta}(f_0)$.)

这表示f是线性连续可乘泛函. 其次,取邻域$U_{e,\delta}(f_0)$,则得$f_0(e)=1$,即f_0是非平凡的. 于是,$f_0\in\mathscr{M}$,即$\mathscr{M}$是闭的.

现在我们来证明,函数$x_0(M)=f(x_0)$在$\mathscr{M}$上是连续的.

设 $M_0 \in \mathscr{M}$. 对于 $\varepsilon > 0$,我们取邻域 $U_{x_0,\varepsilon}(M_0)$. 如果 $M \in U_{x_0,\varepsilon}$,那么,由于(6),便得

$$|f_M(x_0) - f_{M_0}(x_0)| = |x_0(M) - x_0(M_0)| < \delta.$$

这意味着函数 $x_0(M)$ 在点 M_0 的连续性.

引理证毕.

定理 1　映射 $x \to x(M)$ 给出了代数 X 到代数 $C_{\mathscr{M}}$ 内的同态,其中 $C_{\mathscr{M}}$ 是代数 X 的极大理想之紧豪斯多夫空间 $\mathscr{M}$ 上的连续函数的代数;这时

$$\| x(M) \| = \max |x(M)| \leq \| x \|. \tag{8}$$

根据本节上面讨论的结果,我们只剩下证明关系式(8).

注意,对于任一 M 来说,根据 $f_M(x)$ 的定义,元素 $x - f_M(x)e$ 属于理想 M,即 $x - f_M(x)e$ 是不可逆的. 所以 $f_M(x) \in \sigma(x)$. 另一方面,任取一数 $\lambda_0 \in \sigma(x)$,我们看到 $x - \lambda_0 e$ 不可逆,这表示它属于极大理想 M,由此

$$0 = f_M(x - \lambda_0 e),即\ \lambda_0 = f_M(x).$$

这时,在 $x(M)$ 的映射下象 $\mathscr{M}$ 与 $\sigma(x)$ 重合. 因而,根据 §2 定理 1 的 2°,我们得到不等式(8).

现在我们在对代数 X 的不同假定下,把定理 1 精确化. 下面引进三个概念的定义.

定义 2　我们把所有极大理想的交 $R = \bigcap\limits_{M \subset \mathscr{M}} M$ 叫做 X 的**根基**. 如果 $R = \{0\}$,则说 X 没有根基. 如果 $\| x^2 \| = \| x \|^2$,则巴拿赫代数 X 叫做**正则**的. 如果对于任一函数 $x(M)$,可以找到元素 $y \in X$,使得

$$y(M) = \bar{x}(M),$$

则巴拿赫代数 X 叫做**对称**的($\bar{x}(M)$ 表示 $x(M)$ 的复共轭函数).

定理 2　a) 如果代数 X 的根基由一个零元组成,那么映射 $x \to x(M)$ 是一对一的.

b) 如果代数 X 是正则的,那么 X 与其在 $C_{\mathscr{M}}$ 中的象是等距同构的,特别,X 没有根基.

c) 如果代数 X 是对称的,那么 X 在映射 $x \to x(M)$ 下的象在 $C_{\mathscr{M}}$ 中处处稠密.

d) 如果代数 X 具有性质 b) 和 c),那么 X 等距同构于 $C_{\mathscr{M}}$.

证明　首先我们由前三个命题推出最后一个命题. 由于 b),一一映射 $x \leftrightarrow x(M)$ 是等距的:

$$\| x \|_X = \max_{M \in \mathscr{M}} |x(M)|.$$

由于 c),$\{x(M)\}$ 在 $C_{\mathscr{M}}$ 中处处稠密. 但 X 是完备空间,因此 $\{x(M)\}$ 也是完备的(因为 X 中的范数与 $C_{\mathscr{M}}$ 中的范数相等). 由此推出 $\{x(M)\} = C_{\mathscr{M}}$.

其次我们来证明 a). 设 $x_0 \neq 0$,而在 $\mathscr{M}$ 上 $x_0(M) \equiv 0$. 因此,对于一切 M,$f_M(x_0) = 0$,亦即对于一切 M,$x_0 \in \operatorname{Ker} f_M$,这也就表示 $x_0 \in R$. 但 $R = \{0\}$,由此 $x_0 = 0$. 这与假设矛盾,于是 a) 得证.

为了证明 b),我们注意到从等式 $\| x^2 \| = \| x \|^2$ 立即推出

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[2n]{\| x^{2n} \|} = \| x \|.$$

应用谱半径定理(§2 定理 2),我们得到

$$r(x) = \| x \|. \tag{9}$$

这时从(9)首先推得 X 的根基只由零元组成. 事实上,如果假设 $0 \neq x_0 \in R$,那么对于一切 M,

表达式$f_M(x_0)=0$,即$\sigma(x_0)$只与零元重合,这与$r(x_0)=\|x_0\|\neq 0$矛盾.

其次,从(9)推得,映射$x\leftrightarrow x(M)$作为X与$C_{\mathscr{M}}$中相应的子代数$\{x(M)\}$的同构是等距的,因为由(8)

$$\|x(M)\|_{C_{\mathscr{M}}}=\max_{M\in\mathscr{M}}|x(M)|=r(x)=\|x\|.$$

证明 c)时,需要用到代数与分析学中一个很有名的定理,即斯通 - 魏斯特拉斯(Stone - Weierstrass)定理:

设C_T是紧统T上连续函数组成的巴拿赫代数,如果C_T的子代数A满足下述条件:

1) 单位元(即函数$e(t)\equiv 1$)属于A;

2) 代数A分离T的点(即对任意的$t_1\neq t_2$,存在函数$x(t)\in A$,使得$x(t_1)\neq x(t_2)$);

3) 代数A关于复共轭不变(即从$x(t)\in A$推出$\bar{x}(t)\in A$).

那么A在C_T中处处稠密.

斯通 - 魏斯特拉斯定理的证明可参阅[13]中第53至56页;[21]中第296至297页;[26]中第20页.

现在我们来证明 c). 设$A=\{x(M)\}$表示在映射$x\to x(M)$下X的象.

从(4)立即推出$e\to e(M)\equiv 1$,即$e(M)\equiv 1\in A$. 设M_1与M_2为两个相异的极大理想. 这意味着存在属于M_1而不属于M_2(或属于M_2而不属于M_1)的元素x_0,由此

$$x_0(M_1)=f_{M_1}(x_0)=0,\quad x_0(M_2)=f_{M_2}(x_0)\neq 0,$$

这表示A分离$\mathscr{M}$的点. 其次,按定义本身,对称代数A关于复共轭是不变的. 应用斯通 - 魏斯特拉斯定理便证得 c).

定理证毕.

3. 维纳(Wiener)定理;习题 巴拿赫代数理论的应用是多种多样的.

我们提示,通过上面讨论得到的代数与分析学中的如下一系列结果:

域C上的巴拿赫代数是一个等距同构于C的域;

在巴拿赫空间中,任何非零有界算子的谱是非空的;

在巴拿赫空间X中,对于任何有界算子A,都存在极限$\lim\sqrt[n]{\|A^n\|}=r(A)$,并且$A$的谱完全位于圆$|\lambda|\leqslant r(A)$中.

现在我们利用交换巴拿赫代数理论,来证明下面的**维纳定理**:

如果$x(\theta)$可展为绝对收敛的傅里叶级数$x(\theta)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}x_k e^{ik\theta}$且处处不为零,那么函数$y(\theta)=1/x(\theta)$也可展为绝对收敛的傅里叶级数.

我们来考察等距同构的代数l_1与W(参见§1第2段例4). 我们求这两个代数的空间$\mathscr{M}$. 不难看出,W到C内的同态只要给定在函数$x_0(t)=e^{it}$上就够了,其次可以将它单值地扩张到W上. 令

$$f_M(x_0)=f_M(e^{it})=\zeta.$$

这时

$$f_M(x_0^{-1})=f_M(e^{-it})=\zeta^{-1}.$$

根据(2)

$$|\zeta| = |f_M(x_0)| \leqslant \|x_0\| = 1, \ |1/\zeta| = |f_M(x_0^{-1})| \leqslant \|x_0^{-1}\| = 1,$$

由此 $|\zeta| = 1$,即 $\zeta = e^{i\theta}$. 于是我们得到,$\mathscr{M}$ 与圆周 $|\zeta| = 1$ 成一一对应. 对于任一序列 $x = (\cdots, x_{-n}, \cdots, x_0, \cdots, x_n, \cdots) \in l_1$ 以及和它对应的函数 $x(t) = \sum_k x_k e^{ikt} \in W$,有

$$f_M(x) = f_M(x(t)) = f_M\left(\sum_k x_k e^{ikt}\right)$$

$$= \sum_k x_k [f_M(e^{it})]^k = \sum_k x_k e^{ik\theta} = x(\theta).$$

由此看到,函数 $x(\theta)$ 在 $-\pi \leqslant \theta < \pi$ 的任何一点都不为零,这一事实说明 x 不属于任一极大理想. 根据 §3 引理 1 的推论,这序列在代数 l_1 中是可逆的. 令 $y = x^{-1} = (\cdots, y_{-n}, \cdots, y_0, \cdots, y_n, \cdots)$. 这时

$$y(M) = f_M(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ik\theta} = f(x^{-1}) = \frac{1}{f(x)}$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\theta}},$$

这就是所要证明的.

巴拿赫代数理论的另外两个重要的应用,是有界算子谱论和斯通 - 切赫(Stone - Čech)定理,我们将以习题的形式叙述于下(参看习题 8 与 9).

习题 1　a) 证明: 代数 $\mathscr{A}$(参见 §1 第 2 段例 3)的极大理想的空间与单位圆 $|z| \leqslant 1$ 的点,可以建立连续的一一对应.

b) 证明 $\mathscr{A}$ 正则,不对称且没有根基.

习题 2　什么情况妨碍确立 l_1(参见 §1 第 2 段例 4)等距同构于空间 $C_{\mathscr{M}}$(即圆周 $|\zeta| = 1$ 上的一切连续函数所成空间)?

习题 3　证明如下定理:设

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty,$$

并且当 $|z| \leqslant 1$ 时 $x(z) \neq 0$. 则函数 $y(z) = \dfrac{1}{x(z)}$ 可展为当 $|z| \leqslant 1$ 时绝对收敛的泰勒级数.

习题 4　记 $[a,b]$ 上 n 阶连续可微函数的全体为 $C^n[a,b]$.

a) 证明:对于普通的运算及由下式

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(k)}(t)|$$

给出的范数,$C^n[a,b]$ 构成巴拿赫代数.

b) 求 $C^n[a,b]$ 的极大理想(参看[13],第 19,20 页).

c) 证明:$C^n[a,b]$ 是没有根基的对称代数. 在这种情况下,应用定理 2 得到什么结果?

习题 5　设 $CBV[0,1]$ 表示范数为

$$\|x\| = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| + V_0^1[x]$$

的闭区间[0,1]上的有界变差连续复函数所成的代数.

a) 证明:$CBV[0,1]$是巴拿赫代数.

b) 求这个代数的极大理想.

习题 6 举出一个与自己的根基重合的巴拿赫代数的例子.

习题 7 描述代数 $C[a,b]$中的一切闭理想.

习题 8 设 T 为完全正则拓扑空间(参看第二章 §5 第 6 段). 记 B_T 为定义在 T 上的一切有界复函数所成的集,其中具有普通的运算和范数

$$\|x\| = \sup_{t\in T} |x(t)|.$$

a) 证明:B_T 是没有根基的正则对称代数.

b) 证明:T 的点同胚地嵌入代数 B_T 的极大理想空间 $\mathscr{M}$ 中,同时 T 的象在这个嵌入下是 $\mathscr{M}$ 中的处处稠密子集.

c) 证明:在这个嵌入下,T 的象上的任何有界复函数有到 $\mathscr{M}$ 上的唯一连续延拓.

命题 b)加上"$\mathscr{M}$ 是紧统"这一论断后(如果应用 §4 定理 1 与定理 2,则从 a)立即推得该论断),便组成关于重紧扩张的著名吉洪诺夫定理的内容. 命题 c)是属于斯通与切赫. 具有性质 c)的重紧扩张叫做极大的. 命题 c)意味着 $\mathscr{M}$ 是极大重紧扩张(参看[22]第 23 页).

习题 9 设 H 是希尔伯特空间. 在代数 $\mathscr{L}(H,H)$ 中考虑由自共轭算子 A_0 生成的交换子代数 $B(A_0)$(即是由 A_0 幂次的线性包的闭包生成的).

a) 证明:$B(A_0)$正则且没有根基.

b) 证明:$B(A_0)$对称,并且

$$\overline{x}(M) = x^*(M),$$

这里 x^* 是算子 $x \in B(A_0)$的共轭算子,$x(M)$是 §4 中构造的映射. 关于 b)也可参看习题 10 中的 c).

应用 §4 定理 2 于代数 $B(A_0)$,便得到所谓自共轭算子的谱定理(参看[22]第十章;[26]第二章).

习题 10 如果存在具有下述性质的映射 $X\to X$:

$$(x+y)^* = x^* + y^*,\quad (xy)^* = y^*x^*,\quad (\alpha x)^* = \overline{\alpha}x^*,\quad (x^*)^* = x,$$

我们就说(不一定交换的)巴拿赫代数是**对合代数**. 此外,如果 $\|xx^*\| = \|x\|^2$,则具有对合的代数叫做 **B^* 代数**.

a) 证明:代数 $\mathscr{L}(H,H)$是 B^* 代数(参看[22]第 26 页).

b) 证明:交换 B^* 代数是正则的(参看[22]第 26 页).

c) 证明:B^* 代数是对称的,此外,$\overline{x}(M) = x^*(M)$(参看[22]第 27 页阿伦斯(Arens)引理).

命题 b)和 c)与定理 2 结合起来,便得到属于盖尔芳德 - 纳依玛尔克(Гельфанд - Наймарк)的结果,这个结果有时称为**交换巴拿赫代数理论的基本定理**:

交换 B^* 代数等距同构于代数 $C_{\mathscr{M}}$,并且在这个同构下

$$\bar{x}(M) = x^*(M).$$

于是,由 24 条公理(13 条交换代数公理,5 条与范数有关的公理,完备公理与 5 条 B^* 代数公理)所描述的抽象代数的对象,可以由紧豪斯多夫拓扑空间上的一切连续函数的代数形式来实现.

这个结果,使我们能够用统一观点来考虑这样一些看起来彼此相隔甚远的事实,诸如三角级数绝对收敛的维纳定理、自共轭算子的谱展开定理、吉洪诺夫拓扑定理、斯通和切赫定理以及一系列其他定理.

文　献

[1] Авербух В. И., Смолянов О. Г., Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах, УМН. XXII, вып. 6 (138) (1967), 200—260.

[2] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, —М., Гостехиздат, 1948. (有中译本, 杨永芳译,《集与函数的汎论初阶》, 上、下册, 商务印书馆 1954.)

[3] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов, Наука, 1966.

[4] Банах С., Курс функціонального аналізу, Радяньска школа, Київ, 1948.

[5] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Наукова думка, Киев, 1965.

[6] Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, —М.: Физматгиз, 1962.

[7] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, —2-е изд. —М., Физматгиз, 1968.

[8] Бурбаки Н., Теория множеств, —М.: Мир, 1965.

[9] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, —М.: ИЛ, 1959.

[10] Виленкин Н. Я. и др., Функциональный анализ. —М., Наука, 1964.

[11] Винер Н., Интеграл Фурье и некоторые его приложения, —М.: Физматгиз, 1963.

[12] Винер Н., Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, —М.: Наука, 1964.

[13] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные

кольца,—М. :Физматгиз,1960.

[14] Гельфанд И. М. , Шилов Г. Е. , Обобщенные функции и действия над ними,2 – е изд. ,—М. :Физматгиз,1959. (有中译本,林坚冰译,《广义函数及其运算》,科学出版社,1965(1984 重印).)

[15] Гельфанд И. М. , Шилов Г. Е. , Пространства основных и обобщенных функций,—М. :Физматгиз,1958.

[16] Гельфанд И. М. , Шилов Г. Е. , Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений,—М. :Физматгиз,1958. (有中译本,周宝熙译,《微分方程理论的若干问题》,科学出版社,1983.)

[17] Гельфанд И. М. ,Виленкин Н. Я. ,Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства,—М. : Физматгиз, 1961. (有中译本,夏道行译,《调和分析的某些应用,装备希尔伯特空间》,科学出版社,1965(1984 年重印).)

[18] Гохберг И. Ц. , Крейн М. Г. , Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов,—М. :Наука,1965.

[19] Гохберг И. Ц. , Крейн М. Г. , Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространствах и ее приложения,—М. :Наука,1967.

[20] Вулих Б. З. , Теория полуупорядоченных пространств,—М. : Физматгиз, 1961.

[21] Данфорд Н. ,Шварц Дж. Т. ,Линейные операторы. Общая теория,—М. : ИЛ,1962.

[22] Данфорд Н. , Шварц Дж. Т. , Линейные операторы. Спектральная теория,—М. :Мир,1966.

[23] Дэй М. ,Линейные нормированные пространства,—М. :ИЛ,1961.

[24] Дьедонне Ж. ,Основы математического анализа,—М. :Мир,1964.

[25] Зигмунд А. ,Тригонометрические ряды,т. 1 ,2 ,—М. :Мир,1965.

[26] Иосида К. ,Функциональный анализ,—М. :Мир,1967. (有中译本,吉田耕作著,吴元恺等译,《泛函分析》,人民教育出版社,1980.)

[27] Канторович Л. В. , Функциональный анализ и прикладная математика, УМН, Ⅲ ,вып. 6(28)(1948),89—185.

[28] Канторович Л. В. ,Акилов Г. П. ,Функциональный анализ —2 – е изд. —М. : Наука,1977

[29] Келл Дж. Л. ,Общая топология,—М. :Наука,1968.

[30] Красносельский М. А. , Топологические методы в теории нелинейных дифференциальных уравнений,—М. :Гостехиздат,1956.

[31] Куратовский К. ,Топология,т. Ⅰ. ,Мир,1966.

[32] Лебег А. , Интегрирование и отыскание примитивных функций,—М. : ГТТИ,1934.

[33] Лоэв М. ,Теория вероятностей,—М. :ИЛ,1962.(有中译本,梁文骐译,"概率论",科学出版社,1966.)

[34] Люмис Л. , Введение в абстрактный гармонический анализ,—М. : ИЛ,1956.

[35] Михлин С. Г. , Лекции по интегральным уравнениям,—М. : Физматгиз, 1959.

[36] Морен К. ,Методы гильбертова пространства,—М. :Мир,1965.

[37] Наймарк Н. А. ,Нормированные кольца,2 – е изд. —М. :Наука,1968.

[38] Наймарк М. А. ,Линейные дифференциальные операторы,2 – е изд. —М. : Наука,1969.(有中译本,王志成等译,《线性微分算子》,科学出版社,1984.)

[39] Натансон И. П. ,Теория функций вещественной переменной,2 – е изд. —М. : Гостехиздат,1957.(有中译本,徐瑞云译,《实变函数论》,上、下册,高等教育出版社,1958.)

[40] Плеснер А. И. , Спектральная теория линейных операторов,—М. : Наука,1965.

[41] Рисс Ф. ,Надь В. С. ,Лекции по функциональному анализу,2 – е изд. —М. : МИР,1979.(有中译本,《泛函分析讲义》梁文骐译,第一卷,科学出版社,1963.庄万等译第二卷,科学出版社,1980.)

[42] Робертсон А. ,Робертсон В. ,Топологические векторные пространства,—М. : Мир,1967.

[43] Рудин У. ,Основы математического анализа,—М. :《Мир》,1966.

[44] Сакс С. ,Теория интеграла,—М. :ИЛ,1949.

[45] Титчмарш Е. , Введение в теорию интегралов Фурье,—М. : Гостехиздат, 1948.

[46] Трикоми Ф. ,Интегральные уравнения,—М. :ИЛ,1960.

[47] Френкель А. , Бар – Хиллел И. , Основания теории множеств,—М. : Мир,1966.

[48] Халмош П. ,Теория меры,—М. :ИЛ,1953.(有中译本,王建华译,《测度论》,科学出版社,1965.)

[49] Халмош П. , Конечномерные векторные пространства,—М. : Физматгиз, 1963.

[50] Халмош П. ,Лекции по эргодической теории,—М. :ИЛ,1959.

[51] Хилл Е. , Филлипс Р. , Функциональный анализ и полугруппы,—М. : ИЛ, 1962.(有中译本,吴智泉等译,《泛函分析与半群》,上册,上海科学出版

社,1964.)

[52] Шилов Г. Е. , Математический анализ. Второй специальный курс. 2 – е изд. —М. :МГУ,1984.

[53] Шилов Г. Е. , Гуревич Б. Л. , Интеграл, мера и производная. Общая теория,—М. :Наука,1967.

[54] Шилов Г. Е. ,Фан Дык Тинь,Интеграл,мера и производная на линейных пространствах,—М. :Наука,1967.

[55] Эдвардс Р. ,Функциональный анализ,—М. :Мир,1967.

[56] Schwartz L. ,Théorie des distributions,, I , II ,—Paris,1951.

[57] Fraenkel A. ,Abstract Set Theory,Amsterdam,1953.

各章的有关文献

第一章　[2];[8];[47];[56].
第二章　[2];[4];[7];[24];[29];[31].
第三章　[4];[9];[10];[13];[15];[17];[20];[21];[23];[24];[26];[27];[28];[34];[36];[37];[41];[42];[49];[51];[55].
第四章　[3]—[5];[13]—[19];[21]—[23];[26];[34];[36]—[38];[40];[52];[57].
第五章　[12];[21];[32];[33];[39];[41];[44];[48];[50];[53];[54].
第六章　[21];[28].
第七章　[32];[39];[41];[44];[53].
第八章　[6];[11];[12];[14]—[17];[25];[52].
第九章　[35];[46].
第十章　[1];[24];[28];[30];[43];[51].
附　录　[13];[21];[22];[26].

索　　引

一　画

二　画

三　画

① 2.2.2 表示第二章§2 第 2 段,附录记为 11. 余同。

四　　画

五 画

六 画

七　画

八 画

九　画

十 画

十 一 画

十　二　画

十 三 画

十四画以上

译者后记

安德烈·尼可拉也维奇·柯尔莫戈洛夫和谢尔盖·瓦西里也维奇·佛明合著的《函数论与泛函分析初步》从第一版1954年问世至今已有50多年。它的第四版(1976年)由我们翻译、高等教育出版社1992年出版。这次我们受高等教育出版社之约,根据原著的第七版(2004年)进行中文版的修订。修订工作由段虞荣一人完成。

莫斯科大学校长、俄罗斯科学院院士、教授B.A.萨多夫尼奇创议出版《经典大学教材》丛书,作为向莫斯科大学建校250周年献礼。丛书共包括250种各学科的优秀教材和教学参考书,本书名列其中。为什么本书能获此殊荣呢?译者深深体会到这与本书的两位卓越的富有创造性的著者的数学研究水平和教学经验是分不开的。

A.H.柯尔莫戈洛夫是苏联科学院院士、国际著名的数学家,在数学和理论物理等学科有重大贡献,并在莫斯科大学数学力学系执教多年,积累了丰富的教学经验。他锐意创新,制订了新的教学大纲,用称为《分析Ⅲ》的统一的教程代替实变函数论、积分方程及变分法等课程,并亲自讲授此教程。在教学的基础上,与在莫斯科大学物理系讲授泛函分析的C.B.佛明教授密切合作编写本书,取得了卓著的教学成果。

本书反映了A.H.柯尔莫戈洛夫的教育思想。这首先体现在关于抽象数学与应用数学统一的问题上。在本书中,一方面注意集合论、度量空间与拓扑空间连续映射的一般理论,线性空间以及在其上的泛函与算子,一般测度空间中的纯测度论与积分法等的发展的内部逻辑,另一方面,不忽略这些更抽象的数学领域所服务的古典分析学甚至应用分析学,即强调理论密切联系实际。其次,体现在他建立的系统的观点。在对学生进行起步教育时,引导学生学习古典分析(《分析Ⅰ》),代数、几

何和微分方程(《分析Ⅱ》),而在(《分析Ⅲ》)教程中,包含测度论与函数论初步、积分方程、泛函分析等内容,以加强它们之间的内在联系。

C. B. 佛明教授在原著第一版问世后的几个新版中作了一些重要的扩充和发展。他去世以后,又有其他的俄罗斯数学家继续对本书进行修订,使本书日臻完善,获得极高评价,目前已被译成多种语言出版,成为该领域中一本名副其实的经典教材。

这次中文修订版,除了根据原著第七版进行修订、勘误之外,在行文上力求精益求精,并把原先用页码表示参见内容改用章、节、段表示,对数学家的译名也根据标准译法作了修改。我们期望这次修订中文版的出版,对于我国的数学教学有较好的参考价值。

还应当说明的是在译出第六和第七版序言时,得到了高等教育出版社田文琪编审的耐心指教,他仔细地审阅了译文并提出许多重要的修改意见,我们在此致谢!

段虞荣　郑洪深　郭思旭

2005 年 10 月